

Table des matières

1	Introduction	1
2	Préliminaires	3
2.1	Préliminaires algébriques	3
2.1.1	Structure presque-complexe sur un espace vectoriel réel	3
2.1.2	Décomposition des formes alternées en types	4
2.1.3	Produit scalaire hermitien sur une structure presque-complexe	5
2.2	Préliminaires géométriques	7
2.2.1	Variétés presque-complexes	7
2.2.2	Variétés presque-hermitiennes	8
2.2.3	Structure de l'espace des 2-formes à valeurs dans le fibré tangent	9
2.2.4	Application à l'étude de DF	14
3	Connexions hermitiennes sur une variété presque-hermitienne	17
3.1	Potentiel et torsion d'une connexion hermitienne	17
3.2	Détermination d'une connexion hermitienne par sa torsion	18
3.3	Connexion hermitienne de torsion de norme minimale	19
4	Structures de Weyl et géométrie spinorielle	21
4.1	Structures de Weyl sur une variété conforme	21
4.1.1	Quelques fibrés sur une variété conforme	21
4.1.2	Le théorème de Weyl	23
4.1.3	Décompositions du tenseur de courbure d'une structure de Weyl	25
4.1.4	Structures d'Einstein-Weyl	28
4.2	Géométrie spinorielle conforme	29
4.2.1	Structures CSpin sur une variété conforme	29
4.2.2	Connexion et courbure spinorielles	33
4.2.3	Opérateur de Dirac et laplacien conformes	47
4.2.4	Opérateur des twisteurs	48
4.2.5	Spineurs de Killing	52
5	Conventions et notations	55

6 Bibliographie

59

Chapitre 1

Introduction

Dans ce mémoire, on dégage d'une part quelques propriétés des structures et connexions hermitiennes, qui s'introduisent naturellement dans l'étude de l'espace des twisteurs d'une variété conforme, et d'autre part les bases de la géométrie spinorielle conforme.

La première partie est consacrée aux structures presque-hermitiennes sur les variétés orientables de dimension paire. Une structure presque-hermitienne sur une variété consiste en la donnée d'une structure presque-complexe et d'une métrique faisant de celle-ci une isométrie. Après avoir détaillé, puis transposé au cas des variétés, les propriétés des structures presque-complexes et presque-hermitiennes sur un espace vectoriel réel, on donne différentes décompositions de l'espace des 2-formes à valeurs dans le fibré tangent. L'application de cette décomposition aux divers tenseurs naturels sur une variété presque-hermitienne permet en particulier d'affirmer qu'une variété est kählérienne si et seulement si elle est à la fois hermitienne et symplectique.

Si une structure presque-hermitienne sur une variété est fixée, on peut d'autre part définir la notion de connexion hermitienne. Une connexion hermitienne est une dérivée covariante sur la variété qui préserve la structure presque-complexe et la métrique. Une connexion hermitienne étant uniquement déterminée par sa torsion, qui s'identifie à une 2-forme à valeurs dans le fibré tangent, on peut appliquer les théorèmes de décomposition précédents à celle-ci; il en résulte en particulier l'existence et l'unicité d'une connexion hermitienne de torsion de norme minimale.

En seconde partie, on s'intéresse aux structures de Weyl sur les variétés conformes, i.e. aux dérivées covariantes sur la variété préservant la structure conforme et sans torsion. Celles-ci englobant naturellement les connexions de Levi-Civita des métriques de la classe conforme, on va chercher à généraliser les constructions et les résultats de la géométrie spinorielle riemannienne. Le théorème de Weyl permet tout d'abord, sur une variété conforme donnée, de mettre en correspondance affine l'ensemble des structures de Weyl et l'espace des dérivées covariantes sur le fibré des scalaires de poids 1, \mathcal{L}^1 . On peut alors décomposer de plusieurs manières le tenseur de courbure d'une structure de Weyl, en faisant apparaître le tenseur de courbure de la dérivée covariante associée sur \mathcal{L}^1 . Les notions de tenseur de Ricci, de courbure scalaire, de variétés d'Einstein-Weyl, i.e. dont la partie symétrique sans trace du tenseur de Ricci s'annule, s'introduisent aussi de manière naturelle.

Par analogie avec la géométrie spinorielle riemannienne, où la métrique est fixée, on définit les structures CSpin sur les variétés conformes, où $\text{CSpin}_n = \text{Spin}_n \times \mathbb{R}_+^*$. La seule difficulté pour définir les autres objets sur une variété CSpin consiste à rendre 'conforme' ce qui a été construit dans le cadre riemannien, i.e. indépendant du choix d'une métrique dans la classe conforme; d'où, par exemple, l'introduction de spineurs à poids.

L'opérateur de Dirac associé à une structure de Weyl sur les spineurs à poids apparaît alors naturellement. Par l'intermédiaire de deux formules liant le tenseur de courbure sur les spineurs à poids et celui de la structure de Weyl, on obtient la formule de Schrödinger-Lichnérowicz conforme, qui généralise celle du cadre riemannien. L'application immédiate de cette formule à l'étude des spineurs twisteurs puis des spineurs de Killing donne des conditions nécessaires d'existence de spineurs de Killing non triviaux. Là,

des différences avec le cadre riemannien surgissent.

Ce travail est basé sur l'article de Paul Gauduchon [Gau1] pour la géométrie presque-hermitienne, et sur celui de Volker Buchholz [Bu] pour la géométrie conforme.

Chapitre 2

Préliminaires

2.1 Préliminaires algébriques

Dans toute cette partie, V désigne un espace vectoriel réel de dimension n . Lorsque n est pair, on note $m = \frac{n}{2}$.

2.1.1 Structure presque-complexe sur un espace vectoriel réel

Définition 2.1 Une structure presque-complexe sur V est un endomorphisme J de V tel que $J^2 = -Id_V$.

Remarques 2.1

1. L'espace V est de dimension paire si et seulement si V admet une structure presque-complexe.
2. Si J est une structure presque-complexe sur V , on peut définir une structure de \mathbb{C} -espace vectoriel sur V en posant

$$\forall v \in V, \quad iv = J(v).$$

Dans ce cas :

- Un \mathbb{R} -sous-espace vectoriel F de V est un \mathbb{C} -sous-espace vectoriel si et seulement si $J(F) \subset F$.
- Si J' est une structure presque-complexe sur un autre \mathbb{R} -espace vectoriel V' , alors une application \mathbb{R} -linéaire $f : V \rightarrow V'$ est \mathbb{C} -linéaire si et seulement si $f \circ J = J' \circ f$.

Proposition 2.1 Soit J une structure presque-complexe sur V . Il existe une famille (e_1, \dots, e_m) de vecteurs de V telle que $(e_1, \dots, e_m, J(e_1), \dots, J(e_m))$ soit une base de V .

Corollaire 2.1

1. Le groupe $GL_n(\mathbb{C})$ s'identifie au sous-groupe de $GL_{2n}(\mathbb{R})$ des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \text{ où } A, B \in M_n(\mathbb{R}) \text{ et } \det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \neq 0.$$

2. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m, J(e_1), \dots, J(e_m))$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_m, J(e'_1), \dots, J(e'_m))$ sont deux bases de V comme dans la proposition (2.1), alors \mathcal{B} et \mathcal{B}' ont même orientation, i.e. si $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , alors $\det(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}) > 0$.

Remarque 2.1 Au lieu de considérer des bases de la forme $(e_1, \dots, e_m, J(e_1), \dots, J(e_m))$ de V , on peut prendre des bases de la forme $(e_1, J(e_1), e_2, J(e_2), \dots, e_m, J(e_m))$; le dernier résultat subsiste.

2.1.2 Décomposition des formes alternées en types

Soit J une structure presque-complexe sur V . Soit

$$V^c = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

le complexifié de V . L'endomorphisme J induit un endomorphisme $J^c : V^c \rightarrow V^c$ prolongeant J ; J^c vérifie $(J^c)^2 = -Id_{V^c} = i^2 Id_{V^c}$ donc

$$V^c = \ker(J^c - iId_{V^c}) \oplus \ker(J^c + iId_{V^c}) \quad (2.1)$$

Posons $V^{1,0} = \ker(J^c - iId_{V^c})$ et $V^{0,1} = \ker(J^c + iId_{V^c})$.

Proposition 2.2

1. $V^{1,0} = \{X - iJ(X), X \in V\}$ et $V^{0,1} = \{X + iJ(X), X \in V\}$
2. La conjugaison

$$\begin{aligned} conj : V^c = V \oplus iV &\rightarrow V^c, \\ X + iY &\mapsto X - iY, \end{aligned}$$

échange $V^{1,0}$ et $V^{0,1}$. En particulier, $\dim_{\mathbb{C}} V^{1,0} = \dim_{\mathbb{C}} V^{0,1} = m$.

On peut effectuer le même travail sur V^* , à condition de passer J au dual: si la convention usuelle impose

$$J^*(\alpha)(X) = \alpha(J(X)),$$

en revanche si on veut que J commute avec la dualité riemannienne, i.e. que

$$\tilde{J}(\langle X, \cdot \rangle) = \langle J(X), \cdot \rangle,$$

il faut poser

$$\tilde{J}(\alpha)(X) = -\alpha(J(X)).$$

L'endomorphisme \tilde{J} est une structure presque-complexe sur V^* , et si on pose

$$V_{1,0} = \{\alpha \in (V^*)^c, \tilde{J}^c(\alpha) = -i\alpha\}$$

et

$$V_{0,1} = \{\alpha \in (V^*)^c, \tilde{J}^c(\alpha) = i\alpha\},$$

alors on obtient de même

$$(V^*)^c = V_{1,0} \oplus V_{0,1}$$

et, par $(V^c)^* \cong (V^*)^c$,

$$\begin{aligned} V_{1,0} &= (V^{0,1})^o \quad (= (V^{1,0})^*) \\ V_{0,1} &= (V^{1,0})^o \quad (= (V^{0,1})^*), \end{aligned}$$

où, pour un sous-espace vectoriel F de V , $(F)^o$ désigne le polaire de F , i.e. l'ensemble des formes linéaires sur V s'annulant sur F . On peut ainsi décomposer les formes alternées sur V^c .

Proposition 2.3

1. L'algèbre des formes alternées sur V^c se scinde sous la forme:

$$\bigwedge V^{c*} = \bigoplus_{0 \leq r \leq n} \bigoplus_{p+q=r} \bigwedge^{p,q} V^{c*}$$

où

$$\begin{aligned} \bigwedge^{p,q} V^{c*} &= \{0\} \text{ si } p \text{ ou } q > m, \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{C}}\{\alpha \wedge \beta, \alpha \in \bigwedge^p V_{1,0}, \beta \in \bigwedge^q V_{0,1}\} \text{ sinon.} \end{aligned}$$

2. La conjugaison, étendue en un \mathbb{R} -automorphisme de $\bigwedge V^{c*}$, échange $\bigwedge^{p,q} V^{c*}$ et $\bigwedge^{q,p} V^{c*}$.

