Programm des Seminars über hyperbolische Geometrie im Sommersemester 2013

Prof. Dr. Bernd Ammann, Dr. Nicolas Ginoux

18. Januar 2013

Zusammenfassung. Die hyperbolische Geometrie ist die Geometrie der hyperbolischen Ebene, welche als Ebene vorgestellt werden kann, in der aber bestimmte Eigenschaften der euklidischen Ebene nicht mehr erfüllt sind - u.a. die Eindeutigkeit einer Parallelen durch einen gegebenen Punkt oder die Tatsache, dass die Winkelsumme eines Dreiecks π ergibt. Im 19. Jahrhundert von Gauß, Bolyai und Lobatschewski entdeckt hat sich die hyperbolische Geometrie zu einem wichtigen Bereich der Mathematik entwickelt, welcher mit der axiomatischen Geometrie, der Differentialgeometrie, der Gruppentheorie und der Topologie zusammenhängt. In diesem Seminar führen wir drei konkrete Modelle für die hyperbolische Ebene ein und untersuchen ihre Geometrie (Geraden, Abstand, Transformationsgruppe, Trigonometrie usw.) mit Hilfe von ganz elementaren Methoden aus der Analysis und der linearen Algebra.

Jeder Abschnitt unten entspricht einem 90-minütigen Vortrag. Man beachte, dass der **2. Auflage** des Buches von J.W. Anderson [1] gefolgt wird, welche sich von der 1. wesentlich unterscheidet.

1 Das Halbebenenmodell und die riemannsche Sphäre

[1, Abschn. 1.1-1.2], S. 1–14. Definition von $\mathbb{H}$, hyperbolische Geraden, parallele Geraden, Existenz und Eindeutigkeit von Parallelen (Zusammenhang mit dem Parallelenaxiom der euklidischen Geometrie); stereografische Projektion, riemannsche Sphäre $\overline{\mathbb{C}}$, offene und abgeschlossene Teilmengen von $\overline{\mathbb{C}}$, verallgemeinerte Kreise in $\overline{\mathbb{C}}$.

2 Möbiustransformationen I

[1, Abschn. 1.2-1.3 & 2.1], S. 15–30. Stetige Abbildungen in $\overline{\mathbb{C}}$, Homöomorphismen von $\overline{\mathbb{C}}$; Rand am Unendlichen von $\mathbb{H}$, verbindbare und unverbindbare hyperbolische Geraden; kreiserhaltende Homöomorphismen von $\overline{\mathbb{C}}$, Möbiustransformationen, Möbiusgruppe, Fixpunkte einer Möbiustransformation.

3 Möbiustransformationen II

[1, Abschn. 2.2-2.4], S. 30–42. Gruppenwirkung, transitive/einfach transitive Gruppenwirkung, Transitivität der Wirkung der Möbiusgruppe auf Punktetripel bzw. Kreise, Scheiben in $\overline{\mathbb{C}}$; Doppelverhältnis, Charakterisierung der verallgemeinerten Kreise mittels Doppelverhältnis; multiplizierender Faktor einer Möbiustransformation, parabolische, elliptische und loxodromische Transformationen.

4 Möbiustransformationen III

[1, Abschn. 2.5-2.7], S. 42–56. Normalisierung einer Möbiustransformation, Funktion τ, Klassifikation der Möbiustransformationen mittels τ, Isomorphismus zwischen der Möbiusgruppe und der Gruppe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ bzw. $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$; (Kreis-)Spiegelungen in $\overline{\mathbb{C}}$, verallgemeinerte Möbiusgruppe, Darstellung einer Möbiustransformation als Produkt endlich vieler Spiegelungen, Übereinstimmung der verallgemeinerten Möbiusgruppe mit der Gruppe der kreiserhaltenden Homöomorphismen von $\overline{\mathbb{C}}$; konforme Transformationen, Möbiustransformationen sind konform.

5 Die Möbiusgruppe des Halbebenenmodells

[1, Abschn. 2.8-2.10], S. 56–72. Gruppe Möb(A) für eine Teilmenge $A \subset \overline{\mathbb{C}}$, Darstellung von Elementen von Möb($\overline{\mathbb{R}}$) und Möb($\mathbb{H}$); Transitivität der Wirkung von Möb($\mathbb{H}$) auf $\mathbb{H}$ bzw. auf hyperbolische Geraden, offene Halbebenen; Fixpunkte der Elemente aus $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$, Klassifikation der Elemente von $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ nach Anzahl der Fixpunkte; Gleitspiegelungen, Klassifikation der Elemente von $\text{Möb}(\mathbb{H}) \setminus \text{Möb}^+(\mathbb{H})$.

