# Graßmann'sche Mannigfaltigkeiten und universelle Bündel

Nicolas Ginoux

Seminar Differentialtopologie - Universität Regensburg

23. Juli 2010

**Zusammenfassung:** Wir zeigen, dass jedes reelle Vektorbündel von einem universellen Bündel und auf eindeutige Weise bis auf Homotopie induziert wird. Der Vortrag basiert auf [3, Kap. 5] und setzt Kenntnisse aus der Differentialgeometrie von Faserbündeln (insbes. Lie-Gruppen und homogenen Räumen) voraus, siehe z.B. [1].

# 1 Graßmann'sche Mannigfaltigkeiten und ihr kanonisches Vektorbündel

## 1.1 Graßmann'sche Mannigfaltigkeiten

**Definition 1.1** *Für natürliche Zahlen $n, k \in \mathbb{N}$ wird die* Graßmann'sche Mannigfaltigkeit der $n$-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{R}^{n+k}$ *definiert als*

$$G_n(\mathbb{R}^{n+k}) := \{V \subset \mathbb{R}^{n+k} \,|\, V \text{ } n\text{-dim. Untervektorraum}\}.$$

Sie heißt nicht zufällig Mannigfaltigkeit:

**Proposition 1.2** *Seien $n, k \in \mathbb{N}$, dann trägt $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ die Struktur einer glatten $nk$-dimensionalen kompakten Mannigfaltigkeit, die zum homogenen Raum $\mathrm{O}(n+k)/\mathrm{O}(n) \times \mathrm{O}(k)$ diffeomorph ist, wobei $\mathrm{O}(n)$ die orthogonale Gruppe von $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ bezeichnet.*

*Beweis*: Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{O}(n+k) \times G_n(\mathbb{R}^{n+k}) & \longrightarrow & G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \\ (A, V) & \longmapsto & A(V) \end{array}$$

definiert eine transitive Linksgruppenwirkung und der Stabilisator von $\mathbb{R}^n \times \{0_{\mathbb{R}^k}\} \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ist $\mathrm{O}(n) \times \mathrm{O}(k)$ (lässt eine orthogonale Abbildung einen Untervektorraum invariant, so lässt sie ihr orthogonales Komplement auch invariant). Deswegen induziert diese Linksgruppenwirkung eine bijektive Abbildung $\mathrm{O}(n+k)/\mathrm{O}(n) \times \mathrm{O}(k) \xrightarrow{\phi} G_n(\mathbb{R}^{n+k})$. Da $\mathrm{O}(m)$ eine $\frac{m(m-1)}{2}$-dimensionale kompakte Lie-Gruppe ist, folgt aus [1, Satz 1.23], dass der Rechtsquotient $\mathrm{O}(n+k)/\mathrm{O}(n) \times \mathrm{O}(k)$ ein $nk$-dimensionaler glatter kompakter homogener Raum ist. Mittels der obigen bijektiven Abbildung $\phi$ wird damit eine eindeutige glatte Struktur auf $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ so definiert, dass $\phi$ ein glatter Diffeomorphismus ist.
Alternativ kann ein Atlas von $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ folgendermaßen definiert werden: für $1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq n+k$ sei $\pi_{i_1,\ldots,i_n} : \mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow \oplus_{j=1}^n \mathbb{R} \cdot e_{i_j}$ die Orthogonalprojektion (wobei $(e_j)_{1 \leq j \leq n+k}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^{n+k}$ bezeichnet) und setze $U_{i_1,\ldots,i_n} := \{V \in G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \,|\, \pi_{i_1,\ldots,i_n}(V) = \oplus_{j=1}^n \mathbb{R} \cdot e_{i_j}\}$. Die entsprechende Karte wird definiert durch $\varphi_{i_1,\ldots,i_n} : U_{i_1,\ldots,i_n} \to \mathbb{R}^{nk}$, $V \mapsto (\pi^\perp \circ \pi^{-1}_{i_1,\ldots,i_n}(e_{i_1}), \ldots, \pi^\perp \circ \pi^{-1}_{i_1,\ldots,i_n}(e_{i_n}))$, wobei $\pi^\perp$ die Orthogonalprojektion von $\mathbb{R}^{n+k}$ auf $(\oplus_{j=1}^n \mathbb{R} \cdot e_{i_j})^\perp = \bigoplus_{j \notin \{i_1,\ldots,i_n\}} \mathbb{R} \cdot e_j$ bezeichnet. $\square$