Remarques 2.2

1. Si (e_1, \dots, e_m) est une \mathbb{C} -base de $V^{1,0}$, soit (e_1^*, \dots, e_m^*) la \mathbb{C} -base duale de $V_{1,0}$; $(\overline{e_1^*}, \dots, \overline{e_m^*})$ est une \mathbb{C} -base de $V_{0,1}$, donc une \mathbb{C} -base de $\bigwedge^{p,q} V^{c*}$ est formée par les

$$e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^* \wedge \overline{e_{j_1}^*} \wedge \dots \wedge \overline{e_{j_q}^*}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m, \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq m.$$

2. Si $\omega \in \bigwedge^r V^*$, puisque $\bigwedge^r V^* \hookrightarrow \bigwedge^r V^{c*}$, ω peut être vue comme une r -forme sur V^c ; or ω est à valeurs réelles, donc

$$\forall (X_1, \dots, X_r) \in V^r, \quad \omega(X_1, \dots, X_r) = \overline{\omega(X_1, \dots, X_r)},$$

donc si les $c_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q}$ sont les coefficients de la décomposition de ω dans la base précédente, alors

$$c_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q} = (-1)^{pq} \overline{c_{j_1, \dots, j_q, i_1, \dots, i_p}}.$$

3) On peut étendre J^c en un \mathbb{C} -automorphisme de l'algèbre $\bigwedge V^{c*}$, noté $\bigwedge J^c$; si $J_k = \bigwedge^k J^c$, $(J_k)^2 = (-1)^k Id_{\bigwedge^k V^{c*}}$, donc

$$\begin{aligned} \text{si } k \text{ est pair: } \bigwedge^k V^{c*} &= \ker(J_k - Id_{\bigwedge^k V^{c*}}) \oplus \ker(J_k + Id_{\bigwedge^k V^{c*}}) \\ \text{si } k \text{ est impair: } \bigwedge^k V^{c*} &= \ker(J_k - i Id_{\bigwedge^k V^{c*}}) \oplus \ker(J_k + i Id_{\bigwedge^k V^{c*}}) \end{aligned}$$

Par exemple, si $k=2$, $\bigwedge^2 V^{c*} = \bigwedge^{2,0} V^{c*} \oplus \bigwedge^{1,1} V^{c*} \oplus \bigwedge^{0,2} V^{c*}$ avec

$$\bigwedge^{1,1} V^{c*} = \ker(J_2 - Id_{\bigwedge^2 V^{c*}})$$

i.e.

$$\bigwedge^{1,1} V^{c*} = \{\omega \in \bigwedge^2 V^{c*}, \quad \forall X, Y \in V, \quad \omega(J(X), J(Y)) = \omega(X, Y)\}$$

$$\bigwedge^{2,0} V^{c*} \oplus \bigwedge^{0,2} V^{c*} = \ker(J_2 + Id_{\bigwedge^2 V^{c*}}) \text{ et}$$

$$\bigwedge^{2,0} V^{c*} = \{\omega \in \bigwedge^2 V^{c*}, \quad \forall X, Y \in V, \quad \omega(J(X), Y) = i\omega(X, Y)\}$$

$$\bigwedge^{0,2} V^{c*} = \{\omega \in \bigwedge^2 V^{c*}, \quad \forall X, Y \in V, \quad \omega(J(X), Y) = -i\omega(X, Y)\}.$$

2.1.3 Produit scalaire hermitien sur une structure presque-complexe

Définition 2.2 Soit J une structure presque-complexe sur V . Un produit scalaire hermitien sur (V, J) est un produit scalaire g sur V tel que J est g -orthogonal, i.e.

$$\forall X, Y \in V, \quad g(J(X), J(Y)) = g(X, Y). \quad (2.2)$$

Dans toute la suite des préliminaires algébriques, sauf mention expresse, J désigne une structure presque-complexe sur V .

Remarques 2.3

1. Si g est un produit scalaire sur V , alors la forme \mathbb{R} -bilinéaire h définie par

$$h(X, Y) = g(X, Y) + g(J(X), J(Y))$$

est un produit scalaire hermitien sur (V, J) .

2. Si E est un \mathbb{C} -espace vectoriel, et si J est la structure presque-complexe naturelle définie sur E par $J(X) = iX$, cette notion de produit hermitien coïncide avec la notion usuelle au sens suivant: si $s : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive, alors $\operatorname{Re}(s)$ vérifie (2.2). Inversement, si g vérifie (2.2), alors

$$\begin{aligned} s : E \times E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (X, Y) &\longmapsto g(X, Y) - ig(J(X), Y) \end{aligned}$$

est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.

Proposition 2.4 Soit g un produit scalaire hermitien sur (V, J) . Il existe m éléments de V , (e_1, \dots, e_m) tels que $(e_1, \dots, e_m, J(e_1), \dots, J(e_m))$ soit une \mathbb{R} -base g -orthonormée de V .

Preuve: On considère un vecteur non isotrope e_1 ; on montre que e_1 est orthogonal à $J(e_1)$ puis on termine par récurrence sur $(\operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, J(e_1)\})^\perp$. \square

On peut étendre un produit scalaire hermitien g sur (V, J) en une forme \mathbb{C} -bilinéaire sur V^c ; soit $g^c : V^c \times V^c \rightarrow \mathbb{C}$ cette extension. L'application g^c est symétrique, et vérifie :

$$\begin{aligned} \forall Z \in V^c, \quad g^c(Z, \overline{Z}) &\geq 0, \quad \text{et} \quad g^c(Z, \overline{Z}) = 0 \iff Z = 0 \\ \forall (Z, Z') \in (V^{1,0})^2, \quad g^c(Z, Z') &= 0. \end{aligned}$$

Réciproquement, si on se donne $\tilde{g} : V^c \times V^c \rightarrow \mathbb{C}$ une forme \mathbb{C} -bilinéaire symétrique vérifiant

$$\begin{aligned} \forall Z \in V^c, \quad \tilde{g}(Z, \overline{Z}) &\geq 0, \quad \text{et} \quad \tilde{g}(Z, \overline{Z}) = 0 \iff Z = 0 \\ \forall (Z, Z') \in (V^{1,0})^2, \quad \tilde{g}(Z, Z') &= 0, \end{aligned}$$

en posant $g = \tilde{g}|_{V \times V}$, g est réelle et est un produit scalaire hermitien tel que $g^c = \tilde{g}$.

Définition 2.3 Soit g un produit scalaire hermitien sur (V, J) . La forme de Kähler de g est la 2-forme alternée F définie par

$$F(X, Y) = g(J(X), Y).$$

Remarques 2.4

1. F est alternée car J est g -orthogonal, et vérifie

$$F(J(X), J(Y)) = F(X, Y),$$

en particulier F est de type $(1, 1)$.

2. Comme on vient de le voir, J^c est g^c -orthogonal; on peut, comme dans le cas euclidien, définir g^c sur V^{*c} et dans ce cas, \tilde{J}^c (ou $(\tilde{J})^c$) est g^c -orthogonal. On en déduit que $J_k : \bigwedge^k V^{c*} \rightarrow \bigwedge^k V^{c*}$ est orthogonal pour la forme \mathbb{C} -bilinéaire induite sur $\bigwedge^k V^{c*}$. Ainsi, si k est pair (valeurs propres ± 1), $\ker(J_k - \operatorname{Id}_{\bigwedge^k V^{c*}}) \perp \ker(J_k + \operatorname{Id}_{\bigwedge^k V^{c*}})$ si k est impair (valeurs propres $\pm i$), g^c est nulle sur chaque sous-espace propre de J_k .

Exemples:

1) $(\bigwedge^{1,1} V^{c*})^\perp = \bigwedge^{2,0} V^{c*} \oplus \bigwedge^{0,2} V^{c*}$ mais $(\bigwedge^{2,0} V^{c*})^\perp = \bigwedge^{1,1} V^{c*} \oplus \bigwedge^{2,0} V^{c*}$ en particulier $\bigwedge^{2,0} V^{c*}$ et $\bigwedge^{0,2} V^{c*}$ ne sont pas orthogonaux.

2) Si $k = 3$,

$$\ker(J_3 - i\operatorname{Id}_{\bigwedge^3 V^{c*}}) = \bigwedge^{1,2} V^{c*} \oplus \bigwedge^{3,0} V^{c*}$$

et

$$\ker(J_3 + i\operatorname{Id}_{\bigwedge^3 V^{c*}}) = \bigwedge^{2,1} V^{c*} \oplus \bigwedge^{0,3} V^{c*};$$

De plus,

$$(\bigwedge^{0,3} V^{c*})^\perp = \bigwedge^{2,1} V^{c*} \oplus \bigwedge^{1,2} V^{c*} \oplus \bigwedge^{0,3} V^{c*}$$

d'où

$$(\bigwedge^{2,1} V^{c*} \oplus \bigwedge^{1,2} V^{c*}) \perp (\bigwedge^{3,0} V^{c*} \oplus \bigwedge^{0,3} V^{c*}).$$

2.2 Préliminaires géométriques

2.2.1 Variétés presque-complexes

Définition 2.4 Une variété presque-complexe est un couple (M, J) où M est une variété lisse et J est un $(1,1)$ -tenseur sur M vérifiant $J^2 = -Id_{TM}$.

Proposition 2.5 Toute variété presque-complexe est de dimension paire et orientable.

Preuve: Si (M, J) est une variété presque-complexe, alors pour tout x de M , $J_x : T_x M \rightarrow T_x M$ est une structure presque-complexe sur $T_x M$, donc la dimension de $T_x M$, qui est celle de M , est paire. Soit $n = 2m$ cette dimension. Pour x élément de M , il existe m éléments de $T_x M$, (e_1, \dots, e_m) tels que $(e_1, \dots, e_m, J(e_1), \dots, J(e_m))$ soit une base de $T_x M$ par (2.1). On peut supposer, par continuité de J , l'existence d'une base locale de ce type, i.e. de m champs de vecteurs X_1, \dots, X_m dans un voisinage U de x tels que pour tout y dans U , $(X_1(y), \dots, X_m(y), J_y(X_1(y)), \dots, J_y(X_m(y)))$ soit une base de $T_y M$. Or deux telles bases ont même orientation (Cf (2.1)); d'où l'existence d'un atlas dont les changements de cartes ont un jacobien strictement positif. \square

Définition 2.5 Une variété est complexe si et seulement si elle est presque-complexe et si ses changements de cartes commutent avec la structure presque-complexe J , i.e. pour toutes cartes ϕ_i, ϕ_j en x , $T_x(\phi_i^{-1} \circ \phi_j) \circ J_x = J_x \circ T_x(\phi_i^{-1} \circ \phi_j)$.

Remarques 2.5

1. Une variété presque-complexe est complexe si et seulement si elle est localement homéomorphe à des ouverts de \mathbb{C}^n et si ses changements de cartes sont des applications holomorphes.
2. On dit aussi qu'une variété presque-complexe est complexe si et seulement si J est intégrable.

Pour une variété presque-complexe (M, J) , on peut définir le tenseur de torsion de J par :

$$N(X, Y) = \frac{1}{4}([J(X), J(Y)] - [X, Y] - J([J(X), Y]) - J([X, J(Y)])).$$

N , appelé le tenseur de Nijenhuis de (M, J) , est un $(0,2)$ -tenseur alterné en (X, Y) .

Théorème 2.1 (Newlander-Nirenberg) Une variété presque-complexe est complexe si et seulement si elle est sans torsion.

Dans toute la suite, (M, J) désigne une variété presque-complexe de dimension $n = 2m$. On notera, pour p entier positif, $\Omega^p(M) = \Gamma(\bigwedge^p T^*M)$ l'espace des p -formes différentielles sur M , et pour p, q entiers positifs, $\Omega^{p,q}(M) = \Gamma(\bigwedge^{p,q} T^*M)$ l'espace des $p+q$ -formes différentielles de type (p, q) sur M .

2.2.2 Variétés presque-hermitiennes

Définition 2.6 Une métrique hermitienne sur (M, J) est une métrique riemannienne g sur M telle que pour tout x de M , J_x est g_x -orthogonal.

Définition 2.7 Une variété est dite presque-hermitienne (resp. hermitienne) si et seulement si elle est presque-complexe (resp. complexe) et munie d'une métrique hermitienne.

Remarque 2.2 Comme on suppose les variétés dénombrables à l'infini, toute variété presque-complexe admet une métrique hermitienne (Cf (2.3)).

