Programm des Seminars zum h-Kobordismus-Satz im WS 2011/12

Prof. Dr. Bernd Ammann, Prof. Dr. Roman Sauer, Nicolas Ginoux

31. Januar 2012

Zusammenfassung

Ein Bordismus ist eine (differenzierbare) kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand W, so dass ∂W die disjunkte Vereinigung von zwei Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 ist. Ziel des Seminars sind verschiedene Grundlagen aus der Theorie dieser Bordismen. Das Programm setzt sich aus im wesentlichen drei Teilen zusammen. Im ersten Teil betrachten wir die Thom-Konstruktion. Im dritten Teil betrachten wir Sphären mit exotischer differenzierbarer Struktur.

I. Thom-Konstruktion

Wir werden sehen, dass Bordismen-Gruppen isomorph zu Homotopie-Gruppen von geeigneten Räumen sind. Hauptreferenz hierbei sind ausgewählte Teile von [15], aber auch andere Quellen. Die Vorträge dienen auch dazu, die Grundlagen für das ganze Seminar zu legen.

Vortrag 1. Klassifizierende Räume und CW-Komplexe
Graßmann-Mannigfaltigkeiten (orientiert, unorientiert), unendliche Graßmannsche, universelle Bündel, klassifizierende Abbildungen, CW-Komplexe und Satz von Whitehead (evtl. Beweise weglassen) [3, 346-348], CW-Struktur der Graßmannschen.
Literatur: [15, S. 55-68], [4, S.27-34].

Vortrag 2. Thom-Isomorphismus, Gysin-Sequenz
Thom-Isomorphismus [15, S.105-114], Gysin-Sequenz [15, S.143-145], Orientierte universelle Bündel [15, S.145-146]. Falls es die Zeit erlaubt, sollten vielleicht auch schon höhere Homotopie-Gruppen diskutiert werden, um Vortrag 5 zu entlasten.

Vortrag 3. Charakteristische Klassen: Chern-, Pontrjagin- und Stiefel-Whitney-Klassen
Kohomologie von BU über $\mathbb{Z}$, Chern-Klassen, charakteristische Zahlen.
Danach skizzieren, welche Modifikationen für Pontrjagin- und Stiefel-Whitney-Klassen nötig sind (Kohomologie von BO, BSO über $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}_2$, Pontrjagin-Klassen, Stiefel-Whitney-Klassen, charakteristische Zahlen.)
Literatur: [4, S.73-83], [4, S.88-90], [15, S.173-195].

Vortrag 4. Satz von Whitney, Homotopie und Isotopie
Dieser Vortrag soll vor allem einen Überblick über wichtige Resultate der Differentialtopologie geben, vor allem in Hinblick auf die Anwendungen im folgenden Vortrag. Satz von Brown-Sard, Whitneyscher Einbettungssatz für kompakte Mannigfaltigkeiten, reguläre Homotopie, Isotopie, Transversalitätssatz, evtl.[1] Einbettungen von Isotopien in Diffeotopien [2, Def 9.4].
Literatur: [12], [5], [2], [1, Sec. II.10]

Vortrag 5. Die Pontrjagin-Thom Konstruktion und Kobordismus-Gruppen
Höhere Homotopiegruppen, Thom-Räume, Satz von Hurewicz, Kohomologie und Homotopiegruppen der Thom-Räume modulo Torsion, Homotopie-Beschreibung der Kobordismen-Gruppen (orientiert, unorientiert, evtl. gerahmt).
Literatur: [3, S.340-346], [15, S.205-217], [15, Sec. 17], [13, Sec. 1].
Die gerahmte Version ist in [12, Kap. 7] zu finden.

[1]"evtl" bedeutet: sehr nützlich, falls noch Zeit bleibt.