**Bemerkungen 1.3** Seien $n, k \in \mathbb{N}$.

1. Die Inklusionsabbildung $\mathbb{R}^{n+k} \stackrel{\iota_{k,k+l}}{\to} \mathbb{R}^{n+k+l}$, $x \mapsto (x, 0_{\mathbb{R}^l})$, induziert eine glatte Einbettung $G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \stackrel{I_{k,k+l}}{\to} G_n(\mathbb{R}^{n+k+l})$ mit $I_{k+l,k+l'} \circ I_{k,k+l} = I_{k,k+l'}$ für alle $l \leq l' \in \mathbb{N}$.

2. Die Abbildung $G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \longrightarrow G_k(\mathbb{R}^{n+k})$, $V \longmapsto V^\perp$, definiert einen Diffeomorphismus; diese Abbildung entspricht der Konjugation in $\mathrm{O}(n+k)$ mit dem Element aus $\mathrm{O}(n+k)$, welches $\mathbb{R}^n \times \{0_{\mathbb{R}^k}\}$ auf $\{0_{\mathbb{R}^k}\} \times \mathbb{R}^n$ und $\{0_{\mathbb{R}^n}\} \times \mathbb{R}^k$ auf $\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ kanonisch abbildet.

3. Für $n = 1$ ist $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ die Menge aller linearen Geraden im $\mathbb{R}^{k+1}$, d.h., $G_1(\mathbb{R}^{k+1})$ ist der $k$-dimensionale reelle projektive Raum.

## 1.2 Das kanonische Vektorbündel über $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$

**Definition 1.4** *Für $n, k \in \mathbb{N}$ ist das* kanonische Bündel über $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ *das Tripel $(\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}), \pi, G_n(\mathbb{R}^{n+k}))$, wobei*

$$\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}) := \{(V, v) \in G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \times \mathbb{R}^{n+k} \,|\, v \in V\}$$

*und $\pi : \gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}) \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^{n+k})$, $(V, v) \longmapsto V$.*

Es heißt auch nicht zufällig Vektorbündel:

**Proposition 1.5** *Das kanonische Bündel über $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ trägt die Struktur eines glatten $n$-rangigen reellen Vektorbündels über $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$.*

*Beweis*: Nach Proposition 1.2 ist $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ diffeomorph zum homogenen Raum ${}^{\mathrm{O}(n+k)}/_{\mathrm{O}(n)\times\mathrm{O}(k)}$. Die Lie-Gruppe $\mathrm{O}(n+k)$ kann daher als $(\mathrm{O}(n)\times\mathrm{O}(k))$-Hauptfaserbündel über $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ aufgefasst werden [1, Bsp. 2.6]. Nun betrachte die lineare Lie-Gruppen-Darstellung $\delta : \mathrm{O}(n)\times\mathrm{O}(k) \longrightarrow \mathrm{GL}(n)$, $(A, B) \mapsto A$. Nach [1, Satz 2.7] trägt der zur Rechtswirkung

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{O}(n+k)\times\mathbb{R}^n)\times(\mathrm{O}(n)\times\mathrm{O}(k)) & \longrightarrow & \mathrm{O}(n+k)\times\mathbb{R}^n \\ ((A,v),h) & \longmapsto & (Ah, \delta(h^{-1})(v)) \end{array}$$

gehörige Quotient die Struktur eines glatten $n$-rangigen reellen Vektorbündels ${}^{\mathrm{O}(n+k)\times\mathbb{R}^n}/_{\mathrm{O}(n)\times\mathrm{O}(k)} \xrightarrow{\pi'} G_n(\mathbb{R}^{n+k})$. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \Phi : {}^{\mathrm{O}(n+k)\times\mathbb{R}^n}/_{\mathrm{O}(n)\times\mathrm{O}(k)} & \longrightarrow & \gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}) \\ [(A,v)] & \longmapsto & (A(\mathbb{R}^n\times\{0_{\mathbb{R}^k}\}), A(v)) \end{array}$$