Dans toute la suite de ce paragraphe, (M, J, g) désignera une variété presque-hermitienne. Soit D la connexion de Levi-Civita de (M, g) . On peut définir plusieurs formes sur M attachées à la structure presque-hermitienne :

Définition 2.8 La forme de Kähler (ou forme canonique) de (M, J, g) est la 2-forme F définie par

$$F(X, Y) = g(J(X), Y).$$

La forme de Lee de (M, J, g) est la 1-forme θ définie par

$$\theta = J(\delta F),$$

où δ désigne la g -codifférentielle de la dérivée extérieure d .

Remarque 2.3 Soit $(e_1, e_2 = J(e_1), \dots, e_{n-1}, e_n = J(e_{n-1}))$ une base g -orthonormée sur $T_x M$ (Cf (2.4)) et Λ l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} \Lambda : \Omega^p(M) &\longrightarrow \Omega^{p-2}(M) \\ \psi &\longmapsto \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \psi(e_i, J(e_i), \cdot, \dots, \cdot). \end{aligned}$$

Alors $\theta = \Lambda(dF)$. En effet, en utilisant les formules

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} D_{X_i} \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{p+1}) \\ \delta\omega(X_1, \dots, X_{p-1}) &= - \sum_{i=1}^n D_{e_i} \omega(e_i, X_1, \dots, X_{p-1}), \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \forall X \in T_x M, \quad \Lambda(dF)(X) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n D_{e_j} F(J(e_j), X) - D_{J(e_j)} F(e_j, X) + D_X F(e_j, J(e_j)) \\ &= \sum_{j=1}^n D_{e_j} F(e_j, X) = J(\delta F)(X). \end{aligned}$$

D'autre part, on remarque que

$$\forall \alpha \in \Omega^1(M), \quad \alpha \wedge F = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha(e_k) e_{2j-1}^* \wedge (J(e_{2j-1}))^* \wedge e_k^*,$$

donc $\forall B \in \Omega^3(M)$, $g(\alpha \wedge F, B) = g(\alpha, \Lambda(B))$ d'une part

et $\forall \alpha \in \Omega^1(M)$, $\Lambda(\alpha \wedge F) = (m-1)\alpha$ d'autre part.

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\Omega^3(M) &\longrightarrow \Omega^3(M) \\ \omega &\longmapsto \frac{1}{m-1}\omega \wedge F\end{aligned}$$

est un projecteur orthogonal. Lorsque $\omega = dF$, on obtient la somme g -orthogonale

$$dF = (dF)^0 + \frac{1}{m-1}\theta \wedge F \text{ où } \Lambda((dF)^0) = 0$$

ce qui peut servir de définition de θ .

2.2.3 Structure de l'espace des 2-formes à valeurs dans le fibré tangent

Dans toute la suite des préliminaires, on suppose $n > 2$.

Définition 2.9 L'espace des 2-formes à valeurs dans TM , noté $\Omega^2(TM)$, est l'espace des $(1,2)$ -tenseurs alternés par rapport à leurs deux variables covariantes, i.e.

$$\Omega^2(TM) = \{\omega : TM \times TM \rightarrow TM \quad C^\infty(M)\text{-bilinéaire} : \forall X, Y \in \Gamma(TM), \quad \omega(X, Y) = -\omega(Y, X)\}$$

De manière équivalente, une 2-forme à valeurs dans TM peut être vue comme une section du fibré $(\bigwedge^2 T^*M) \otimes TM \cong \text{Hom}(\bigwedge^2 TM, TM)$.

On peut d'autre part identifier toute 2-forme à valeurs dans TM à un $(0,3)$ -tenseur sur M , alterné en ses deux dernières variables, en posant pour $\omega \in \Omega^2(TM)$,

$$B(X, Y, Z) = g(X, \omega(Y, Z)).$$

Il est clair que $\Omega^2(TM) \supset \Omega^3(M)$.

On décompose alors $\Omega^2(TM)$ de deux manières naturelles différentes : l'une à l'aide de deux projecteurs orthogonaux, le projecteur de Bianchi et la trace définis ci-dessous, et l'autre en s'inspirant de la décomposition

$$\Omega^2(M) = \Omega^{2,0}(M) \oplus \Omega^{1,1}(M) \oplus \Omega^{0,2}(M)$$

de $\Omega^2(M)$.

Considérons b le projecteur défini par:

$$\begin{aligned}b = \text{Alt}|_{\Omega^2(TM)} : \Omega^2(TM) &\longrightarrow \Omega^3(M) \\ B &\longmapsto \text{Alt}(B)\end{aligned}$$

où

$$\forall X_1, X_2, X_3 \in \Gamma(TM), \quad \text{Alt}(B)(X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in S_3} \epsilon(\sigma) B(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}).$$

Un simple calcul montre que, puisque $B \in \Omega^2(TM)$,

$$b(B)(X, Y, Z) = \frac{1}{3}(B(X, Y, Z) + B(Y, Z, X) + B(Z, X, Y)).$$

On nomme naturellement b le *projecteur de Bianchi*.

Soit d'autre part l'application

$$\begin{aligned}C_1^1 : \Omega^2(TM) &\longrightarrow \Omega^1(M) \\ B &\longmapsto \sum_{i=1}^n B(e_i, e_i, \cdot).\end{aligned}$$

L'application

$$\begin{aligned} f : \Omega^1(M) &\longrightarrow \Omega^2(TM) \\ \alpha &\longmapsto f(\alpha) \end{aligned}$$

où

$$\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM), \quad f(\alpha)(X, Y, Z) = \frac{1}{n-1}(\alpha(Z)g(X, Y) - \alpha(Y)g(X, Z)),$$

vérifie $C_1^1 \circ f = Id_{\Omega^1(M)}$, d'où

$$tr_{1,1} = f \circ C_1^1 : \Omega^2(TM) \longrightarrow \Omega^2(TM)$$

est la projection sur $\widetilde{\Omega}^1(M) = f(\Omega^1(M))$ parallèlement à $ker(C_1^1)$.

Lemme 2.1 *Les applications b et $tr_{1,1}$ sont des projecteurs orthogonaux.*

Preuve:

Pour b , cela provient du fait que pour toute matrice A , $\det({}^t A) = \det(A)$. Pour $tr_{1,1}$, si $j \neq k$,

$$tr_{1,1}(e_i^* \otimes (e_j^* \wedge e_k^*)) = \delta_{ij}f(e_k^*) - \delta_{ik}f(e_j^*),$$

$$\text{donc } tr_{1,1}(e_i^* \otimes (e_i^* \wedge e_k^*)) = \frac{1}{n-1} \sum_{p \neq k} e_p^* \otimes (e_p^* \wedge e_k^*),$$

et si $B \in \Omega^2(TM)$ vérifie $tr_{1,1}(B) = 0$, alors

$$\begin{aligned} g(B, tr_{1,1}(e_i^* \otimes (e_i^* \wedge e_k^*))) &= \sum_{l=1}^n B(e_l, e_l, e_k) \\ &= 0. \quad \square \end{aligned}$$

Proposition 2.6 *L'espace des 2-formes à valeurs dans TM se décompose sous la forme suivante :*

$$\Omega^2(TM) = \widetilde{\Omega}^1(M) \oplus_{\perp} (\Omega^2(TM))^0 \oplus_{\perp} \Omega^3(M)$$

où

$$\begin{aligned} \widetilde{\Omega}^1(M) &= tr_{1,1}(\Omega^2(TM)) = Im(tr_{1,1}) \\ (\Omega^2(TM))^0 &= ker(tr_{1,1}) \cap ker(b). \end{aligned}$$

Preuve: Puisque que $tr_{1,1}$ est un projecteur orthogonal,

$$\Omega^2(TM) = Im(tr_{1,1}) \oplus_{\perp} ker(tr_{1,1}),$$

et comme $\Omega^3(M) = Im(b) \subset ker(tr_{1,1})$, alors

$$ker(tr_{1,1}) = \Omega^3(M) \oplus_{\perp} ker(tr_{1,1}) \cap ker(b),$$

et en utilisant les notations précédentes, on obtient le résultat \square

Par analogie avec $\Omega^2(M)$, posons

$$\begin{aligned} \Omega^{1,1}(TM) &= \{B \in \Omega^2(TM) / \forall X, Y \in \Gamma(TM), \quad B(J(X), J(Y)) = B(X, Y)\} \\ \Omega^{2,0}(TM) &= \{B \in \Omega^2(TM) / \forall X, Y \in \Gamma(TM), \quad B(J(X), Y) = J(B(X, Y))\} \\ \Omega^{0,2}(TM) &= \{B \in \Omega^2(TM) / \forall X, Y \in \Gamma(TM), \quad B(J(X), Y) = -J(B(X, Y))\} \end{aligned}$$

et soit

$$\begin{aligned}\mathcal{M} : \Omega^2(TM) &\longrightarrow \Omega^2(TM) \\ B &\longmapsto \mathcal{M}(B),\end{aligned}$$

où $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, $\mathcal{M}(B)(X, Y) = B(J(X), J(Y))$.

$\mathcal{M}^2 = Id_{\Omega^2(TM)}$, et \mathcal{M} étant g -orthogonal (vérification immédiate sur la base g -orthonormée $(e_1, J(e_1), \dots, e_m, J(e_m))$), on a :

$$\Omega^2(TM) = \Omega^{1,1}(TM) \oplus_{\perp} \Omega^{2,0}(TM) \oplus \Omega^{0,2}(TM). \quad (2.3)$$

Lemme 2.2 Soit $B \in \Omega^2(TM)$, $B = B^{1,1} + B^{2,0} + B^{0,2}$ sa décomposition donnée par la précédente identité.

$$\begin{aligned}\text{Alors } B^{1,1} &= \frac{1}{2}(B + \mathcal{M}(B)) \\ B^{2,0}(X, Y) &= \frac{1}{4}(B(X, Y) - B(J(X), J(Y)) - J(B(J(X), Y)) - J(B(X, J(Y)))) \\ B^{0,2}(X, Y) &= \frac{1}{4}(B(X, Y) - B(J(X), J(Y)) + J(B(J(X), Y)) + J(B(X, J(Y))))\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}B^{2,0}(X, Y, Z) &= \frac{1}{4}(B(X, Y, Z) - B(X, J(Y), J(Z)) + B(J(X), J(Y), Z) \\ &\quad + B(J(X), Y, J(Z))) \\ B^{0,2}(X, Y, Z) &= \frac{1}{4}(B(X, Y, Z) - B(X, J(Y), J(Z)) - B(J(X), J(Y), Z) \\ &\quad - B(J(X), Y, J(Z))).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ainsi, } B \in \Omega^{1,1}(TM) &\iff \mathcal{M}(B) = B \\ B \in \Omega^{2,0}(TM) &\iff B(J(X), Y, Z) = -B(X, J(Y), Z) \quad (= -B(X, Y, J(Z))) \\ B \in \Omega^{0,2}(TM) &\iff B(J(X), Y, Z) = B(X, J(Y), Z) \quad (= B(X, Y, J(Z)))\end{aligned}$$

Lien entre les deux décompositions :

Si B est un élément de $\Omega^2(TM)$, on note

$$B = tr_{1,1}(B) + B^0 + b(B)$$

sa décomposition d'après (2.6),

$$B = B^{1,1} + B^{2,0} + B^{0,2}$$

sa décomposition d'après (2.3).