6 Wege und Längen

[1, Abschn. 3.1-3.2], S. 73–88. Wege, Kurven, Länge einer Kurve, Parametrisierungen, einfache Wege, einfach geschlossene Kurven; Differenzierbarkeit und Holomorphie von Möbiustransformationen, Länge einer Kurve in $\mathbb{H}$, Invarianz der Länge unter Möbiustransformationen.

7 Die hyperbolische Ebene als metrischer Raum

[1, Abschn. 3.3-3.5], S. 88–103. Metrische Räume, Konvergenz und Stetigkeit in einem metrischen Raum, Zusammenhang mit Kurvenlänge; hyperbolischer Abstand $d_{\mathbb{H}}$, Darstellung als Länge der hyperbolischen Geradenstrecke zwischen zwei Punkten, Abstand zum Rand am Unendlichen; Formel(n) für $d_{\mathbb{H}}$, Transitivität der Wirkung von Möb($\mathbb{H}$) auf Punktepaare.

8 Hyperbolische Isometrien

[1, Abschn. 3.6-3.7], S. 103–115. Isometrien eines metrischen Raumes, die Gruppe $\text{Isom}(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ der Isometrien von $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ stimmt mit Möb($\mathbb{H}$) überein; beschränkte und kompakte Teilmengen von $\mathbb{H}$, Charakterisierung der verbindbaren/unverbindbaren hyperbolischen Geraden mittels $d_{\mathbb{H}}$, Zusammenhang mit der Existenz eines gemeinsamen Lotes, Äquivalenzrelation auf der Menge der hyperbolischen Halbgeraden und Rand am Unendlichen, visuelles Maß.

9 Das Poincaré-Scheibenmodell

[1, Abschn. 4.1], S. 117–129. Punktemenge $\mathbb{D}$, hyperbolische Geraden in $\mathbb{D}$, Identifizierung von $\mathbb{D}$ mit $\mathbb{H}$ mittels einer Möbiustransformation, Länge einer Kurve in $\mathbb{D}$, hyperbolischer Abstand $d_{\mathbb{D}}$, Isometriegruppe von $(\mathbb{D}, d_{\mathbb{D}})$, Rand am Unendlichen, hyperbolische Kreise.

10 Das Hyperboloid-Modell

[1, Abschn. 6.1], S. 189–208. Quadratische Formen auf $\mathbb{R}^3$, ausgeartete/nicht ausgeartete, positivdefinite/negativdefinite/indefinite quadratische Formen, Invarianzgruppe einer nichtausgearteten quadratischen Form, quadratische Form Q, Niveaumengen von Q, Hyperboloid $\mathbb{U}$, Länge einer Kurve in $\mathbb{U}$, Invarianzgruppe von Q, hyperbolische Geraden, hyperbolischer Abstand $d_{\mathbb{U}}$, hyperbolische Isometrien.

11 Konvexität

[1, Abschn. 5.1-5.2], S. 145–164. Konvexe Teilmengen von $\mathbb{H}$, Beispiele, Orthogonalprojektion auf eine konvexe Teilmenge, konvexe Hülle einer Teilmenge, Darstellung einer konvexen Teilmenge als Durchschnitt endlich vieler Halbebenen; hyperbolische Polygone, Seiten und innere Winkel eines Polygons, reguläre Polygone.

12 Hyperbolischer Flächeninhalt und Satz von Gauß-Bonnet

[1, Abschn. 5.3-5.4], S. 164–174. Hyperbolischer Flächeninhalt, Invarianz des hyperbolischen Flächeninhalts unter Möb($\mathbb{H}$), isoperimetrische Ungleichung (ohne Beweis); Satz von Gauß-Bonnet für hyperbolische Dreiecke bzw. Polygone.

13 Anwendungen des Satzes von Gauß-Bonnet und Trigonometrie

[1, Abschn. 5.5-5.6], S. 174–187. Anwendungen des Satzes von Gauß-Bonnet: Existenz eines (regulären) hyperbolischen Polygons mit vorgeschriebenem(n) innerem(n) Winkel(n), konforme Transformationen von $\mathbb{H}$ sind bereits Isometrien; Trigonometrie in hyperbolischen Dreiecken.

Literatur

[1] J.W. Anderson, *Hyperbolic geometry*, 2. Auflage, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2005.