Musterlösung zur Nachklausur zur Analysis II für Physiker

Universität Regensburg, Sommersemester 2012
Dr. Nicolas Ginoux / Dr. Mihaela Pilca
4.10.2012

Aufgabe 1 [10 Punkte]

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind (keine Begründung erforderlich):

i) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge aus $C^0([0,1],\mathbb{R})$, welche punktweise fast-überall konvergiert. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

   WAHR: Satz über majorisierte Konvergenz (Satz 3.45 im Skript).

ii) Die Lösungen einer beliebigen homogenen linearen Differentialgleichung bilden immer einen endlich dimensionalen Vektorraum.

   WAHR: Korollar 4.17 im Skript.

iii) Jede exakte Differentialform ist geschlossen.

   WAHR: da $d^2 = 0$, siehe Proposition 5.38 im Skript.

iv) Ist $c \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Wert einer C^∞ Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^2$, so ist $f^{-1}(\{c\})$ eine $(n-2)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

   FALSCH: c muss ein regulärer Wert sein, damit die Aussage richtig ist. Ein Gegenbeispiel ist der Kegel mit Spitze, siehe Beispiel 5.7.4 im Skript.

v) Die Krümmungsfunktion einer regulär parametrisierten ebenen Kurve legt die Kurve eindeutig fest.

   FALSCH: Die Kurve ist nur bis auf eine orientierungserhaltende euklidische Bewegung bestimmt, nach dem Hauptsatz der Theorie der ebenen Kurven, siehe Satz 1.29 im Skript.

vi) Ist $f : [0,1] \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 Funktion, so gilt immer $\frac{d}{dt}\left(\int_0^1 f(x,t)dx\right) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$.

   WAHR: Korollar 3.57 im Skript.

vii) Jede auf einer abgeschlossenen beschränkten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ definierte stetige reellwertige Funktion besitzt ein Minimum und ein Maximum.

   WAHR: Korollar 2.32 (Maximum und Minimum einer Funktion auf einem kompakten Raum) und Satz 2.28 (Heine-Borel) im Skript.

viii) Die Differentialgleichung $y'' = -2y$ hat eine eindeutige Lösung y mit $y(0) = -1$.

   FALSCH: Die Lösung ist durch $y(0)$ *und* $y'(0)$ eindeutig bestimmt. Die allgemeine Lösung ist gegeben durch $y(t) = c_1\cos(\sqrt{2}t) + c_2\sin(\sqrt{2}t)$, mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Damit erfüllen alle Lösungen der Form $y(t) = -\cos(\sqrt{2}t) + c_2\sin(\sqrt{2}t)$, mit $c_2 \in \mathbb{R}$, die Bedingung $y(0) = -1$.

ix) Partielle Ableitungen nach verschiedenen Variablen können immer miteinander vertauscht werden.

FALSCH: siehe Bemerkung 2.84 im Skript.

x) Jedes auf $\mathbb{R}^3$ definierte wirbelfreie C^1 Vektorfeld besitzt ein Potential.

WAHR: Satz 2.104 (da $\mathbb{R}^3$ sternförmig ist) im Skript.

Aufgabe 2 [10 Punkte]

Für ein $\alpha \in]0,\infty[$ heißt eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann *homogen vom Grad* α, wenn

$$f(tx) = t^\alpha f(x)$$

für alle $t \in]0,\infty[$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt. Zeigen Sie: eine differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann homogen vom Grad α, wenn

$$\alpha f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt.

(Hinweis: für die Rückrichtung fixiere man $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und zeige, dass die Funktion $t \mapsto f(tx)$ die Differentialgleichung $y' = \frac{\alpha}{t} y$ auf dem Intervall $]0,\infty[$ löst.)

Lösung: Angenommen, f sei homogen vom Grad α. Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ beliebig. Dann gilt $f(tx) = t^\alpha f(x)$ für alle $t \in]0,\infty[$. Da f differenzierbar ist, ist die Funktion $]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(tx)$, ableitbar mit Ableitung gegeben durch (Kettenregel)

$$t \mapsto d_{tx} f(\frac{d}{dt}(tx)) = d_{tx} f(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) \cdot x_j.$$