On commence par considérer le cas d'une 3-forme $\psi \in \Omega^3(M)$:

$$\begin{aligned}\psi &= \psi^{1,1} + \psi^{2,0} + \psi^{0,2} \text{ où } \psi \in \Omega^2(TM) \supset \Omega^3(M) \\ \psi &= \psi^+ + \psi^- \text{ où } \psi^+ \text{ est la composante } (2,1)+(1,2) \text{ de } \psi \text{ et } \psi^- \text{ sa composante } (3,0)+(0,3).\end{aligned}$$

On vérifie directement que toute (3,0) ou (0,3) forme est dans $\Omega^{0,2}(TM)$, et que toute (2,1) ou (1,2) forme a sa composante (0,2) nulle dans $\Omega^2(TM)$. Ceci prouve :

Proposition 2.7 *Soit $\psi \in \Omega^3(M)$. Alors*

$$\begin{aligned}\psi^- &= \psi^{0,2} \\ \psi^+ &= \psi^{1,1} + \psi^{0,2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\psi^{1,1} &= \frac{1}{2}(\psi^+ + \mathcal{M}(\psi^+)) \\ \psi^{2,0} &= \frac{1}{2}(\psi^+ - \mathcal{M}(\psi^+))\end{aligned}$$

Remarque 2.4 *La forme ψ^+ ne peut être non nulle que si $\psi^{2,0}$ et $\psi^{1,1}$ sont non nulles. En effet, $(\psi^+)^{0,2} = 0$ entraîne $\psi^+ = 3b(\mathcal{M}(\psi^+))$, en particulier*

$$\begin{aligned}g(\psi^+, \mathcal{M}(\psi^+)) &= \frac{1}{3}g(\psi^+, \psi^+) \\ \text{d'où } g(\psi^{2,0}, \psi^{2,0}) &= \frac{1}{2}g(\psi^{1,1}, \psi^{1,1}).\end{aligned}$$

On passe au cas général : soit

$$\begin{aligned}\Omega^{3,+}(M) &= \Omega^{3,0}(M) \oplus \Omega^{0,3}(M) \\ \Omega^{3,-}(M) &= \Omega^{2,1}(M) \oplus \Omega^{1,2}(M).\end{aligned}$$

Théorème 2.2

1. Pour tout élément B de $\Omega^{0,2}(TM)$,

$$tr_{1,1}(B) = 0$$

B^0 et $b(B)$ sont dans $\Omega^{0,2}(TM)$.

En particulier, $b(B) \in \Omega^{3,-}(M)$.

2. La restriction de b à $\Omega^{2,0}(TM)$ est un isomorphisme sur $\Omega^{3,+}(M)$, et sa réciproque est donnée par

$$\begin{aligned}\Omega^{3,+}(M) &\longrightarrow \Omega^{2,0}(TM) \\ \omega &\longmapsto \frac{3}{2}(\omega - \mathcal{M}(\omega)).\end{aligned}$$

3. L'espace $\Omega^{1,1}(TM)$ se décompose sous forme de la somme orthogonale

$$\Omega^{1,1}(TM) = \Omega_s^{1,1}(TM) \oplus_{\perp} \Omega_a^{1,1}(TM),$$

$$\begin{aligned}\text{où } \Omega_s^{1,1}(TM) &= \Omega^{1,1}(TM) \cap \ker(b) \\ \Omega_a^{1,1}(TM) &= (\Omega_s^{1,1}(TM))^{\perp} \cap \Omega^{1,1}(TM)\end{aligned}$$

et la restriction de b à $\Omega_a^{1,1}(TM)$ est un isomorphisme sur $\Omega^{3,+}(M)$ de réciproque

$$\begin{aligned}\Omega^{3,+}(M) &\longrightarrow \Omega_a^{1,1}(TM) \\ \omega &\longmapsto \frac{3}{4}(\omega + \mathcal{M}(\omega)).\end{aligned}$$

Preuve:

1. En considérant la base g -orthonormée $(e_1, J(e_1), \dots, e_m, J(e_m))$, pour tout champ de vecteurs X sur M ,

$$\begin{aligned} tr_{1,1}(B)(X) &= \sum_{i=1}^m B(e_i, e_i, X) + \sum_{i=1}^m B(J(e_i), J(e_i), X) \\ &\quad \text{avec } B(J(e_i), J(e_i), X) = B(e_i, J^2(e_i), X) \\ \text{donc} &= 0. \end{aligned}$$

De plus, on vérifie aisément que $b(B) \in \Omega^{0,2}(TM)$.

2. On montre directement que $(b(B))^{0,2} = 0$: en effet, pour tous champs de vecteurs X, Y et Z sur M ,

$$\begin{aligned} b(B)(X, J(Y), J(Z)) &= \frac{1}{3}(-B(X, Y, Z) + B(Y, Z, X) + B(Z, X, Y)) \\ &= -\frac{2}{3}B(X, Y, Z) + b(B)(X, Y, Z), \end{aligned}$$

d'où $B = \frac{3}{2}(b(B) - \mathcal{M}(b(B)))$. En particulier $b(B) = 3b(\mathcal{M}(b(B)))$ donc $(b(B))^{0,2} = 0$.

3. On cherche un inverse du type $b(A) \longrightarrow \alpha(b(A) + \mathcal{M}(b(A)))$ (pour que cet inverse soit invariant par \mathcal{M}). On doit avoir $b(A) = b(\alpha(b(A) + \mathcal{M}(b(A))))$, donc on pose

$$\begin{aligned} h : \Omega^3(M) &\longrightarrow \Omega^{1,1}(TM) \\ \psi &\longmapsto \frac{3}{4}(\psi + \mathcal{M}(\psi)). \end{aligned}$$

Montrons que $h|_{\Omega^{3,+}(M)}$ est la réciproque de $b|_{\Omega_a^{1,1}(TM)}$.

$h|_{\Omega^{3,-}(M)} = 0$ car $\mathcal{M}(\psi^-) = \mathcal{M}(\psi^{0,2}) = -\psi^{0,2}$ donc on restreint h à $\Omega^{3,+}(M)$.

$h(\Omega^{3,+}(M)) \subset \Omega_a^{1,1}(TM)$ car si $\psi^+ \in \Omega^{3,+}(M)$, et $B \in \Omega_s^{1,1}(TM)$,

$$\begin{aligned} g(\psi^+ + \mathcal{M}(\psi^+), B) &= 2g(\psi^+, B) \text{ car } \mathcal{M}(B) = B \text{ et } \mathcal{M}^2 = Id \\ &= 2g(b(\psi^+), B) \text{ car } b(\psi^+) = \psi^+ \\ &= 2g(\psi^+, b(B)) \text{ car } b \text{ est auto-adjoint.} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Reste à prouver que $b(\Omega_a^{1,1}(TM)) \subset \Omega^{3,+}(M)$, i.e. que $b(B) = 3b(\mathcal{M}(b(B)))$. Si ceci est démontré, alors $b|_{\Omega_a^{1,1}(TM)}$ étant clairement injectif, on aura aussi

$$h \circ b|_{\Omega_a^{1,1}(TM)} = Id|_{\Omega_a^{1,1}(TM)},$$

i.e.

$$\forall A \in \Omega_a^{1,1}(TM), \quad A = \frac{3}{4}(b(A) + \mathcal{M}(b(A))).$$

On calcule: pour X, Y et $Z \in \Gamma(TM)$,

$$\begin{aligned} b(B)(X, J(Y), J(Z)) &= \frac{1}{3}(B(X, Y, Z) + B(J(Y), J(Z), X) + B(J(Z), X, J(Y))) \\ b(B)(J(X), Y, J(Z)) &= \frac{1}{3}(B(J(X), Y, J(Z)) + B(Y, J(Z), J(X)) + B(J(Z), J(X), Y)) \\ b(B)(J(X), J(Y), Z) &= \frac{1}{3}(B(J(X), J(Y), Z) + B(J(Y), Z, J(X)) + B(Z, X, Y)) \\ \text{donc } 3b(\mathcal{M}(b(B)))(X, Y, Z) &= \frac{1}{3}(B(X, Y, Z) + B(Y, Z, X) + B(Z, X, Y)) \\ &= b(B)(X, Y, Z) \end{aligned}$$

d'où $(b(B))^{0,2} = 0$. \square

Corollaire 2.2 *Par composition*

$$\Omega^{2,0}(TM) \xrightarrow{b} \Omega^{3,+}(M) \xrightarrow{(b|_{\Omega_a^{1,1}(TM)})^{-1}} \Omega_a^{1,1}(TM),$$

il existe un isomorphisme

$$\begin{aligned} \Phi : \Omega^{2,0}(TM) &\longrightarrow \Omega_a^{1,1}(TM) \\ B &\longmapsto \frac{3}{4}(b(B) + \mathcal{M}(b(B))) \end{aligned}$$

dont l'inverse est donné par

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} : \Omega_a^{1,1}(TM) &\longrightarrow \Omega^{2,0}(TM) \\ A &\longmapsto \frac{3}{2}(b(A) - \mathcal{M}(b(A))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } B \in \Omega^{2,0}(TM), \quad tr_{1,1}(B) &= 3\tilde{J}(\Lambda(b(B))) \\ \text{si } A \in \Omega_a^{1,1}(TM), \quad tr_{1,1}(A) &= -\frac{3}{2}\tilde{J}(\Lambda(b(A))). \end{aligned}$$

Preuve: Faisons-la pour B :

$tr_{1,1}(B) = \frac{3}{2} \left(tr_{1,1}(B) - tr_{1,1}(\mathcal{M}(b(B))) \right)$, et $tr_{1,1}(b(B)) = 0$; de plus

$$\begin{aligned} tr_{1,1}(\mathcal{M}(b(B)))(X) &= \sum_{i=1}^n b(B)(e_i, J(e_i), J(X)) = - \sum_{i=1}^n \tilde{J}(b(B)(e_i, J(e_i), \cdot))(X) \\ &= -2\tilde{J}(\Lambda(b(B)))(X), \end{aligned}$$

d'où $tr_{1,1}(B) = 3\tilde{J}(\Lambda(b(B)))$. \square

2.2.4 Application à l'étude de DF

Le théorème (2.2) permet de préciser les liens entre la structure presque-complexe et la métrique hermitienne. On note, pour une 2-forme ω sur M , $d^c\omega$ la 2-forme définie par:

$$\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM), \quad d^c\omega(X, Y, Z) = -d\omega(J(X), J(Y), J(Z)).$$

Proposition 2.8

1. N^0 est de type $(0,2)$, donc $N = N^0 + b(N)$
2. $(DF)^{1,1} = 0$ donc $DF = (DF)^{2,0} + (DF)^{0,2}$

3. $(DF)^{0,2}$ est déterminé par et détermine N :

$$\begin{aligned} \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM), \quad (DF)^{0,2}(X, Y, Z) &= N(J(X), Y, Z) + N(J(Y), X, Z) - N(J(Z), X, Y) \\ \text{ou encore} &= 2N^0(J(X), Y, Z) + \frac{1}{3}(dF)^-(X, Y, Z) \end{aligned}$$

et $b(N) = \frac{1}{3}(d^c F)^-$.

4. $(DF)^{2,0}$ est déterminé par $(dF)^+$:

$$(DF)^{2,0} = \frac{1}{2} \left((dF)^+ - \mathcal{M}((dF)^+) \right).$$

Preuve :

1. On vérifie directement, par la définition de N , que

$$\forall X, Y \in \Gamma(TM), \quad N(J(X), Y) = -J(N(X, Y)).$$

2. $D_X F(Y, Z) = g(D_X(J(Y)) - J(D_X Y), Z)$ donc

$$\begin{aligned} D_X F(J(Y), J(Z)) &= g(J(D_X Y) - D_X(J(Y)), Z) \\ &= -D_X F(Y, Z). \end{aligned}$$

3. $(DF)^{0,2}(X, Y, Z) = \frac{1}{4} \left(D_X F(Y, Z) - D_X F(J(Y), J(Z)) - D_{J(X)} F(J(Y), Z) - D_{J(X)} F(Y, J(Z)) \right)$

donc

$(DF)^{0,2}(X, Y, Z) = \frac{1}{2} \left(D_X F(Y, Z) - D_{J(X)} F(J(Y), Z) \right)$ par ce qui précède.

