Probeklausur zur Analysis II für Physiker

Universität Regensburg, Sommersemester 2012
Dr. Nicolas Ginoux / Dr. Mihaela Pilca

Bearbeitungszeit: 2 Stunden
Abgabe am 18.07.2012 bis 12 Uhr
Bitte **jedes Blatt** mit **Ihrem Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** versehen und alle Blätter zusammenheften.

Aufgabe 1 [4 Punkte]

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (keine Begründung erforderlich)

i) Jede regulär parametrisierte Kurve lässt sich nach Bogenlänge umparametrisieren.

ii) Der Durchschnitt einer beliebigen Familie abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

iii) Die Umkehrabbildung einer bijektiven stetigen Abbildung zwischen kompakten metrischen Räumen ist stetig.

iv) Falls alle ersten partiellen Ableitungen einer Abbildung an einer Stelle existieren, dann existieren auch alle Richtungsableitungen an dieser Stelle.

v) Das Kurvenintegral eines stetigen Vektorfeldes mit Potential längs einer geschlossenen Kurve hängt nicht von der Kurve ab.

vi) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $C^0([0,1],\mathbb{R})$, welche punktweise fast-überall konvergiert. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

vii) Die Lösungen einer beliebigen Differentialgleichung $y' = f(t,y)$ mit $f : I\times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig bilden immer einen Untervektorraum von $C^0(I,\mathbb{R}^n)$.

viii) Für eine C^∞ Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist jede Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t,y)$ auf $\mathbb{R}$ definiert.

Aufgabe 2 [4 Punkte]

Für eine nichtleere offene zusammenhängende Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung so, dass

$$|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x-y|^\alpha \tag{1}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt, für geeignete Konstanten $k, \alpha \in]0,\infty[$.

i) Angenommen, $\alpha > 1$. Zeigen Sie: eine Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ erfüllt genau dann (1), wenn f konstant ist.
(Hinweis: für die Hinrichtung zeige man, dass f differenzierbar ist und verschwindendes Differential in jedem Punkt hat.)

ii) Angenommen, $\alpha \leq 1$. Muss f dann differenzierbar sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 [4 Punkte]

i) Bestimmen Sie das Maximum der auf $\mathbb{R}^3$ definierten Funktion

$$f(x) := (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^2$$

auf der Einheitssphäre $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x|^2 = 1\}$.

ii) Folgern Sie daraus die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel positiver Zahlen $y_i > 0$, $1 \leq i \leq 3$:

$$\sqrt[3]{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3} \leq \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

(Hinweis: Wenden Sie die Ungleichung aus i) auf den Vektor $x = (x_1, x_2, x_3)$ mit $x_i := \sqrt{\frac{y_i}{y_1+y_2+y_3}}$, $1 \leq i \leq 3$, an.)

Aufgabe 4 [4 Punkte]

Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} = xyz$$

für (x, y) in einer offenen Umgebung von $(1, -1)$ eine eindeutige, stetig differenzierbare Lösung der Form $z = g(x, y)$ besitzt. Berechnen Sie $\nabla g(1, -1)$.

Aufgabe 5 [4 Punkte]

Sei $P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq y \leq \sin(x)\,,\, 0 \leq x \leq \frac{\pi(1-z)}{2}\,,\, 0 \leq z \leq 1\}$.

i) Skizzieren Sie P.

ii) Berechnen Sie das Volumen von P.

Aufgabe 6 [4 Punkte]

Für die Bewegung eines Teilchens mit der Ladung $q \neq 0$ und der Masse $m > 0$ in einem gekreuzten elektrischen Feld (in x-Richtung) und magnetischen Feld (in z-Richtung) gilt die dreidimensionale Bewegungsgleichung

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qE + qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x} \\ m\ddot{z} = 0, \end{cases}$$

wobei E und B nicht verschwindende reelle Konstanten sind. Finden Sie die Lösung mit dem Cauchy-Datum: $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$.