Andererseits ist $t \mapsto t^\alpha f(x)$ ebenfalls ableitbar mit Ableitung $t \mapsto \alpha t^{\alpha-1} f(x)$. Da diese Ableitungen gleich sein müssen, folgt $\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) \cdot x_j = \alpha t^{\alpha-1} f(x)$. Setzt man $t = 1$ ein, so bekommt man die gesuchte Identität.
Sei umgekehrt die Identität $\alpha f(x) = \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ erfüllt. Für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ betrachten wir die Funktion $y :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $y(t) := f(tx)$. Wegen f differenzierbar ist y ableitbar mit Ableitung $y'(t) = d_{tx} f(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) \cdot x_j$ (siehe Rechnung oben). Wegen $t \neq 0$ kann die rechte Seite umgeschrieben werden: es gilt $\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) \cdot x_j = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) \cdot t x_j$. Mit der Voraussetzung folgt dann $\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) \cdot x_j = \frac{1}{t} \alpha f(tx) = \frac{\alpha}{t} y(t)$. Insbesondere erfüllt y die lineare Differentialgleichung $y' = \frac{\alpha}{t} y$ auf $]0,\infty[$. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist aber gegeben durch $t \mapsto C \cdot e^{\alpha \int^t \frac{dx}{x}} = C \cdot e^{\alpha \ln(t)} = C \cdot t^\alpha$, wobei $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Wegen $y(1) = f(x)$ folgt dann $y(t) = f(x) \cdot t^\alpha$ für alle $t \in]0,\infty[$. Insbesondere folgt $f(tx) = t^\alpha f(x)$, was zu zeigen war.

Aufgabe 3 [10 Punkte]

Man betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto x^2 + y^2 - xy - 2x + y$.

1. Zeigen Sie, dass f ein eindeutiges lokales Minimum besitzt.

2. Zeigen Sie, dass dieses lokale Minimum ein globales Minimum von f ist. *(Hinweis: leiten Sie aus einer Taylor-Formel folgende Identität her:*

$$f(x, y) + 1 = \frac{1}{2}\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}, H_f(1, 0) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \rangle$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, wobei $H_f(x, y)$ die Hesse-Matrix von f an der Stelle (x, y) bezeichnet; folgern Sie die Behauptung.)

Lösung:

1. Die Funktion f ist als Summe von C^∞ Funktionen C^∞ und es gilt für das Gradientenvektorfeld von f an einer beliebigen Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(\nabla f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y - 2 \\ 2y - x + 1 \end{pmatrix}.$$

Hat f ein lokales Extremum in (x, y), so muss nach der Vorlesung $(\nabla f)(x, y) = 0$ gelten, d.h.,

$$\begin{cases} 2x - y & = 2 \\ -x + 2y & = -1. \end{cases}$$

Dieses lineare Gleichungssytem besitzt eine eindeutige Lösung: $(x, y) = (1, 0)$. Der Punkt $(1, 0)$ ist also das einzige mögliche Extremum von f; insbesondere besitzt f höchstens ein Extremum. Desweiteren ist die Hesse-Matrix von f an der Stelle $(1, 0)$ gegeben durch

$$H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da diese (nach dem Satz von Schwarz symmetrische) Matrix positiv-definit ist (ihre Eigenwerte sind 1 und 3), folgt aus der Vorlesung, dass $(1, 0)$ ein lokales Minimum ist. Da f nur ein Extremum haben kann, besitzt f genau ein lokales Minimum.

2. Für ein beliebiges $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ schreiben wir die Differenz $f(x, y) - f(1, 0)$ mit Hilfe der Taylor-Formeln. Wir haben schon $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 0$ bewiesen und kennen die Hesse-Matrix von f an der Stelle $(1, 0)$ (siehe oben). Da jeder Summand von f ein Polynom vom Grad höchstens 2 in x, y ist, verschwinden alle partiellen Ableitungen der Form $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x, y)$ für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}^2$ mit $|\alpha| \geq 3$. Deswegen lautet die Taylor Formel mit integralem Rest bis um die 2. Ordnung von f an der Stelle $(1, 0)$:

$$\begin{aligned} f(x, y) - \underbrace{f(1, 0)}_{=-1} &= (x-1) \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)}_{=0} + y \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)}_{=0} + \sum_{|\alpha|=2} \frac{(x-1, y)^\alpha}{\alpha!} \cdot \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(1, 0) \\ &= \frac{(x-1)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) + (x-1)y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0) + \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) \\ &= \frac{1}{2}\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}, H_f(1, 0) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \rangle. \end{aligned}$$

Da die Hesse-Matrix von f an der Stelle $(1, 0)$ positiv-definit ist (siehe oben), ist die rechte Seite der letzten Gleichung nichtnegativ (und verschwindet genau dann, wenn $x - 1 = y = 0$, d.h., wenn $(x, y) = (1, 0)$). Dies beweist $f(x, y) - f(1, 0) \geq 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Somit ist $(1, 0)$ ein globales Minimum von f.