On utilise l'identité de Koszul et la définition de N pour arriver à

$$(DF)^{0,2}(X, Y, Z) = N(J(X), Y, Z) + N(J(Y), X, Z) - N(J(Z), X, Y).$$

De plus, en remarquant que pour toute 2-forme ω ,

$$d\omega = 3b(D\omega),$$

alors $dF = 3b(DF) = 3b((DF)^{0,2}) + 3b((DF)^{2,0})$.

Or $b((DF)^{0,2}) \in \Omega^{3,-}(M)$ et $b((DF)^{2,0}) \in \Omega^{3,+}(M)$, d'où

$$\begin{aligned} b((DF)^{0,2}) &= \frac{1}{3}(dF)^- \\ b((DF)^{2,0}) &= \frac{1}{3}(dF)^+ \end{aligned}$$

En remarquant aussi que pour $\psi \in \Omega^{0,2}(TM)$, $\psi(J(\cdot), \cdot, \cdot) \in \Omega^{0,2}(TM)$, et $b(\psi(J(\cdot), \cdot, \cdot)) = (b(\psi))(J(\cdot), \cdot, \cdot)$, puisque $N \in \Omega^{0,2}(TM)$, alors

$$\begin{aligned} (DF)^{0,2} &= 2N^0(J(\cdot), \cdot, \cdot) - 3b(N)(J(\cdot), \cdot, \cdot) \\ \text{d'où } b((DF)^{0,2}) &= -b(N)(J(\cdot), \cdot, \cdot) \\ \text{i.e. } b(N) &= \frac{1}{3}((dF)^-)^c \end{aligned}$$

et il est facile de montrer que $((dF)^-)^c = (d^c F)^-$ (et $((dF)^+)^c = (d^c F)^+$).
D'où on tire aussi

$$\begin{aligned} (DF)^{0,2} &= 2N(J(\cdot), \cdot, \cdot) + (dF)^- \\ \text{puis } (DF)^{0,2} &= 2N^0(J(\cdot), \cdot, \cdot) + \frac{1}{3}(dF)^- \quad ((N(J(\cdot), \cdot, \cdot))^0 = N^0(J(\cdot), \cdot, \cdot)). \end{aligned}$$

4. De $b((DF)^{2,0}) = \frac{1}{3}(dF)^+$, on déduit, par (2.2),

$$(DF)^{2,0} = \frac{3}{2} \left(b((DF)^{2,0}) - \mathcal{M}(b((DF)^{2,0})) \right) = \frac{1}{2} \left((dF)^+ - \mathcal{M}((dF)^+) \right). \quad \square$$

Remarque 2.5 Si $\psi \in \Omega^{2,0}(TM)$, $\psi(J(\cdot), \cdot, \cdot) \in \Omega^{2,0}(TM)$ mais

$$b(\psi(J(\cdot), \cdot, \cdot)) \neq (b(\psi))(J(\cdot), \cdot, \cdot).$$

Idem si $\psi \in \Omega^{1,1}(TM)$.

Corollaire 2.3 On a équivalence entre

$$DJ = 0$$

et

$$\begin{cases} (dF)^+ = 0 \\ J \text{ est intégrable} \end{cases}$$

Preuve:

Si $DJ = 0$, alors par définition de DF , $DF = 0$; en particulier $(dF)^+ = 0$.

De plus, $(DF)^{0,2} = 0$ entraîne $N = 0$ donc par (2.1), (M, J) est complexe.

Réciproquement, si $(dF)^+ = 0$ et $N = 0$, alors

$$\begin{aligned} (DF)^{2,0} &= \frac{1}{2} \left((dF)^+ - \mathcal{M}((dF)^+) \right) = 0 \\ \text{et } \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM), \quad (DF)^{0,2}(X, Y, Z) &= N(J(X), Y, Z) + N(J(Y), X, Z) \\ &\quad - N(J(Z), X, Y) \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'où $DF = 0$, puis $DJ = 0$. \square

Terminologie: Une variété presque-hermitienne (M, J, g) de tenseur de Nijenhuis N , de connexion canonique D et de forme de Kähler F est dite

- *kählérienne* si et seulement si J est D -parallèle, i.e. $DJ = 0$
- *symplectique* (resp. *(2,1)-symplectique*) si et seulement si F est fermée, i.e. $dF = 0$ (resp. $(dF)^+ = 0$).

Ainsi le précédent corollaire montre que (M, J, g) est kählérienne si et seulement si (M, J, g) est à la fois (2,1)-symplectique et hermitienne.

Chapitre 3

Connexions hermitiennes sur une variété presque-hermitienne

On reprend dans toute cette partie les notations du précédent paragraphe, et on suppose encore $n > 2$.

3.1 Potentiel et torsion d'une connexion hermitienne

Définition 3.1 Soit (M, J, g) une variété presque-hermitienne. On appelle connexion hermitienne sur M toute connexion linéaire ∇ sur TM satisfaisant:

$$\begin{aligned}\nabla g &= 0, \text{ i.e. } \nabla \text{ est métrique} \\ \nabla J &= 0, \text{ i.e. } J \text{ est } \nabla\text{-parallèle.}\end{aligned}$$

Définition 3.2 Soit ∇ une connexion hermitienne sur une variété presque-hermitienne (M, J, g) . Le potentiel de ∇ est le $(1,2)$ -tenseur A sur M défini par:

$$A = \nabla - D.$$

La torsion de ∇ est le $(1,2)$ -tenseur T sur M défini par:

$$\forall X, Y \in \Gamma(TM), \quad T_X Y = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

On identifie, par g , A et T à des $(0,3)$ -tenseurs sur M en posant:

$$\begin{aligned}\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM), \quad A(X, Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) - g(D_X Y, Z) \\ T(X, Y, Z) &= g(X, T_Y Z)\end{aligned}$$

∇ et D étant métriques, A est un élément de $\Omega^2(TM)$. D'autre part, puisque $T_X Y = -T_Y X$, T est aussi élément de $\Omega^2(TM)$. D étant sans torsion, on vérifie alors aisément que

$$\begin{aligned}T &= -A + 3b(A) \\ A &= -T + \frac{3}{2}b(T)\end{aligned}$$

Remarques 3.1

1. Par ce qui précède, ∇ est sans torsion si et seulement si $\nabla = D$.

2. Si ∇ est métrique, alors J est ∇ -parallèle si et seulement si A satisfait

$$\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM), \quad A(X, J(Y), Z) + A(X, Y, J(Z)) = -DF(X, Y, Z).$$

On peut donc voir l'ensemble des connexions hermitiennes sur (M, J, g) comme un espace affine de direction $\Omega^{1,1}(TM)$ (Cf (2.2)).

3.2 Détermination d'une connexion hermitienne par sa torsion

Comme on vient de le voir, une connexion hermitienne sur une variété presque-hermitienne est entièrement donnée par son potentiel, et par la correspondance bijective précédente, par sa torsion T . On va en fait montrer que T ne peut être choisie arbitrairement, mais qu'elle dépend entièrement de ses composantes dans $\Omega^{3,+}(M)$ et $\Omega_s^{1,1}(TM)$.

Proposition 3.1 *Soit ∇ une connexion hermitienne sur (M, J, g) et T sa torsion.*

1. $T^{0,2} = N$ en particulier $T^{0,2}$ est indépendant de ∇
2. $T^{2,0} - \Phi^{-1}(T_a^{1,1}) = \frac{1}{2} \left((d^c F)^+ - \mathcal{M}((d^c F)^+) \right) = (DF)^{2,0}(J(\cdot), \cdot, \cdot)$, ou, de manière équivalente, $b(T^{2,0} - T_a^{1,1}) = \frac{1}{3} (d^c F)^+$; en particulier $b(T^{2,0} - T_a^{1,1})$ est indépendant de ∇ .
3. Pour tout ψ^+ dans $\Omega^{3,+}(M)$, pour tout B_s dans $\Omega_s^{1,1}(TM)$, il existe une unique connexion hermitienne ∇ telle que $T_s^{1,1} = B_s$ et $(b(T))^+ = \psi^+$. T est alors donnée par:

$$T = N + \frac{1}{8} (d^c F)^+ - \frac{3}{8} \mathcal{M}((d^c F)^+) + \frac{9}{8} \psi^+ - \frac{3}{8} \mathcal{M}(\psi^+) + B_s.$$

Preuve:

1. Comme on l'a vu dans la remarque 2. précédente, A est le potentiel d'une connexion hermitienne si et seulement si $A \in \Omega^2(TM)$ et A satisfait

$$\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM), \quad A(X, J(Y), Z) + A(X, Y, J(Z)) = -DF(X, Y, Z),$$

donc si et seulement si

$$T(X, J(Y), Z) + T(X, Y, J(Z)) - \frac{3}{2} \left(b(T)(X, J(Y), Z) + b(T)(X, Y, J(Z)) \right) = DF(X, Y, Z). \quad (3.1)$$

Or, si $\psi \in \Omega^2(TM)$, $\psi(\cdot, J(\cdot), \cdot) + \psi(\cdot, \cdot, J(\cdot)) \in \Omega^2(TM)$ et

$$(\psi(\cdot, J(\cdot), \cdot) + \psi(\cdot, \cdot, J(\cdot)))^{0,2} = 2\psi^{0,2}(\cdot, J(\cdot), \cdot) \text{ (calcul facile),}$$

donc en identifiant les composantes des deux membres, on a:

$$\begin{aligned} 2T^{0,2}(\cdot, J(\cdot), \cdot) - 3b(T)^{0,2}(\cdot, J(\cdot), \cdot) &= (DF)^{0,2} \\ \text{i.e. } 2T^{0,2}(\cdot, J(\cdot), \cdot) - 3b(T)^-(\cdot, J(\cdot), \cdot) &= (DF)^{0,2} \end{aligned}$$

Or $b(T)^- = b(T^{0,2})$ car $b(T^{2,0} + T^{1,1}) \in \Omega^{3,+}(M)$, donc

$$-b(T^{0,2})(X, Y, Z) = -b((DF)^{0,2})(X, J(Y), Z).$$

De plus, $b((DF)^{0,2})(X, J(Y), Z) = \frac{1}{3} (dF)^-(X, J(Y), Z) = \frac{1}{3} (d^c F)^-(X, Y, Z)$, d'où $b(T^{0,2}) = b(N)$. On en déduit que $2(T^{0,2})^0 - \frac{1}{3} (d^c F)^- = 2N^0 - \frac{1}{3} (d^c F)^-$, d'où $T^{0,2} = N$.

2. De (3.1), on tire

$$(DF)^{2,0} = -2T^{2,0}(J(\cdot), \cdot, \cdot) - \frac{3}{2} \left(b(T^+)(\cdot, J(\cdot), \cdot) + b(T^+)(\cdot, \cdot, J(\cdot)) \right),$$

$$\begin{aligned} \text{i.e. } (DF)^{2,0}(J(\cdot), \cdot, \cdot) &= 2T^{2,0} - \frac{3}{2}(b(T)^+ - \mathcal{M}(b(T)^+))(J(\cdot), J(\cdot), \cdot) \\ &= 2T^{2,0} - \frac{3}{2}(b(T)^+ - \mathcal{M}(b(T)^+))(\cdot, \cdot, \cdot) \\ &= 2T^{2,0} - T^{2,0} - \Phi^{-1}(T_a^{1,1}). \end{aligned}$$

3. Le dernier résultat est un calcul aisé. \square

Remarque 3.1 *On a utilisé la remarque suivante:*

$$\forall \psi \in \Omega^2(TM), \quad b(\psi^{0,2}) = (b(\psi))^{0,2}.$$

3.3 Connexion hermitienne de torsion de norme minimale

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux connexions hermitiennes ayant la torsion 'la plus petite possible': on montre qu'étant donnée une structure presque-hermitienne sur M , il existe une unique torsion, et donc une unique connexion hermitienne sur M , vérifiant cette condition.