ist dann wohldefiniert, bijektiv und "faserweise linear" $(p_2\circ\Phi([(A,\lambda v+\mu w)]) = \lambda p_2\circ\Phi([(A,v)]) + \mu p_2\circ\Phi([(A,w)]))$ mit $\pi\circ\Phi = \phi\circ\pi'$. Insbesondere induziert das Paar $(\Phi,\phi)$ auf $(\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}), \pi, G_n(\mathbb{R}^{n+k}))$ eine eindeutige Struktur eines glatten $n$-rangigen reellen Vektorbündels über $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ so, dass $(\Phi,\phi)$ ein Vektorbündelisomorphismus ist. $\square$

**Bemerkung 1.6** Für $k, l, n \in \mathbb{N}$ sei $I_{k,k+l}$ die in Bemerkung 1.3.1 definierte Einbettung $G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to G_n(\mathbb{R}^{n+k+l})$. Dann induziert $I_{k,k+l}$ einen Vektorbündelhomomorphismus $\tilde{I}_{k,k+l} : \gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}) \to \gamma^n(\mathbb{R}^{n+k+l})$ (mit $\pi\circ\tilde{I}_{k,k+l} = I_{k,k+l}\circ\pi$), welcher faserweise bijektiv ist *(Übungsaufgabe)*. Daraus folgt insbesondere $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}) \overset{\tilde{I}_{k,k+l}}{\cong} I^*_{k,k+l}(\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k+l}))$. Außerdem gilt $\tilde{I}_{k+l,k+l'}\circ\tilde{I}_{k,k+l} = \tilde{I}_{k,k+l'}$ für alle $l \leq l' \in \mathbb{N}$ *(Übungsaufgabe)*.

# 2 Unendliche Graßmann'sche und universelle Bündel

Von hier aus wird mit $\mathbb{R}^\infty$ die direkte Summe $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ bezeichnet. Alternativ kann $\mathbb{R}^\infty$ als (unendlich dimensionaler) reeller Vektorraum der endlich getragenen reellen Folgen angesehen werden.

## 2.1 Die unendliche Graßmann'sche $G_n(\mathbb{R}^\infty)$

**Definition 2.1** *Für* $n \in \mathbb{N}$ *wird die* unendliche Graßmann'sche der $n$-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{R}^\infty$ *definiert als*

$$G_n(\mathbb{R}^\infty) := \{V \subset \mathbb{R}^\infty \,|\, V \text{ } n\text{-dim. Untervektorraum}\}.$$

Jedes $\mathbb{R}^k$ lässt sich auf kanonische Weise in den $\mathbb{R}^\infty$ linear einbetten: die Abbildung $\iota_k : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$, $x \mapsto (x, 0, 0, \ldots)$ ist linear und injektiv. Auf triviale Weise gilt $\iota_{k+l} \circ \iota_{k,k+l} = \iota_k$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$. Damit induzieren die $\iota_k$'s injektive Abbildungen $G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \xrightarrow{I_k} G_n(\mathbb{R}^\infty)$ mit $I_{k+l} \circ I_{k,k+l} = I_k$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$. Nach der Definition von $\mathbb{R}^\infty$ gilt außerdem $G_n(\mathbb{R}^\infty) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k(G_n(\mathbb{R}^{n+k}))$. Die von der Familie $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ induzierte Bildtopologie definiert eine Topologie auf $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ so, dass alle $I_k$'s stetig sind (sie ist sogar die feinste Topologie auf $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ mit dieser Eigenschaft). Konkret: eine Teilmenge $U \subset G_n(\mathbb{R}^\infty)$ ist genau dann offen, wenn $I_k^{-1}(G_n(\mathbb{R}^\infty))$ offen in $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ist für *alle* $k \in \mathbb{N}$. Der Raum $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ ist somit der sogenannte *direkte topologische Limes* der Folge $(G_n(\mathbb{R}^{n+k}))_{k\in\mathbb{N}}$.

