Une nouvelle estimation extrinsèque du spectre de l'opérateur de Dirac

Nicolas Ginoux

28 avril 2003

Résumé : Nous établissons une nouvelle majoration optimale pour les plus petites valeurs propres de l'opérateur de Dirac sur une hypersurface compacte de l'espace hyperbolique.

A new extrinsic estimate for the spectrum of the Dirac operator

Abstract : We prove a new upper bound for the smallest eigenvalues of the Dirac operator on a compact hypersurface of the hyperbolic space.

Soit (M^m, g) une hypersurface riemannienne compacte orientée (de dimension m) d'une variété riemannienne spinorielle $(\widetilde{M}^{m+1}, g)$. Notons λ_1 la plus petite valeur propre de l'opérateur de Dirac associé à g et à la structure spinorielle induite sur M, et H la courbure moyenne de M dans $\widetilde{M}$. Dans [2], C. Bär montre que

$$\lambda_1^2 \leq \frac{m^2}{4\mathrm{Vol}(M)} \int_M H^2 v_g \,, \qquad \text{si } \widetilde{M} = \mathbb{R}^{m+1}, \tag{1}$$

$$\lambda_1^2 \leq \frac{m^2}{4\mathrm{Vol}(M)} \int_M (H^2+1) v_g \,, \qquad \text{si } \widetilde{M} = S^{m+1}, \qquad \text{et} \tag{2}$$

$$|\lambda_1| \leq \frac{m}{2}(\sup_M |H| + 1)\,, \qquad \text{si } \widetilde{M} = \mathbb{H}^{m+1}. \tag{3}$$

L'auteur montre également que, si M est une sphère géodésique, alors (1) et (2) sont des égalités, mais pas (3). Ces résultats appellent donc la question suivante : peut-on améliorer (3) en une majoration optimale ?

Nous montrons dans cette note une estimation optimale de λ_1 pour une hypersurface de l'espace hyperbolique. La preuve de ce résultat utilise une approche différente de celle de [9], qui est basée sur les propriétés *conformes* des opérateurs de Dirac et de Penrose. Nous en discutons ensuite les limites, en remarquant qu'en dimension 2 on ne peut espérer obtenir pour l'opérateur de Dirac une majoration L^2 analogue à celle de [7] (Théorème 2).

Ce travail, qui repose sur la thèse de l'auteur ([10], Chap. 2), a été effectué à l'Institut Max-Planck pour les Mathématiques dans les Sciences de Leipzig, que l'auteur tient à remercier pour son soutien et son hospitalité.

1 Préliminaires

Pour les préliminaires sur la géométrie spinorielle, on se reportera par exemple à [13, 6, 5, 8].

Nous rappelons quelques faits de base sur la restriction de spineurs à une hypersurface (on pourra aussi consulter [2, 14, 9]). Considérons une hypersurface riemannienne compacte (connexe) et orientée M^m dans une variété riemannienne spinorielle $(\widetilde{M}^{m+1}, g)$. L'orientation de M permet, grâce à l'existence sur M d'un champ normal unitaire ν compatible avec les orientations de M et de $\widetilde{M}$, d'induire une structure spinorielle sur M à partir de celle de $\widetilde{M}$, possédant les propriétés suivantes : notons ΣM (resp. $\Sigma\widetilde{M}$) le

fibré des spineurs de (M,g) (resp. de $(\widetilde{M},g)$), "$<\cdot\,,\cdot>$" le produit scalaire hermitien naturel de ΣM, ∇ (resp. $\widetilde{\nabla}$) la dérivée covariante canonique sur ΣM (resp. sur $\Sigma\widetilde{M}$), et "$\underset{M}{\cdot}$" (resp. "$\cdot$") la multiplication de Clifford de TM sur ΣM (resp. de $T\widetilde{M}$ sur $\Sigma\widetilde{M}$).
Il existe alors un isomorphisme

$$\Sigma\widetilde{M}_{|_M} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \Sigma M & \text{si } m \text{ est pair} \\ \Sigma M \oplus \Sigma M & \text{si } m \text{ est impair} \end{array} \right. \tag{4}$$

qui est unitaire et qui envoie, pour tout champ X tangent à M et toute section ϕ de $\Sigma\widetilde{M}_{|_M}$, la section $X\cdot\nu\cdot\phi$ sur $X \underset{M}{\cdot} \phi$ et la section $\widetilde{\nabla}_X\phi$ sur $\nabla_X\phi + \frac{A(X)}{2} \underset{M}{\cdot} \phi$, où A est le champ d'endomorphismes de Weingarten de TM. L'isomorphisme (4) étant désormais assimilé à l'application identité, considérons l'opérateur D agissant sur les sections de $\Sigma\widetilde{M}_{|_M}$ par

$$D := \left\{ \begin{array}{ll} D_M & \text{si } m \text{ est pair} \\ D_M \oplus -D_M & \text{si } m \text{ est impair,} \end{array} \right.$$