Pour cela, décomposons ψ^+ dans $\Omega^{3,+}(M)$ sous la forme

$$\psi^+ = \frac{2f-1}{3}(d^c F)^+ + \psi_0^+, \quad f \in C^\infty(M), \quad \psi_0^+ \perp (d^c F)^+.$$

Proposition 3.2 *Avec les notations précédentes, T se met sous la forme*

$$T = N + \frac{3f-1}{4}(d^c F)^+ - \frac{f+1}{4}\mathcal{M}((d^c F)^+) + \frac{9}{8}\psi_0^+ - \frac{3}{8}\mathcal{M}(\psi_0^+) + B_s.$$

Par conséquent,

$$|T|^2 \geq |N^0|^2 + \frac{1}{3}|dF|^2,$$

et on a égalité si et seulement si

$$T_s^{1,1} = 0 \text{ et } (b(T))^+ = -\frac{1}{9}(d^c F)^+,$$

$$\text{i.e. si et seulement si } T = N - \frac{1}{3}\mathcal{M}((d^c F)^+).$$

Preuve: La première égalité s'obtient aisément grâce à (3.1).

De plus,

$$T = N^0 + b(N) + \frac{3f-1}{4}(d^c F)^+ - \frac{f+1}{4}\mathcal{M}((d^c F)^+) + \frac{9}{8}\psi_0^+ - \frac{3}{8}\mathcal{M}(\psi_0^+) + B_s,$$

et les termes de cette somme sont deux à deux orthogonaux:

$B_s \perp \Omega^3(M)$ car $B_s \in \ker(b)$; de même, $B_s \perp \mathcal{M}(\psi^+) \quad \forall \psi^+ \in \Omega^{3,+}(M)$

$\psi_0^+ \perp b(N)$ car $\forall (\omega, \omega') \in \Omega^{3,+}(M) \times \Omega^{3,-}(M)$, $(\omega, \omega') = 0$.
 $\psi_0^+ \perp \mathcal{M}((d^c F)^+)$ car

$$\begin{aligned} (\psi_0^+, \mathcal{M}((d^c F)^+)) &= (\mathcal{M}(\psi_0^+), (d^c F)^+) \\ &= (\mathcal{M}(\psi_0^+), b((d^c F)^+)) \text{ car } b((d^c F)^+) = (d^c F)^+ \\ &= (b(\mathcal{M}(\psi_0^+)), (d^c F)^+) \text{ avec } b(\mathcal{M}(\psi_0^+)) = \frac{1}{3}\psi_0^+ \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc en prenant le carré de la *norme tensorielle* de chaque membre,

$$|T|^2 = |N^0|^2 + |b(N)|^2 + \left(\frac{3f-1}{4}\right)^2 |(d^c F)^+|^2 + \left(\frac{f+1}{4}\right)^2 |(d^c F)^+|^2 - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3f-1}{4}\right)\left(\frac{f+1}{4}\right) |(d^c F)^+|^2 +$$

$$\frac{81}{64} |\psi_0^+|^2 + \frac{9}{64} |\psi_0^+|^2 - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{9}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right) |\psi_0^+|^2 + |B_s|^2,$$

soit, avec les normes appropriées à chaque composante,

$$\begin{aligned} |T|^2 &= |N^0|^2 + \frac{1}{3} |(d^c F)^-|^2 + \frac{1}{2} (3f^2 - 2f + 1) |(d^c F)^+|^2 + \frac{27}{8} |\psi_0^+|^2 + |B_s|^2 \\ &\geq |N^0|^2 + \frac{1}{3} |(dF)^-|^2 + \frac{1}{3} |(dF)^+|^2 \text{ car } |d^c F| = |dF|, \end{aligned}$$

i.e. $|T|^2 \geq |N^0|^2 + \frac{1}{3} |dF|^2$. \square

Corollaire 3.1 *Pour une structure presque-hermitienne (g, J) sur M donnée, il existe une unique connexion hermitienne, ∇^{min} , sur (M, J, g) , caractérisée par le fait que sa torsion soit de norme minimale en tout point de M .*

∇^{min} est donnée par la relation:

$$\begin{aligned} g(\nabla_X^{min} Y, Z) &= g(D_X Y, Z) - g(X, N(Y, Z)) + \frac{1}{2} (d^c F)(X, Y, Z) - \frac{1}{6} (d^c F)^+(X, Y, Z) \\ &+ \frac{1}{3} (d^c F)^+(X, J(Y), J(Z)). \end{aligned}$$

Chapitre 4

Structures de Weyl et géométrie spinorielle

4.1 Structures de Weyl sur une variété conforme

4.1.1 Quelques fibrés sur une variété conforme

Définition 4.1

1. Une variété conforme est un couple (M, c) où M est une variété et c la classe conforme d'une métrique g sur M , i.e.

$$c = [g] = \{e^{2u}g, \quad u \in C^\infty(M)\}.$$

2. Le groupe conforme d'ordre n est le groupe

$$\text{CO}_n = \{\lambda f, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad f \in \text{O}_n\} \cong \text{O}_n \times \mathbb{R}_+^*.$$

On peut naturellement construire sur M le CO_n -fibré

$$\text{COM} = \coprod_{x \in M} \{(e_1, \dots, e_n) \in (T_x M)^n : \exists h \in c : (e_1, \dots, e_n) \text{ } h_x\text{-orthonormée}\}.$$

Clairement,

$$\text{COM} = \bigcup_{g \in c} \text{O}_g M.$$

On peut dès lors associer à toute représentation linéaire

$$\nu : \text{CO}_n \longrightarrow \text{Aut}_K(V),$$

où $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , un fibré vectoriel

$$E^\nu = \text{COM} \times_\nu V.$$

Par définition, le poids de la représentation ν (et du fibré E^ν) est le scalaire w dans K tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \nu(tI_n) = t^w \text{Id}_V.$$

Exemples:

1) Notons, dans toute la suite, $\rho : \text{CO}_n \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ la représentation naturelle de CO_n sur \mathbb{R}^n . Alors

$$TM = \text{COM} \times_\rho \mathbb{R}^n,$$

en particulier TM est un fibré de poids 1.

2) Soit

$$\begin{aligned} \rho^* : \text{CO}_n &\longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}}((\mathbb{R}^n)^*) \\ f &\longmapsto {}^t f^{-1} \end{aligned}$$

Alors

$$T^*M = COM \times_{\rho^*} (\mathbb{R}^n)^*,$$

en particulier T^*M est un fibré de poids -1.

3) Soit ρ^w la représentation de poids w définie par

$$\begin{aligned} \rho^w : CO_n &\longrightarrow Aut_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \\ (v, t) &\longmapsto t^w \rho(v) \end{aligned}$$

Par définition, le *fibré des vecteurs de poids w* est défini par

$$T^w M = COM \times_{\rho^w} \mathbb{R}^n$$

Définition 4.2 *Pour tout nombre réel k , le fibré des scalaires de poids k est le fibré réel en droites défini par*

$$\mathcal{L}^k = COM \times_{|\det|^{\frac{k}{n}}} \mathbb{R}.$$

Remarques 4.1

1. Puisque $|\det|^{\frac{k}{n}} > 0$, \mathcal{L}^k admet une section globale partout non nulle, donc est trivial.
2. Comme $|\det|^{\frac{k}{n}} |\det|^{\frac{l}{n}} = |\det|^{\frac{k+l}{n}}$, et que $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, alors

$$\mathcal{L}^k \otimes \mathcal{L}^l \cong \mathcal{L}^{k+l}.$$

Définition 4.3

1. Le fibré AM des $(1,1)$ -tenseurs c -antisymétriques est défini indépendamment du choix d'une métrique g de c par:

$$AM = O_g M \times_{Ad} \mathfrak{o}_n,$$

où $Ad : O_n \longrightarrow Aut_{\mathbb{R}}(\mathfrak{o}_n)$.

2. Le fibré $ad(COM)$ est donné par:

$$ad(COM) = COM \times_{Ad} \mathfrak{co}_n,$$

où $Ad : CO_n \longrightarrow Aut_{\mathbb{R}}(\mathfrak{co}_n)$.

Puisque $CO_n \cong O_n \times \mathbb{R}_+^*$, alors $\mathfrak{co}_n = \mathfrak{o}_n \oplus \mathbb{R}I_n$, d'où

$$ad(COM) = AM \oplus \mathbb{R}I,$$

où $\mathbb{R}I$ est le fibré en droites engendré par $I = Id_{TM}$. Les fibrés AM et $ad(COM)$ sont de poids 0.

Proposition 4.1 *Considérons le fibré des $(0,2)$ -tenseurs symétriques sur M*

$$S^2 T^* M = COM \times_{\rho_2} S^2 \mathbb{R}^{n*},$$

$$\begin{aligned} \text{où } \rho_2 : CO_n &\longrightarrow Aut_{\mathbb{R}}(S^2 \mathbb{R}^{n*}) \\ f &\longmapsto \rho^*(f) \otimes \rho^*(f). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{La trace conforme } tr : S^2 T^* M &\longrightarrow S^2 T^* M \\ \psi &\longmapsto \frac{1}{n} tr_g(\psi) \end{aligned}$$

est un projecteur orthogonal. En particulier, $S^2 T^* M$ se décompose orthogonalement sous la forme:

$$S^2 T^* M = S_0^2 T^* M \oplus \mathbb{R}g,$$

où $S_0^2 T^* M = \{\psi \in S^2 T^* M, \quad tr(\psi) = 0\}$.

On obtient ainsi les identifications suivantes :

– La structure conforme c sur M détermine l'isomorphisme:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}g &\longrightarrow \mathcal{L}^{-2} \\ g' &\longmapsto [(e_1, \dots, e_n), \frac{1}{n} \text{tr}_g(g')], \text{ où } g \in c, \quad (e_1, \dots, e_n) \text{ } g\text{-orthonormée.} \end{aligned}$$

Le choix d'une métrique dans c est alors identifié au choix d'une section de \mathcal{L}^{-2} , plus précisément, à g on associe $l_g^{-2} = [(e_1, \dots, e_n), 1]$ avec (e_1, \dots, e_n) g -orthonormée.

– La structure conforme c peut être vue comme une section du fibré $S^2T^*M \otimes \mathcal{L}^2$. En effet,

$$\begin{aligned} \{\text{Structures conformes sur } M\} &\longrightarrow \Gamma(S^2T^*M \otimes \mathcal{L}^2) \\ c &\longmapsto g \otimes l_g^2, \end{aligned}$$

où $l_g^2 = l_g \otimes l_g$, est injective par trivialité de \mathcal{L}^1 . Ainsi, c est assimilée à $g \otimes l_g^2$.

– Si ω est une 1-forme de connexion sur COM , soit D (resp. $D^{\mathcal{L}^k}$) la dérivée covariante induite sur TM (resp. sur \mathcal{L}^k). Alors

$$\forall \phi, \psi \in \Gamma(\mathcal{L}^1), \quad D^{\mathcal{L}^2}(\psi \otimes \phi) = (D^{\mathcal{L}^1}\psi) \otimes \phi + \psi \otimes D^{\mathcal{L}^1}\phi,$$

i.e. $D^{\mathcal{L}^2}$ coïncide avec $D^{\mathcal{L}^1}$ passée à $\mathcal{L}^1 \otimes \mathcal{L}^1$. On notera encore $D^{\mathcal{L}^1}$ cette connexion linéaire sur \mathcal{L}^2 .

De plus, si $s \in \Gamma(\otimes^q T^*M \otimes \mathcal{L}^2)$, la dérivée covariante induite par ω sur $\otimes^q T^*M \otimes \mathcal{L}^2$ est donnée pour tout champ de vecteurs X sur M par :

$$(D_X s)(X_1, \dots, X_q) = D_X^{\mathcal{L}^1}(s(X_1, \dots, X_q)) - \sum_{i=1}^q s(X_1, \dots, D_X X_i, \dots, X_q).$$

4.1.2 Le théorème de Weyl

Définition 4.4 Une structure de Weyl sur une variété conforme (M, c) est une connexion linéaire D sur TM qui est

- induite par une 1-forme de connexion sur COM
- sans torsion, i.e. $\forall X, Y \in \Gamma(TM), \quad D_X Y - D_Y X = [X, Y]$.