**Bemerkung 2.2** Es kann elementar bewiesen werden, dass der mit dieser Topologie versehene Raum $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ als direkter Limes einer Folge von kompakten (Hausdorff'schen) topologischen Räumen selber *parakompakt* ist (d.h., $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ ist Hausdorff'sch und jede offene Überdeckung von $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ besitzt eine lokal-endliche Verfeinerung), siehe [3, Cor. p.66]. Um aber eine (topologische bzw. glatte) *Mannigfaltigkeit*-Struktur auf $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ zu definieren so, dass alle $I_k$'s (stetige bzw. glatte) Einbettungen sind, müssten wir Begriffe aus der unendlichdimensionalen Differentialgeometrie einführen, was uns zu weit treiben würde. Deswegen betrachten wir $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ weiterhin lediglich als parakompakten topologischen Raum.

## 2.2 Das universelle Bündel über $G_n(\mathbb{R}^\infty)$

Analog wie bei $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ wird ein Bündel auf kanonische Weise auf $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ definiert.

**Definition 2.3** *Für* $n \in \mathbb{N}$ *ist das* universelle Bündel über $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ *das Tripel* $(\gamma^n(\mathbb{R}^\infty), \pi, G_n(\mathbb{R}^\infty))$, *wobei*

$$\gamma^n(\mathbb{R}^\infty) := \{(V, v) \in G_n(\mathbb{R}^\infty) \times \mathbb{R}^\infty \,|\, v \in V\}$$

*und* $\pi : \gamma^n(\mathbb{R}^\infty) \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty)$, $(V, v) \longmapsto V$.

Und wie bei $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ist das universelle Bündel ein Vektorbündel:

**Proposition 2.4** *Das universelle Bündel über $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ trägt die Struktur eines stetigen $n$-rangigen reellen Vektorbündels über $G_n(\mathbb{R}^\infty)$.*

Zur Erinnerung ist ein *stetiges* reelles $n$-rangiges Vektorbündel über einem *topologischen* Raum $B$ ein Tripel $(E, \pi, B)$, wobei $E$ ein topologischer Raum ist und $\pi : E \longrightarrow B$ eine stetige Abbildung mit lokalen stetigen Trivialisierungen: zu jedem Punkt $b \in B$ existieren eine Umgebung $U_b$ von $b$ und ein Homöomorphismus $\pi^{-1}(U_b) \xrightarrow{\phi_b} U_b \times \mathbb{R}^n$ so, dass $p_1 \circ \phi_b = \pi$ (wobei $p_1$ die erste Projektion $U_b \times \mathbb{R}^n \to U_b$ ist) und, falls $U_b \cap U_{b'} \neq \varnothing$, die Abbildung $\phi_b \circ \phi_{b'}^{-1} : (U_b \cap U_{b'}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow (U_b \cap U_{b'}) \times \mathbb{R}^n$ der Form $(x, v) \mapsto (x, a_{bb'}(x)(v))$ ist für eine stetige Abbildung $a_{bb'} : U_b \cap U_{b'} \to \mathrm{GL}(n)$. Insbesondere trägt jede Faser $E_b := \pi^{-1}(\{b\})$ die Struktur eines $n$-dimensionalen reellen Vektorraumes.

*Beweis von* Proposition 2.4: Zu bemerken ist, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Abbildung $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}) \xrightarrow{\tilde{I}_k} \gamma^n(\mathbb{R}^\infty)$ existiert, die mit den entsprechenden Projektionen kommutiert ($\pi \circ \tilde{I}_k = I_k \circ \pi$) und die faserweise ein linearer Isomorphismus ist mit $\tilde{I}_{k+l} \circ \tilde{I}_{k,k+l} = \tilde{I}_k$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$. Zusammen mit der Beziehung $\tilde{I}_{k+l,k+l'} \circ \tilde{I}_{k,k+l} = \tilde{I}_{k,k+l'}$ folgt, dass $(\gamma^n(\mathbb{R}^\infty), \pi, G_n(\mathbb{R}^\infty))$ als direkter Limes der Familie $\{(\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}), \pi, G_n(\mathbb{R}^{n+k}))\}_{k\in\mathbb{N}}$ aufgefasst werden kann. Die Vektorbündelstruktur auf $(\gamma^n(\mathbb{R}^\infty), \pi, G_n(\mathbb{R}^\infty))$ ergibt sich aus diesen Tatsachen, siehe auch [3, pp. 64-65] für eine explizite Beschreibung der lokalen Trivialisierungen. □

# 3 Hauptergebnisse

In diesem Abschnitt erklären wir, warum $(\gamma^n(\mathbb{R}^\infty), \pi, G_n(\mathbb{R}^\infty))$ als "universell" bezeichnet wird.