Aufgabe 4 [10 Punkte]

Berechnen Sie den Flächeninhalt von $P := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2)^3 \leq 9x^2\}$.

Lösung: Das Gebiet P ist invariant unter den Transformationen $x \mapsto -x$ und $y \mapsto -y$, d.h., unter den Orthogonalspiegelungen an den y- und x-Achsen. Somit ist der Flächeninhalt $A(P)$ von P gleich vier mal dem von $P \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$. Beachte außerdem dass, für jedes $(x,y) \in P$, die Ungleichung $(x^2+y^2)^3 \leq 9x^2$ die Ungleichung $(x^2)^3 \leq 9x^2$ impliziert, d.h., $|x| \leq \sqrt{3}$. Nun gilt, für $x \in [0, \sqrt{3}]$ und $y \geq 0$:

$$\begin{aligned} (x^2+y^2)^3 \leq 9x^2 &\iff x^2+y^2 \leq (9x^2)^{\frac{1}{3}} \\ &\iff y^2 \leq (3x)^{\frac{2}{3}} - x^2 \\ &\iff y \leq \sqrt{(3x)^{\frac{2}{3}} - x^2} \\ &\iff y \leq x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}}. \end{aligned}$$

Bemerke, dass die rechte Seite der letzten Ungleichung wegen $|x| \leq \sqrt{3}$ wohldefiniert ist. Mit der Transformationsformel folgt

$$\begin{aligned} A(P) &= 4 \int_0^{\sqrt{3}} x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}} dx \\ &= 4 \int_0^{3^{\frac{2}{3}}} \sqrt{3^{\frac{2}{3}} - u} \cdot \frac{3}{4} du \qquad \text{wobei } u := x^{\frac{4}{3}} \\ &= 3 \int_0^1 3^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{1-v} \cdot 3^{\frac{2}{3}} dv \qquad \text{wobei } v := 3^{-\frac{2}{3}} u \\ &= 9 \int_0^1 \sqrt{1-v}\, dv \\ &= 9 \cdot \left[-\frac{2}{3}(1-v)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= 6. \end{aligned}$$

Lösung unter Anwendung der Polarkoordinaten: $x = r\cos(\varphi), y = r\sin(\varphi)$, $r \in]0, +\infty[, \varphi \in]-\pi, \pi[$. Wir bemerken zuerst, dass $(x^2+y^2)^3 \leq 9x^2$ ist äquivalent zu $r \leq \sqrt{3}\sqrt{|\cos(\varphi)|}$. Wegen der Symmetrie von P unter der Orthogonalspiegelung an die x-Achse, folgt:

$$\begin{aligned} A(P) = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{3\cos(\varphi)}} r dr d\varphi &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r^2|_0^{\sqrt{3\cos(\varphi)}}) d\varphi \\ = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos(\varphi)\, d\varphi = 3\sin(\varphi)|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} &= 6. \end{aligned}$$

Aufgabe 5 [10 Punkte]

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen folgenden Differentialgleichungssystems:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= 3y_1 + y_2 + t \\ \dot{y}_2 &= -y_1 + y_2 - t \end{cases}. \tag{1}$$

Lösung:

- Man muss zuerst folgende homogene Gleichung lösen:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

  Die Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ sind gegeben durch

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

  also $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ und damit $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Der Eigenraum zum Eigenwert 2 ist gegeben durch:

$$E_{\lambda_1} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

  Damit ist eine Lösung der Differentialgleichung (2) gegeben durch: $y(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Um eine weitere (davon linear unabhängige) Lösung zu finden, machen wir folgenden Ansatz: $y(t) = e^{2t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right]$. Nach Einsetzen in (2) folgt $w_2 + w_1 = 1$. Z.B. für $w_1 = 0$ bekommen wir folgende Lösung: $y(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ -t+1 \end{pmatrix}$. Damit sind die allgemeinen Lösungen von (2) gegeben durch:

$$y_{\mathrm{h}}(t) = e^{2t} \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ -t+1 \end{pmatrix} \right], \qquad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

- Wir suchen eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Dafür kann man entweder die Variation der Konstanten benutzen oder einen speziellen Ansatz machen (die von der Form des inhomogenen Terms abhängt).