Remarques 4.2

1. Une connexion linéaire D sur TM provient d'une 1-forme de connexion sur COM si et seulement si $Dc = 0$.
2. Toute connexion de Levi-Civita d'une métrique de c est une structure de Weyl: en effet, pour $g \in c$, soit

$$\begin{aligned} s_g : U &\longrightarrow COM \\ x &\longmapsto (X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

une section locale sur un ouvert U de M , avec (X_1, \dots, X_n) g -orthonormée; ω_g étant la 1-forme de connexion induite sur $O_g M$ par la connexion de Levi-Civita D^g de g , $s_g^* \omega_g$ est à valeurs dans $\mathfrak{o}_n \subset \mathfrak{co}_n$.

Théorème 4.1 (Weyl) Il existe une correspondance bijective entre les structures de Weyl sur (M, c) et les connexions linéaires sur \mathcal{L}^1 . Plus précisément,

$$\begin{aligned} \{\text{Structures de Weyl sur } M\} &\longrightarrow \{\text{Connexions linéaires sur } \mathcal{L}^1\} \\ D &\longmapsto D^{\mathcal{L}^1} \end{aligned}$$

est un isomorphisme affine.

Preuve: Si D est une structure de Weyl sur M , en utilisant tour à tour $Dc = 0$ et $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$, on obtient l'analogie de la formule de Koszul dans le cas conforme:

$\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$,

$$c(D_X Y, Z) = \frac{1}{2} \left(D_X^{\mathcal{L}^1}(c(Y, Z)) + D_Y^{\mathcal{L}^1}(c(Z, X)) - D_Z^{\mathcal{L}^1}(c(X, Y)) + c([X, Y], Z) \right. \\ \left. - c([Y, Z], X) + c([Z, X], Y) \right).$$

Ceci prouve l'unicité de D étant donnée $D^{\mathcal{L}^1}$. De plus, on vérifie bien que si $D^{\mathcal{L}^1}$ est une connexion linéaire sur \mathcal{L}^1 , alors D donnée par la formule ci-dessus (c est non-dégénérée) est une structure de Weyl sur (M, c) , et que la connexion induite sur \mathcal{L}^1 par D est $D^{\mathcal{L}^1}$.

Enfin, si $D_0^{\mathcal{L}^1}$ est une connexion linéaire fixée sur \mathcal{L}^1 , et D_0 la structure de Weyl associée sur (M, c) , pour n'importe quelle connexion linéaire $D_1^{\mathcal{L}^1}$ sur \mathcal{L}^1 , il existe β dans $\Omega^1(M)$ tel que:

$$\forall l \in \Gamma(\mathcal{L}^1), \quad (D_1^{\mathcal{L}^1} - D_0^{\mathcal{L}^1})l = \beta \otimes l,$$

et dans ce cas la structure de Weyl associée D_1 sur (M, c) est donnée par $D_1 - D_0 = \tilde{\beta}$, où

$$\forall g \in c, \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM), \quad \tilde{\beta}(X)(Y) = \beta(X)Y + \beta(Y)X - g(X, Y)\beta^{\sharp g}.$$

On en déduit la dépendance affine de D par rapport à $D^{\mathcal{L}^1}$. \square

Définition 4.5 Soit D une structure de Weyl sur (M, c) . D est dite :

- fermée si et seulement si pour tout x de M , il existe un voisinage ouvert U de x dans M et une section partout non nulle $s : U \rightarrow \mathcal{L}^1$ telle que $D|_U s = 0$.
- exacte si et seulement si il existe une section partout non nulle $s : M \rightarrow \mathcal{L}^1$ telle que $D^{\mathcal{L}^1} s = 0$.

Proposition 4.2 Soit D une structure de Weyl sur (M, c) . Il y a équivalence entre:

1. La connexion D est fermée
2. $\forall x \in M, \exists U \in V_M(x)$ ouvert et $g \in c : D|_U l_g = 0$
3. La connexion D est localement la connexion de Levi-Civita d'une métrique de c .

Preuve: Pour 1 \iff 2, il suffit de remarquer que toute section (locale ou globale) partout non nulle de \mathcal{L}^1 est, quitte à changer son signe, de la forme l_g , où $g \in c$. Soit en effet, pour $g \in c$ fixée, $s : U \rightarrow O_g M$ une section, et $\hat{s} = [s, \gamma]$ une section partout non nulle de \mathcal{L}^1 sur un ouvert U de M . Quitte à changer \hat{s} en $-\hat{s}$, on peut supposer que $\gamma(x) > 0$ pour tout x de U . Posons $h(x) = \gamma(x)I_n$, $e^{-u(x)} = \gamma(x)$ et $\bar{g} = e^{2u}g$. Alors

$$\hat{s}(x) = [s(x)h(x), |det(h^{-1}(x))|^{\frac{1}{n}} \gamma(x)] = [\bar{s}(x), 1], \text{ où } \bar{s}(x) = s(x)h(x),$$

i.e. $\hat{s}(x) = l_{\bar{g}}(x) \quad \forall x \in U$.

Pour 2 \iff 3, il faut encore remarquer que $D|_U l_g = 0 \iff D|_U = D|_U^g$. En effet

$$0 = Dc = (Dg) \otimes l_g^2 + 2(D^{\mathcal{L}^1} l_g) \otimes l_g$$

$$\text{donc } D|_U = D|_U^g \iff D|_U g = 0 \text{ (unicité de } D^g) \\ \iff D|_U^{\mathcal{L}^1} l_g = 0. \quad \square$$

Remarques 4.3

1. Pour toute métrique g de c , D^g est fermée.

2. Soit D (resp. D') une structure de Weyl de dérivée covariante associée sur $\mathcal{L}^1 D^{\mathcal{L}^1}$ (resp. $D'^{\mathcal{L}^1}$), avec $D'^{\mathcal{L}^1} = D^{\mathcal{L}^1} + \beta$, $\beta \in \Omega^1(M)$. Par le théorème de Weyl, si D est fermée,

$$\begin{aligned} \text{alors } D' \text{ est fermée} &\iff \forall U \subset M, \exists l' \in \Gamma(\mathcal{L}^1_U), D'_{|U} l' = 0 \\ &\iff \forall U \subset M, \exists \alpha : U \rightarrow \mathbb{R}, d\alpha \otimes l + \alpha \otimes D'_{|U} l = 0, \\ \text{où } D'_{|U} l &= 0, \\ &\iff \forall U \subset M, \exists \alpha : U \rightarrow \mathbb{R}, \beta = -\frac{d\alpha}{\alpha} \\ &\iff \beta \text{ est fermée.} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des structures de Weyl fermées sur (M, c) est isomorphe, en tant qu'espace affine, à l'espace des 1-formes fermées sur M .

3. On peut, pour $g \in c$, lier D à D^g par:

$$D_X Y = D_X^g Y + \theta^g(X)Y + \theta^g(Y)X - g(X, Y)(\theta^g)^{\sharp g}$$

où $D_X^{\mathcal{L}^1} l_g = \theta^g(X)l_g$. θ^g est appelée la forme de Lee de g pour la structure de Weyl D . Celle-ci est alors fermée si et seulement si pour toute métrique g de c , θ^g est fermée, ou encore si et seulement si pour une métrique g de c , θ^g est fermée.

De manière analogue, on a :

Proposition 4.3 Soit D une structure de Weyl sur (M, c) . Les assertions suivantes sont équivalentes:

1. La connexion D est exacte
2. Il existe une métrique g dans c telle que $D^{\mathcal{L}^1} l_g = 0$
3. La connexion D coïncide avec la connexion de Levi-Civita d'une métrique de c .

De même que précédemment, pour toute métrique g dans c , D^g est exacte; l'espace des structures de Weyl exactes est affinement isomorphe à l'espace des 1-formes exactes sur M , et D est exacte si et seulement si pour une (resp. toute) métrique g de c , θ^g est exacte.

Remarque 4.1 Si $\omega \in \Gamma(T^*COM \otimes \mathfrak{co}_n)$ est la 1-forme de connexion induisant D sur TM , ω se décompose sous la forme:

$$\omega = \omega' + \theta' \otimes I_n,$$

où $\omega' \in \Gamma(T^*M \otimes \mathfrak{o}_n)$ et $\theta' \in \Omega^1(M)$. Alors

$$D \text{ est fermée (resp. exacte)} \iff \theta' \text{ est fermée (resp. exacte).}$$

En effet, pour g dans c , $\theta'_{|O_g M} = \pi^* \theta^g$ avec $\pi : COM \rightarrow M$ l'application pied.

4.1.3 Décompositions du tenseur de courbure d'une structure de Weyl

Soit D une structure de Weyl sur (M, c) . On note R^D le tenseur de courbure de D , i.e. le (1,3)-tenseur sur M défini par:

$$\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM), \quad R^D_{X, Y} Z = D_{[X, Y]} Z - [D_X, D_Y] Z.$$

$R^D_{X, Y}$ est clairement antisymétrique en (X, Y) , et D étant sans torsion, R^D vérifie les deux identités de Bianchi. Mais, à la différence du cadre riemannien, R^D ne donne pas un endomorphisme de AM :

Proposition 4.4 Le tenseur de courbure R^D d'une structure de Weyl D sur (M, c) se décompose orthogonalement de la manière suivante:

$$R^D = \tilde{R}^D + \tilde{\rho}^D,$$

où

$$\begin{cases} \tilde{R}^D \text{ est un } (1,3)\text{-tenseur de type Riemann} \\ \tilde{\rho}^D \text{ est déduit du tenseur de courbure } \rho^D \text{ de } D^{\mathcal{L}^1} \text{ par} \\ \tilde{\rho}^D(X,Y) = \rho^D(X,Y)I + \frac{1}{2}[\rho^D, X \wedge Y] \end{cases}$$

De plus, $\tilde{\rho}^D = 0 \iff D$ est fermée.

Preuve: On fixe g dans c et on utilise la relation:

$$D_X Y = D_X^g Y + \theta^g(X)Y + \theta^g(Y)X - g(X,Y)(\theta^g)^{\sharp g}$$

pour exprimer R^D . Il vient

$$R_{X,Y}^D = R_{X,Y}^{D^g} Z + \tilde{\rho}^D(X,Y)Z + A_g^D(X,Y,Z),$$

où

$$\begin{aligned} A_g^D(X,Y,Z) &= \frac{1}{2}(D_Z^g \theta^g(Y) + D_Y^g \theta^g(Z) - 2\theta^g(Y)\theta^g(Z) + 2g(Y,Z))X \\ &\quad - \frac{1}{2}(D_Z^g \theta^g(X) + D_X^g \theta^g(Z) - 2\theta^g(X)\theta^g(Z) + 2g(X,Z))Y \\ &\quad + \frac{1}{2}g(Y,Z)((D^g \theta^g(X))^{\sharp g} + (D_X^g \theta^g)^{\sharp g}) - \frac{1}{2}g(X,Z)((D^g \theta^g(Y))^{\sharp g} + (D_Y^g \theta^g)^{\sharp g}) \\ &\quad + (\theta^g(Y)g(X,Z) - \theta^g(X)g(Y,Z))(\theta^g)^{\sharp g} \end{aligned}$$

On montre directement que $Z \mapsto A_g^D(X,Y,Z)$ est c -antisymétrique et que $\tilde{\rho}$, et donc A_g^D , vérifie la première identité de Bianchi. On pose alors $\tilde{R}^D = R^{D^g} + A_g^D$.