## 3.1 Einbettung von Vektorbündeln in das universelle Bündel

**Satz 3.1** *Sei $(E, \pi, B)$ ein $n$-rangiges stetiges reelles Vektorbündel über einem parakompakten topologischen Raum. Dann existiert ein stetiger Vektorbündelhomomorphismus $(F, f)$ von $(E, \pi, B)$ nach $(\gamma^n(\mathbb{R}^\infty), \pi, G_n(\mathbb{R}^\infty))$, welcher faserweise ein Isomorphismus ist. Insbesondere ist $(E, \pi, B)$ isomorph zu $(f^*\gamma^n(\mathbb{R}^\infty), \pi \circ F, B)$.*

*Beweis*: Zu finden ist eine stetige Abbildung $\hat{f} : E \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$, deren Einschränkung auf jeder Faser ein linearer injektiver Homomorphismus ist. Dabei ist die Topologie auf $\mathbb{R}^\infty$ die von der Familie $(\iota_k)_{k\in\mathbb{N}}$ induzierte Bildtopologie und stimmt mit der vom euklidischen Skalarprodukt $\langle u, v\rangle := \sum_{k=0}^{\infty} u_k v_k$ induzierten Topologie überein. Mit Hilfe von diesem $\hat{f}$ kann das Paar $(F, f)$ definiert werden durch: $f(b) := \hat{f}(E_b)$ und $F(v) := (\hat{f}(E_{\pi(v)}), \hat{f}(v))$ für alle $v \in E_b$ und $b \in B$. Es ist elementar, zu überprüfen, dass $(F, f)$ den gesuchten stetigen Vektorbündelhomomorphismus liefert.
*Konstruktion von* $\hat{f}$: Wegen $B$ parakompakt existiert eine lokal endliche *abzählbare* offene Überdeckung $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ von $B$, die erfüllt: für jedes $p \in \mathbb{N}$ existiert ein Homöomorphismus $\pi^{-1}(U_p) \xrightarrow{\phi_p} U_p \times \mathbb{R}^n$ mit $p_1 \circ \phi_p = \pi$ und $\phi_{p'} \circ \phi_p^{-1}$ ist faserweise linear (im Sinne der Definition oben) für alle $p, p'$ mit $U_p \cap U_{p'} \neq \varnothing$. Die Existenz einer solchen Überdeckung wird in [3, Lemma 5.9] bewiesen. Für jedes $p \in \mathbb{N}$ betrachte die injektive lineare Abbildung $\mathcal{I}_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$, $v \longmapsto (0_{\mathbb{R}^{np}}, v, 0, 0, \ldots)$. Wähle nun eine zu $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ gehörige stetige Teilung der Eins $(\chi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ und definiere

$$\hat{f} : E \longrightarrow \mathbb{R}^\infty, \qquad v \longmapsto \sum_{p\in\mathbb{N}} \chi_p(\pi(v)) \cdot \mathcal{I}_p \circ p_2 \circ \phi_p(v).$$

Hierbei ist $\phi_p(v)$ per Konvention $0 \in \mathbb{R}^\infty$, sobald $\pi(v) \notin U_p$. Beachte, dass wegen $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ lokal endlich die Abbildung $\hat{f}$ wohldefiniert und stetig ist. Für alle $b \in B$ ist $\hat{f}_{|_{E_b}}$ per Definition linear und wegen der Injektivität von allen $p_2 \circ \phi_p$ und der Beziehung $\mathcal{I}_p(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{I}_{p'}(\mathbb{R}^n) = \{0\} \subset \mathbb{R}^\infty$ für alle $p \neq p'$ auch injektiv. □

**Bemerkungen 3.2**

1. Im Fall, wo $(E, \pi, B)$ glatt ist, folgt das Ergebnis unmittelbar aus dem Whitney'schen Einbettungssatz [2]: bette den Totalraum von $TE \to E$ in ein $\mathbb{R}^m$ ein, schränke diese Einbettung auf das sogen. vertikale Untervektorbündel $\mathcal{V}E_{|_{s_0(B)}} \to s_0(B)$ von $TE$ entlang des Nullschnittes $s_0$ von $(E, \pi, B)$ ein und benutze die Tatsache, dass das Vektorbündel $\mathcal{V}E_{|_{s_0(B)}} \to s_0(B)$ isomorph zu $(E, \pi, B)$ ist.