  Nach dem Ansatz der Variation der Konstanten nehmen wir an, dass die Lösung von folgender Form ist:

$$y(t) = e^{2t} \left[c_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} t \\ -t+1 \end{pmatrix} \right]. \tag{4}$$

  Nach Einsetzen in (1) folgt:

$$c_1'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2'(t) \begin{pmatrix} t \\ -t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{-2t} \\ -te^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Äquivalent dazu

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & -t+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{-2t} \\ -te^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{cases} c_1'(t) = te^{-2t} \\ c_2'(t) = 0 \end{cases}$$

Nach Integrieren folgt:

$$\begin{cases} c_1(t) = -\dfrac{1}{4}(2t+1)e^{-2t} + \overline{c}_1 \\ c_2(t) = \overline{c}_2 \end{cases} \qquad \text{mit } \overline{c}_1, \overline{c}_2 \in \mathbb{R}.$$

Damit ist z.B. eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1) gegeben durch:

$$y_{\text{inh}}(t) = -\frac{1}{4}(2t+1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

und die allgemeine Lösung von (1) ist:

$$y(t) = y_{\text{h}}(t) + y_{\text{inh}}(t) = \begin{pmatrix} c_1e^{2t} + c_2te^{2t} - \frac{1}{4}(2t+1) \\ -c_1e^{2t} - c_2(t-1)e^{2t} + \frac{1}{4}(2t+1) \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 6 [10 Punkte]

Sei $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 - y^4 + z^4 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

i) Zeigen Sie, dass M eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

ii) Bestimmen Sie eine lineare Gleichung, welche den Tangentialraum T_pM von M an der Stelle $p = (0,0,-1)$ beschreibt und geben Sie eine Basis von T_pM an.

iii) Zeigen Sie, dass $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \longmapsto (-x, 2y^3, -2z^3)$, ein C^∞ Normalenfeld auf M definiert.

Lösung:

i) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y,z) \longmapsto x^2 - y^4 + z^4 - 1$, ist offenbar C^∞ mit $(\nabla f)(x,y,z) = (2x, -4y^3, 4z^3)$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Damit verschwindet der Gradient $(\nabla f)(x,y,z)$ genau dann, wenn $(x,y,z) = (0,0,0)$. Ist nun $(x,y,z) \in M = f^{-1}(\{0\})$, so gilt $x^2 - y^4 + z^4 = 1$, insbesondere $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ und daher $(\nabla f)(x,y,z) \neq (0,0,0)$. Das zeigt, dass $0 \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert der Funktion f ist. Aus dem Satz über den regulären Wert (Korollar 5.6 im Skript) folgt, dass $M = f^{-1}(\{0\})$ eine $3-1 = 2$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

ii) Bemerke, dass wegen $f(p) = 0$ der Punkt p wohl auf M liegt. Nach der Vorlesung (genauer: Proposition 5.10 im Skript) ist T_pM gegeben durch $T_pM = \ker(d_pf)$, wobei $d_pf : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ das Differential von f an der Stelle $p = (0,0,-1)$ ist. Da aber $d_pf(X) = \langle (\nabla f)(p), X\rangle$ für alle $X \in \mathbb{R}^3$ gilt, ist $T_pM = (\nabla f)(p)^\perp = \{X \in \mathbb{R}^3 \,|\, \langle X, (\nabla f)(p)\rangle = 0\}$. Nun ist nach den obigen Rechnungen $(\nabla f)(p) = (0,0,-4)$, somit ist

$$T_pM = \{X \in \mathbb{R}^3 \,|\, \langle X, (0,0,-4)\rangle = 0\} = \{X = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, X_3 = 0\}.$$

Damit ist eine Basis von T_pM gegeben z.B. durch $\{u := (1,0,0), v := (0,1,0)\}$.

iii) Die Abbildung X ist offenbar C^∞, da sie die Einschränkung der auf $\mathbb{R}^3$ definierten C^∞ Funktion $(x,y,z) \mapsto (-x, 2y^3, -2z^3)$ auf M ist. Ein Normalenfeld auf M ist ein Vektorfeld, das in jedem Punkt $q \in M$ senkrecht auf dem Tangentialraum T_qM ist. Da hier $T_pM = \ker(d_pf) = (\nabla f)(q)^\perp$, genügt es, zu zeigen, dass $X(q)$ proportional zu $(\nabla f)(q)$ ist, für alle $q \in M$. Nach der obigen Rechnung in i) folgt sofort, dass $X(q) = -2(\nabla f)(q)$, für alle $q \in M$ und damit ist X ein Normalenfeld auf M.