où D_M est l'opérateur de Dirac (dit *fondamental*) de (M,g). Par définition, D est elliptique autoadjoint et $\mathrm{Spec}(D^2) = \mathrm{Spec}(D_M^2)$. Nous noterons, en tenant compte de leurs multiplicités, les valeurs propres de D_M par λ_k ($k \geq 1$), et supposerons la suite $(|\lambda_k|)_{k\geq 1}$ croissante.
Afin d'estimer ce spectre en fonction d'invariants extrinsèques, nous comparons D à un opérateur ici auxiliaire appelé *opérateur de Dirac-Witten* [15, 16] et défini dans une base orthonormée locale $(e_j)_{1\leq j\leq m}$ de TM par $\widehat{D} := \sum_{j=1}^m e_j\cdot\widetilde{\nabla}_{e_j}$. Grâce aux propriétés de l'isomorphisme (4), les opérateurs D^2 et $\widehat{D}^2$ sont liés par (cf. [10] ou [9], Lemma 2) :

$$\widehat{D}^2\phi = D^2\phi - \frac{m}{2}dH \underset{M}{\cdot} \phi - \frac{m^2H^2}{4}\phi, \tag{5}$$

identité valable pour toute section ϕ de $\Sigma\widetilde{M}_{|_M}$.

2 Résultat principal

Nous nous restreignons maintenant au cas où la variété ambiante $(\widetilde{M},g)$ est l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^{m+1}$ muni de sa métrique standard g à courbure sectionnelle -1. En tant que variété riemannienne spinorielle, l'espace hyperbolique possède la propriété remarquable d'admettre des *spineurs de Killing imaginaires*, i.e., il existe des sections non nulles ϕ de $\Sigma\widetilde{M}$ satisfaisant, pour tout champ de vecteurs X,

$$\widetilde{\nabla}_X\phi = \pm\frac{i}{2}X\cdot\phi. \tag{6}$$

Il est ici à noter que la classification des variétés riemanniennes spinorielles complètes admettant de telles sections a été achevée par H. Baum dans [3] et [4], faisant apparaître d'autres exemples que l'espace hyperbolique. Pour les propriétés des spineurs de Killing, on pourra consulter [5].
Reprenant l'idée introduite dans [2] d'utiliser la restriction de ces spineurs de Killing comme sections-test dans le principe du Min-Max, nous poussons plus loin la preuve du résultat (3) de C. Bär grâce à l'identité (5) qui permet d'éviter l'emploi de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (comparer avec [2], p. 586). Nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 1 *Soit $(M,\,g)$ une hypersurface riemannienne (immergée) de dimension m compacte et orientée de l'espace hyperbolique $(\mathbb{H}^{m+1},g)$. Munissons M de la structure spinorielle induite et posons $N := 2^{[\frac{m+2}{2}]}$. Alors pour tout $k \in \{1,\ldots,N\}$,*

$$\lambda_k^2 \leq \frac{m^2}{4}\left(\sup_M H^2 - 1\right). \tag{7}$$

De plus, si (7) est une égalité pour $k=1$, alors la courbure moyenne H est constante.

Démonstration : Étant donnée une section non nulle ϕ de $\Sigma\mathbb{H}^{m+1}$ satisfaisant (6), évaluons le quotient de Rayleigh $\mathcal{Q}\left(D^2,\phi\right) := \frac{\int_M <D^2\phi,\phi> v_g}{\int_M <\phi,\phi> v_g}$. La section ϕ vérifiant (6), il vient immédiatement $\widehat{D}\phi = \mp\frac{mi}{2}\phi$ puis $\widehat{D}^2\phi = -\frac{m^2}{4}\phi$. D'après (5),

$$D^2\phi = -\frac{m^2}{4}\phi + \frac{m^2H^2}{4}\phi + \frac{m}{2}dH \underset{M}{\cdot} \phi.$$

Prenons le produit scalaire hermitien de cette identité avec ϕ et identifions-en les parties réelles : puisque la multiplication de Clifford par une 1-forme est anti-autoadjointe (cf. [13]), $\Re\mathrm{e}(< dH \underset{M}{\cdot} \phi, \phi >) = 0$, dont on déduit que :

$$\Re\mathrm{e}\left(< D^2\phi,\phi >\right) = -\frac{m^2}{4} < \phi,\phi > + \frac{m^2H^2}{4} < \phi,\phi > . \tag{8}$$

Par intégration de cette identité sur M, nous obtenons

$$\mathcal{Q}\left(D^2,\phi\right) = -\frac{m^2}{4} + \frac{m^2\int_M H^2 < \phi,\phi > v_g}{4\int_M < \phi,\phi > v_g} \leq -\frac{m^2}{4} + \frac{m^2}{4}\sup_M H^2.$$

Puisque l'espace hyperbolique admet un espace de dimension $2.2^{\left[\frac{m+1}{2}\right]}$ de spineurs de Killing imaginaires, l'application du principe du Min-Max donne l'inégalité (7).
Si maintenant (7) est une égalité pour $k = 1$, alors la caractérisation variationnelle de λ_1^2 entraine, pour la restriction à M de tout spineur de Killing imaginaire ϕ sur $\mathbb{H}^{m+1}$,

$$D^2\phi = \lambda_1^2\phi.$$

L'injection de cette relation dans (8) et le fait qu'un spineur de Killing imaginaire n'admet pas de zéro [5] donne alors $\lambda_1^2 = \frac{m^2}{4}\left(H^2 - 1\right)$, dont on déduit que H doit être constante.