2. Man beachte, dass die zum Vektorbündelhomomorphismus $(F, f)$ gehörige Abbildung $f : B \to G_n(\mathbb{R}^\infty)$ nicht notwendigerweise injektiv ist. Sei z.B. $B \subset \mathbb{R}^m$ eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$ und $E := TB \subset B \times \mathbb{R}^m$, dann können die Untervektorräume $T_b B$ und $T_{b'} B$ von $\mathbb{R}^m$ eventuell gleich sein ohne, dass $b = b'$ gilt (wähle beispielsweise $B := \mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ und $b' = -b$).

Satz 3.1 impliziert, dass *jedes* $n$-rangige reelle Vektorbündel vom universellen Bündel $\gamma^n(\mathbb{R}^\infty)$ induziert wird. Dies gilt schon als überraschend, weil selbst auf einer festen Basis $B$ durchaus viele "verschiedene" (zueinander nichtisomorphe) Vektorbündel existieren können. Andererseits existieren für ein festes Vektorbündel $(E, \pi, B)$ i.A. verschiedene solche faserweise injektive Vektorbündelhomomorphismen nach $(\gamma^n(\mathbb{R}^\infty), \pi, G_n(\mathbb{R}^\infty))$. Z.B. gibt es i.A. viele zueinander nichtkongruente Einbettungen einer festen glatten Mannigfaltigkeit $B$ in ein $\mathbb{R}^m$ (insbesondere in den $\mathbb{R}^\infty$), und jede dieser Einbettungen liefert jeweils einen "anderen" Vektorbündelhomomorphismus von $(TB, \pi, B)$ nach $(\gamma^n(\mathbb{R}^\infty), \pi, G_n(\mathbb{R}^\infty))$. Allerdings - und es ist vielleicht noch überraschender - wird jedes $n$-rangige reelle Vektorbündel auf *eindeutige* Weise vom universellen Bündel $\gamma^n(\mathbb{R}^\infty)$ induziert. Dies ist der Gegenstand des nächsten Abschnitts.

## 3.2 Eindeutigkeit der Einbettung bis auf Homotopie

Dazu soll noch erläutert werden, was "eindeutig" heißt.

**Definition 3.3** *Sei $(E, \pi, B)$ ein $n$-rangiges reelles Vektorbündel über einem parakompakten topologischen Raum. Zwei faserweise bijektive Vektorbündelhomomorphismen $(F_0, f_0)$, $(F_1, f_1)$ von $(E, \pi, B)$ nach $(\gamma^n(\mathbb{R}^\infty), \pi, G_n(\mathbb{R}^\infty))$ heißen genau dann* bündelhomotop *zueinander, wenn es ein Paar $(H, h)$ von stetigen Abbildungen $E \times [0,1] \xrightarrow{H} \gamma^n(\mathbb{R}^\infty)$, $B \times [0,1] \xrightarrow{h} G_n(\mathbb{R}^\infty)$ gibt so, dass $\pi \circ H = h \circ (\pi \times \mathrm{id})$ gilt und $H(\cdot, t) : E \longrightarrow \gamma^n(\mathbb{R}^\infty)$ ein faserweise bijektiver Vektorbündelhomomorphismus ist für alle $t \in [0,1]$ mit $H(\cdot, 0) = F_0$ und $H(\cdot, 1) = F_1$.*

Beachte, dass insbesondere $h$ eine Homotopie zwischen $f_0$ und $f_1$ definiert. Die Bündelhomotopie definiert trivialerweise eine Äquivalenzrelation auf der Menge der faserweise bijektiven Vektorbündelhomomorphismen von einem festen $n$-rangigen reellen Vektorbündel $(E, \pi, B)$ nach $(\gamma^n(\mathbb{R}^\infty), \pi, G_n(\mathbb{R}^\infty))$.

