Nachklausur zur Analysis II für Physiker

Universität Regensburg, Sommersemester 2012
Dr. Nicolas Ginoux / Dr. Mihaela Pilca
4.10.2012, Bearbeitungszeit: **2 Stunden**

Name:

Matr.-Num.:

- Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf dieses Blatt und auf jedes zusätzliche Blatt, das Sie abgeben!
- Erlaubtes Hilfsmittel: 1 handbeschriebenes DIN A4-Blatt als Merkhilfe.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und packen Sie es weg.
- Wenn Sie mindestens 50% der Punkte erreichen, haben Sie bestanden.
- Um bei einer Rechenaufgabe volle Punktzahl zu erhalten, muss der Rechenweg nachvollziehbar und begründet sein.
- Schreiben Sie auch die Lösungen für die Rechenaufgaben (jeweils 2 Seiten Platz) direkt auf diese Klausurblätter. Wenn nötig, können Sie zusätzliche Blätter beifügen.
- Schreiben Sie bitte leserlich.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							

Note:

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 [10 Punkte]

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind (keine Begründung erforderlich):

i) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge aus $C^0([0,1],\mathbb{R})$, welche punktweise fast-überall konvergiert. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$.	☐ WAHR	☐ FALSCH
ii) Die Lösungen einer beliebigen homogenen linearen Differentialgleichung bilden immer einen endlich dimensionalen Vektorraum.	☐ WAHR	☐ FALSCH
iii) Jede exakte Differentialform ist geschlossen.	☐ WAHR	☐ FALSCH
iv) Ist $c \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Wert einer C^∞ Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^2$, so ist $f^{-1}(\{c\})$ eine $(n-2)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.	☐ WAHR	☐ FALSCH
v) Die Krümmungsfunktion einer regulär parametrisierten ebenen Kurve legt die Kurve eindeutig fest.	☐ WAHR	☐ FALSCH
vi) Ist $f : [0,1] \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 Funktion, so gilt immer $\frac{d}{dt}\left(\int_0^1 f(x,t)dx\right) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$.	☐ WAHR	☐ FALSCH
vii) Jede auf einer abgeschlossenen beschränkten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ definierte stetige reellwertige Funktion besitzt ein Minimum und ein Maximum.	☐ WAHR	☐ FALSCH
viii) Die Differentialgleichung $y'' = -2y$ hat eine eindeutige Lösung y mit $y(0) = -1$.	☐ WAHR	☐ FALSCH
ix) Partielle Ableitungen nach verschiedenen Variablen können immer miteinander vertauscht werden.	☐ WAHR	☐ FALSCH
x) Jedes auf $\mathbb{R}^3$ definierte wirbelfreie C^1 Vektorfeld besitzt ein Potential.	☐ WAHR	☐ FALSCH

Aufgabe 2 [10 Punkte]

Für ein $\alpha \in]0, \infty[$ heißt eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann *homogen vom Grad* α, wenn

$$f(tx) = t^\alpha f(x)$$

für alle $t \in]0, \infty[$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt. Zeigen Sie: eine differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann homogen vom Grad α, wenn

$$\alpha f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt.

(Hinweis: für die Rückrichtung fixiere man $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und zeige, dass die Funktion $t \mapsto f(tx)$ die Differentialgleichung $y' = \frac{\alpha}{t} y$ auf dem Intervall $]0, \infty[$ löst.)

Aufgabe 3 [10 Punkte]

Man betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto x^2 + y^2 - xy - 2x + y$.

1. Zeigen Sie, dass f ein eindeutiges lokales Minimum besitzt.

2. Zeigen Sie, dass dieses lokale Minimum ein globales Minimum von f ist.
(Hinweis: leiten Sie aus einer Taylor-Formel folgende Identität her:

$$f(x,y) + 1 = \frac{1}{2}\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}, H_f(1,0) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \rangle$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, wobei $H_f(x, y)$ die Hesse-Matrix von f an der Stelle (x, y) bezeichnet; folgern Sie die Behauptung.)

Aufgabe 4 [10 Punkte]

Berechnen Sie den Flächeninhalt von $P := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^3 \leq 9x^2\}$.

Aufgabe 5 [10 Punkte]

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen folgenden Differentialgleichungssystems:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= 3y_1 + y_2 + t \\ \dot{y}_2 &= -y_1 + y_2 - t \end{cases} .$$

Aufgabe 6 [10 Punkte]

Sei $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^4 + z^4 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

i) Zeigen Sie, dass M eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

ii) Bestimmen Sie eine lineare Gleichung, welche den Tangentialraum T_pM von M an der Stelle $p = (0, 0, -1)$ beschreibt und geben Sie eine Basis von T_pM an.

iii) Zeigen Sie, dass $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto (-x, 2y^3, -2z^3)$, ein C^∞ Normalenfeld auf M definiert.