□

Remarques
a. Ce résultat se révèle analogue à celui de E. Heintze ([12], Theorem 2.3) pour le laplacien scalaire, et est optimal : pour toute sphère géodésique, (7) est une égalité pour $k = 1$ (voir [9]).
b. L'inégalité (7) pour $k = 1$ demeure évidemment valable sur toute hypersurface (compacte et orientée) de toute variété riemannienne spinorielle admettant un spineur de Killing imaginaire.
c. Pour obtenir un majorant L^2 analogue à ceux de (1) et (2), il suffirait qu'il existe un spineur de Killing imaginaire de norme *constante* sur M. Il a néanmoins été démontré [3, 4, 10] que, sous cette hypothèse, M doit être totalement ombilique dans $\mathbb{H}^{m+1}$, i.e., être isométrique à une sphère géodésique de $\mathbb{H}^{m+1}$.

Nous n'excluons pas l'existence lorsque $\widetilde{M} = \mathbb{H}^{m+1}$ d'une telle borne L^2, qui paraîtrait naturelle au regard de l'estimation obtenue par A. El Soufi et S. Ilias ([7], Théorème 1) pour la première valeur propre non nulle du laplacien scalaire. Cependant, nous signalons les limites de cette analogie : l'estimation *a priori* (comparer avec [7], Théorème 2)

$$\lambda_1^2 \leq \frac{m^2}{4\mathrm{Vol}(M)}\int_M \left(H^2 + R(\iota)\right) v_g$$

sur une hypersurface compacte d'une quelconque variété $\widetilde{M}$ *conformément* immergée dans la sphère S^{m+1} ne peut avoir lieu en dimension $m = 2$: en effet, la quantité $\int_M \left(H^2 + R(\iota)\right) v_g$ est dans ce cas la fonctionnelle de Willmore, qui est invariante par changement conforme de métrique sur $\widetilde{M}$. Or le produit $\lambda_1^2\mathrm{Aire}(S^2)$ est *non borné* dans la classe conforme de can_{S^2} [1]. Cette différence de comportement entre l'opérateur de Dirac et le laplacien scalaire se retrouve d'ailleurs dans la caractérisation du cas d'égalité de (2) [11].
Pour l'utilisation des propriétés conformes de l'opérateur de Dirac dans ce contexte, nous renvoyons à [9, 10].

Références

[1] B. Ammann, discussions privées.

[2] C. Bär, *Extrinsic Bounds for Eigenvalues of the Dirac Operator*, Ann. Glob. Anal. Geom. **16** (1998), 573–596.

[3] H. Baum, *Complete Riemannian manifolds with imaginary Killing spinors*, Ann. Glob. Anal. Geom. **7** (1989), 205–226.

[4] ———, *Odd-dimensional Riemannian manifolds admitting imaginary Killing spinors*, Ann. Glob. Anal. Geom. **7** (1989), 141–153.

[5] H. Baum, T. Friedrich, R. Grunewald, I. Kath, *Twistor and Killing Spinors on Riemannian Manifolds*, Teubner-Texte zur Mathematik **124** (1991), Teubner-Verlag Stuttgart/Leipzig.

[6] J.-P. Bourguignon, O. Hijazi, J.-L. Milhorat, A. Moroianu, *A Spinorial approach to Riemannian and Conformal Geometry* (en préparation).

[7] A. El Soufi, S. Ilias, *Une inégalité de type Reilly pour les sous-variétés de l'espace hyperbolique*, Comment. Math. Helv. **67** $n^0 2$ (1992), 167–181.

[8] T. Friedrich, *Dirac operators in Riemannian geometry*, Graduate Studies in Mathematics **25** (2000), American Mathematical Society.

[9] N. Ginoux, *Reilly-type spinorial inequalities*, Math. Zeit. **241** $n^0 3$ (2002), 513–525.

[10] ———, *Opérateurs de Dirac sur les sous-variétés*, Thèse de doctorat (2002), Université Henri Poincaré, Nancy.

[11] ———, *Remarques sur une estimation de spectre de l'opérateur de Dirac* (en préparation).

[12] E. Heintze, *Extrinsic upper bound for λ_1*, Math. Ann. **280** (1988), 389–402.

[13] H.B. Lawson, M.-L. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press (1989).

[14] B. Morel, *Eigenvalue Estimates for the Dirac-Schrödinger Operators*, J. Geom. Phys. **38** (2001), 1–18.

[15] E. Witten, *A new proof of the positive energy theorem*, Commun. Math. Phys. **80** (1981), 381–402.

[16] X. Zhang, *Lower bounds for eigenvalues of hypersurface Dirac operators*, Math. Res. Lett. **5** (1998), 199–210.

Nicolas GINOUX
Max-Planck Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Inselstraße 22 D-04103 Leipzig.
ginoux@mis.mpg.de