II. Der h-Kobordismus-Satz

Angenommen die Inklusionen $M_1 \to W$ und $M_2 \to W$ sind Homotopie-Äquivalenzen, wobei M_1, M_2 und W einfach zusammenhängend sind mit $\dim(W) \geq 6$. Der h-Kobordismus-Satz besagt, dass dann W diffeomorph zu einem Zylinder $M_1 \times [0, 1]$ ist. Wir wollen diesen Satz beweisen.
Wir zeigen auch wichtige Anwendungen, unter anderem die Poincaré-Vermutung in höheren Dimensionen: Jede einfach zusammenhängende kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit ohne Rand der Dimension $n \geq 5$ mit der ganzzahligen Homologie einer Sphäre ist bereits homöomorph zu einer Sphäre. Man erhält sogar Diffeomorphie im Fall $n = 5$ und $n = 6$, aber es gibt Mannigfaltigkeiten die zwar homöomorph, aber nicht diffeomorph zu einer Sphäre der Dimension 7 sind. Weitere interessante Anwendungen findet man im Kapitel 9 des Buches von Milnor [13]. Eine der wichtigsten Methoden des Buches ist, Morse-Funktionen auf dem Bordismus zu vereinfachen.
Derartige Techniken sind zum Beispiel auch wichtig, um zu zeigen, dass jede einfach zusammenhängende kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit ohne Rand der Dimension $n \geq 5$ genau dann eine riemannsche Metrik mit positiver Skalarkrümmung trägt, wenn es keine indextheoretische Obstruktion gibt. (Dies ist aber nicht Bestandteil des Seminars).
Dieser Teil folgt sehr eng dem Buch [13], siehe auch [8].

Vortrag 6. Elementare Kobordismen
Morse-Funktionen auf Mannigfaltigkeiten mit Rand, Aufteilung von Kobordismen in elementare Kobordismen, Umordnung von elementaren Kobordismen.
Literatur: [13, Sec. 2-4], [7, Sec. VII.1-2], [15, Abschn. 17]. Ergänzende Literatur: [11].
Dieser Vortrag sollte in zwei gespaltet werden!

Vortrag 7. Ein Kürzungssatz
Es wird ein Satz vorgestellt, der besagt, dass manchmal elementare Kobordismen von Index λ und $\lambda + 1$ sich gegenseitig annulieren.
Literatur: [13, Abschn.5].

Vortrag 8. Ein stärkerer Kürzungssatz
Dieselbe Konklusion gilt unter schwächeren Voraussetzungen.
Literatur: [13, Abschn. 6].

Vortrag 9. Kürzung in mittleren Dimensionen
Literatur: [13, Abschn.7].

Vortrag 10. Eliminierung in Dimension 0 und 1
Literatur: [13, Abschn.8].

Vortrag 11. Anwendungen des h-Kobordismus-Satzes
Literatur: [13, Abschn.9].

III. Exotische Sphären

Vorträge 12 und 13. Die Gruppe der Homotopie-Sphären
Literatur: [6]. Ergänzende Literatur: [8, 7, 14]

Literatur

[1] G.E. Bredon, *Topology and geometry*, Graduate Texts in Mathematics **139**, Springer, 1993.

[2] T. Bröcker, K. Jänich, *Einführung in die Differentialtopologie*, Springer, 1990.

[3] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002 available at `http://www.math.cornell.edu/~hatcher`.

[4] A. Hatcher, *Vector bundles and K-theory*, lecture notes, available at `http://www.math.cornell.edu/~hatcher`.

[5] M.W. Hirsch, *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics **33**, Springer, 1994.

[6] M. Kervaire, J. Milnor, *Groups of homotopy spheres I*, Ann. of Math. (2) **77** (1963), 504–537.

[7] A. Kosinski, *Differential manifolds*, Pure and Applied Mathematics **138**, Academic Press, 1993.

[8] W. Lück, *A basic introduction to surgery theory*, Topology of high-dimensional manifolds, no. 1, 2 (Trieste, 2001), 1–224, ICTP Lect. Notes **9**, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2002, available at `http://131.220.77.52/lueck/data/ictp.pdf`.

[9] H. Miller, *Notes on cobordism*, lecture notes, available at `http://www-math.mit.edu/~hrm/papers/cobordism.pdf`.

[10] J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the* 7*-sphere*, Ann. of Math. (2) **64** (1956), 399–405.

[11] J. Milnor, *Morse theory*, Princeton University Press, Princeton, 1963.

[12] J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.

[13] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton University Press, Princeton, 1965.

[14] J. Milnor, *Differential topology forty-six years later*, Notices Amer. Math. Soc. **58** (2011), no. 6, 804–809.

[15] J. Milnor, J.D. Stasheff, *Characteristic classes*, Annals of Mathematics Studies **76**, Princeton University Press, 1974.