**Satz 3.4** *Sei $(E, \pi, B)$ ein $n$-rangiges reelles Vektorbündel über einem parakompakten topologischen Raum und $(F_0, f_0)$, $(F_1, f_1)$ zwei faserweise bijektive Vektorbündelhomomorphismen von $(E, \pi, B)$ nach $(\gamma^n(\mathbb{R}^\infty), \pi, G_n(\mathbb{R}^\infty))$. Dann sind $(F_0, f_0)$, $(F_1, f_1)$ bündelhomotop zueinander.*

*Beweis*: Die Vektorbündelhomomorphismen $(F_0, f_0)$ und $(F_1, f_1)$ induzieren stetige Abbildungen $\hat{f}_i : E \to \mathbb{R}^\infty$, $v \mapsto p_2 \circ F_i(v)$, $i = 0, 1$, deren Einschränkung auf jeder Faser von $(E, \pi, B)$ linear und injektiv ist.

*1. Fall:* Gilt $\mathrm{Ker}((\hat{f}_0 + \lambda\hat{f}_1)_{|E_b}) = \{0_b\}$ für alle $b \in B$ und $\lambda \in [0,\infty[$, so definiert

$$\hat{H} : E \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^\infty, \qquad (t,v) \longmapsto (1-t)\hat{f}_0(v) + t\hat{f}_1(v)$$

eine stetige Abbildung, für die $H(\cdot,t)_{|E_b}$ injektiv und linear ist für alle $b \in B$ und $t \in [0,1]$ mit $\hat{H}(\cdot,i) = \hat{f}_i$ für alle $i \in \{0,1\}$. Wie im Beweis von Satz 3.1 definiert dann $H(v,t) := (\hat{H}(E_{\pi(v)},t), \hat{H}(v,t))$, $h(b,t) := \hat{H}(E_b,t)$ die gesuchte Bündelhomotopie zwischen $(F_0,f_0)$ und $(F_1,f_1)$.
*2. Fall:* Seien nun $(F_0,f_0)$ und $(F_1,f_1)$ allgemein. Definiere die faserweise bijektiven Vektorbündelhomomorphismen $(\tau_i,t_i)$ von $(\gamma(\mathbb{R}^\infty),\pi,G_n(\mathbb{R}^\infty))$ nach $(\gamma(\mathbb{R}^\infty),\pi,G_n(\mathbb{R}^\infty))$, $i=0,1$, durch

$$v = \sum_{k\in\mathbb{N}} v_k e_k \overset{\hat{\tau}_i}{\longmapsto} \sum_{k\in\mathbb{N}} v_k e_{2k+i+1},$$

wobei $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^\infty$ ist *(Übungsaufgabe: zeige, dass die $\hat{\tau}_i$'s wohl faserweise bijektive Vektorbündelhomomorphismen definieren).* Wegen $\hat{\tau}_i(v) + \lambda v \neq 0$ für alle $0 \neq v \in \mathbb{R}^\infty$ und $\lambda \in [0,\infty[$ sind $(F_i,f_i)$ und $(\tau_i \circ F_i, t_i \circ f_i)$ bündelhomotop zueinander für alle $i=0,1$. Nach Definition der $\tau_i$'s liefert der 1. Fall die Bündelhomotopieäquivalenz zwischen $(\tau_0 \circ F_0, t_0 \circ f_0)$ und $(\tau_1 \circ F_1, t_1 \circ f_1)$. $\square$

Als Folgerung von Satz 3.1 und Satz 3.4 bekommen wir das

**Korollar 3.5** *Jedes $n$-rangige reelle Vektorbündel $(E,\pi,B)$ über einem parakompakten topologischen Raum $B$ definiert ein eindeutiges Element in der Menge $[B,G_n(\mathbb{R}^\infty)]$, d.h., eine eindeutige Homotopieklasse von stetigen Abbildungen $B \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty)$.*

# Literatur

[1] H. Baum, *Eichfeldtheorie. Eine Einführung in die Differentialgeometrie auf Faserbündeln*, Springer-Verlag Berlin, 2009.

[2] T. Bröcker, K. Jänich, *Einführung in die Differentialtopologie*, Heidelberger Taschenbücher **143**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[3] J. W. Milnor, J.D. Stasheff, *Characteristic classes*, Annals of Mathematics Studies **76**, Princeton University Press, 1974.