Enfin, pour toute métrique g de c , $d\theta^g = -\rho^D$, d'où le dernier résultat. \square

On veut maintenant affiner la décomposition en scindant \tilde{R}^D comme dans le cas riemannien. Pour cela, on construit le projecteur orthogonal

$$tr_{24}^c : \mathcal{C}(TM) \longrightarrow \mathcal{C}(TM),$$

où $\mathcal{C}(TM) = \{(1,3)\text{-tenseurs de type Riemann sur } TM\}$, par composition des applications suivantes:

•

$$\begin{aligned} tr_{24} : \mathcal{C}(TM) &\longrightarrow \Gamma(S^2 T^* M) \\ R &\longmapsto tr_{24}(R) \end{aligned}$$

avec $tr_{24}(R)(X,Y) = trace(Z \mapsto R_{X,Z} Y)$;

•

$$S^2 T^* M = S_0^2 T^* M \oplus \mathbb{R}g \text{ (par la trace conforme)}$$

•

$$\begin{aligned} \Gamma(S_0^2 T^* M) &\longmapsto \mathcal{C}(TM) \\ b &\longmapsto \frac{1}{n-2} b \bar{\wedge} c \end{aligned}$$

où

$$g(b \bar{\wedge} c(X,Y,Z), T) = b \bar{\wedge} g(X,Y,Z, T)$$

et $b \bar{\wedge} g(X,Y,Z, T) = b(X,Z)g(Y, T) + b(Y, T)g(X, Z) - b(X, T)g(Y, Z) - b(Y, Z)g(X, T)$;

•

$$\begin{aligned} \mathbb{R}g &\longrightarrow \mathcal{C}(TM) \\ h &\longmapsto \frac{1}{2(n-1)}h\bar{\wedge}c. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$tr_{24}^c(R) = \frac{1}{n-2} \left(tr_{24}(R) - tr(tr_{24}(R)) \right) \bar{\wedge}c + \frac{1}{2n(n-1)} tr \left(tr_{24}(R) \right) \bar{\wedge}c.$$

Définition 4.6 Soit D une structure de Weyl sur (M^n, c) . Le tenseur de Weyl de D est le $(1,3)$ -tenseur de type Riemann W donné par :

$$W = \widetilde{R}^D - tr_{24}^c(\widetilde{R}^D),$$

i.e. W est la composante sans trace de la partie de type Riemann de R^D .

On peut déduire de ce qui précède la décomposition orthogonale :

$$R^D = \widetilde{Ric}_0^D + \widetilde{Scal}^D + W + \tilde{\rho}^D,$$

où $tr_{24}(\widetilde{R}^D) = \widetilde{Ric}_0^D + \widetilde{Scal}^D$ est la décomposition issue de (4.1).

On peut en fait montrer que W ne dépend que de c :

Théorème 4.2 Soit (M^n, c) une variété conforme munie d'une structure de Weyl D et g une métrique de c . Soit W^g le tenseur de Weyl de D^g . Alors

$$W^g = W,$$

en particulier W est indépendant de la structure de Weyl choisie sur (M^n, c) .

Preuve: On a montré que $\widetilde{R}^D = R^{D^g} + A_g^D$. Or $R^{D^g} = Ric^{D^g} + W^g$, décomposition g - (et donc c -) orthogonale. Par conséquent, il suffit de prouver que $tr_{24}^c(A_g^D) = A_g^D$ pour montrer le résultat. Or, un calcul simple donne $g(tr_{24}^c(A_g^D)(X, Y, Z), T) = g(A_g^D(X, Y, Z), T)$. \square

Sachant que (Cf (4.4))

$$\forall (X, Y) \in (\Gamma(TM))^2, \quad R_{X, Y}^D \in ad(COM),$$

on peut aussi écrire $R_{X, Y}^D$ sous la forme

$$R_{X, Y}^D = (R_A^D)_{X, Y} + \rho^D(X, Y)I$$

où $(R_A^D)_{X, Y} \in AM$. Grâce à (4.4), on a :

$$(R_A^D)_{X, Y} = \widetilde{R}_{X, Y}^D + \frac{1}{2}[\rho^D, X \wedge Y].$$

Définition 4.7 Soit D une structure de Weyl sur (M, c) . On note

$$\begin{aligned} Ric^D : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto tr(Z \mapsto R_{X, Z}^D Y) \end{aligned}$$

le tenseur de Ricci de D ,

$$\begin{aligned} Ric'^D : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto tr(Z \mapsto (R_A^D)_{X, Z} Y), \end{aligned}$$

Ric_0^D la partie symétrique sans trace de Ric^D (ou de Ric'^D) et $Scal^D$ la trace conforme de Ric^D (ou de Ric'^D).

Les (0,2)-tenseurs ainsi définis sont liés par:

$$\begin{aligned} Ric^D &= Ric'^D + \rho^D \\ Ric^D &= Ric_0^D + Scal^D + \frac{n}{2}\rho^D. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} R^D &= \frac{1}{n-2} Ric_0^D \bar{\wedge} c + \frac{1}{2(n-1)} Scal^D \bar{\wedge} c + W + \tilde{\rho}^D \\ Scal^D &= \frac{1}{n} Scal_g^D g = \frac{1}{n} Scal_g^D l_g^{-2} \text{ où } Scal_g^D = tr_g(Ric^D) \end{aligned}$$

Proposition 4.5 *Le (1,3)-tenseur R_A^D vérifie : pour tous champs de vecteurs X, Y, Z et T sur M ,*
 $c((R_A^D)_{X,Y}Z,T) - c((R_A^D)_{Z,T}X,Y) = \rho^D(X,Z)c(Y,T) + \rho^D(T,X)c(Y,Z)$
 $+ \rho^D(Z,Y)c(X,T) + \rho^D(Y,T)c(X,Z)$ (4.1)

Preuve: On utilise $R_A^D(X,Y) = \tilde{R}^D(X,Y) + \frac{1}{2}[\rho^D, X \wedge Y]$: puisque \tilde{R}^D est de type Riemann, \tilde{R}^D donne une endomorphisme symétrique de $\bigwedge^2 TM$, donc

$$c((R_A^D)_{X,Y}Z,T) - c((R_A^D)_{Z,T}X,Y) = \frac{1}{2}c([\rho^D, X \wedge Y]Z,T) - \frac{1}{2}c([\rho^D, Z \wedge T]X,Y).$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}c([\rho^D, X \wedge Y]Z,T) &= \frac{1}{2}c((\rho^D(X) \wedge Y - \rho^D(Y) \wedge X)Z,T) \\ &= \frac{1}{2}c(\rho^D(X,Z)Y - g(Y,Z)\rho^D(X)^{\sharp g} - \rho^D(Y,Z)X + g(X,Z)\rho^D(Y)^{\sharp g}, T) \end{aligned}$$

d'où le résultat par antisymétrie de ρ^D et symétrie de c \square

4.1.4 Structures d'Einstein-Weyl

Définition 4.8 *Une structure de Weyl D sur (M^n, c) est dite d'Einstein-Weyl si et seulement si*

$$Ric_0^D = 0,$$

i.e. la composante symétrique sans trace du tenseur de Ricci de D s'annule.

Dans ce cas, (M^n, c, D) est dite d'Einstein-Weyl.

On pourra consulter [Ca-Pe] pour le théorème suivant :

Théorème 4.3 *Soit (M^n, c, D) une variété d'Einstein-Weyl. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. D est exacte ou $Scal^D = 0$
2. $D^{\mathcal{L}^1} Scal_D = 0$
3. $\delta \rho^D = 0$, où $\delta = -tr_{12}D$
4. D est fermée si $n \neq 4$ ou M est compacte, ou si $n = 4$ et M^n est non compacte, alors ρ^D est harmonique.

4.2 Géométrie spinorielle conforme

Dans toute la suite, on considère (M^n, c) une variété conforme de dimension $n \geq 3$.

4.2.1 Structures CSpin sur une variété conforme

Soit $CO_n^+ = SO_n \times \mathbb{R}_+^*$, et $CSpin_n = Spin_n \times \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \geq 3$, il existe un 2-revêtement de CO_n^+ :

$$\begin{aligned} \zeta : CSpin_n &\longrightarrow CO_n^+ \\ (v, t) &\longmapsto (Ad(v), t) \end{aligned}$$

i.e. $\zeta = Ad \times Id$. On peut définir une structure CSpin sur une variété conforme orientée de manière analogue à une structure Spin sur une variété riemannienne orientée :

Définition 4.9 Une structure CSpin sur une variété conforme orientée (M^n, c) est la donnée :

- d'un $CSpin_n$ -fibré au-dessus de M , $CSpinM$
- d'un morphisme des fibrés principaux au-dessus de ζ , $\theta : CSpinM \longrightarrow CO^+M$.

Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} CSpinM \times CSpin_n & \xrightarrow{\quad} & CSpinM \\ \downarrow \theta \times \zeta & & \downarrow \theta \\ CO^+M \times CO_n^+ & \xrightarrow{\quad} & CO^+M \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \pi \\ \searrow \pi \end{array} \quad M$$

Soit (M^n, c) une variété CSpin, i.e. portant une structure CSpin. On peut construire une famille de fibrés vectoriels sur M de la manière suivante.

Soit, pour un réel k ,

$$\begin{aligned} \delta_n^k : CSpin_n &\longrightarrow Aut_{\mathbb{C}}(\Sigma_n) \\ (v, t) &\longmapsto t^k \delta_n(v) \end{aligned}$$

où $\delta_n : CSpin_n \longrightarrow Aut_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$ est la représentation spinorielle complexe ($dim_{\mathbb{C}}(\Sigma_n) = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$).

Définition 4.10 Le fibré des spineurs de poids k sur une variété CSpin (M^n, c) est le fibré vectoriel complexe de rang $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ défini par :

$$\Sigma^{(k)}M = CSpinM \times_{\delta_n^k} \Sigma_n$$

Une section ψ de $\Sigma^{(k)}M$ est appelée spineur sur M .

Remarques 4.4

1. Pour tout réel k ,

$$\begin{aligned} \Sigma^{(0)}M \otimes \mathcal{L}^k &\longrightarrow \Sigma^{(k)}M \\ [\tilde{s}_g, \sigma]_0 \otimes l_g^k &\longmapsto [\tilde{s}_g, \sigma]_k \end{aligned}$$

est un isomorphisme (ici le nombre en bas à droite de chaque variable indique le poids du spineur ; il sera souvent omis par la suite). En effet, $\delta_n^k = \delta_n^0 \otimes \mu_k$ où $\mu_k(v, t) = t^k$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \Sigma^{(0)}M \otimes (CSpinM \times_{\mu_k} \mathbb{R}) &\cong \Sigma^{(k)}M \\ [s, \sigma]_0 \otimes [s, l]_k &\longmapsto [s, l\sigma]_k \end{aligned}$$

Or $\mathcal{L}^k = CO^+M \times_{\det \frac{k}{n}} \mathbb{R} = CSpinM \times_{\det \frac{k}{n} \circ \zeta} \mathbb{R}$ et $\det \frac{k}{n} \circ \zeta(v, t) = t^k = \mu_k(v, t)$.

2. Pour une métrique g de c , en admettant l'existence d'une structure Spin $(Spin_g M, \eta)$ sur (M^n, g) , on a :

$$\begin{array}{c} Spin_g M \\ \downarrow \eta \\ SO_g M \longrightarrow CO^+ M \end{array}$$

où la flèche horizontale désigne l'inclusion de $SO_g M$ dans $CO^+ M$. Par simple connexité de $Spin_g M$, il existe donc un morphisme i (inclusion) rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} Spin_g M & \xrightarrow{i} & CSpin M \\ \downarrow \eta & & \downarrow \theta \\ SO_g M & \longrightarrow & CO^+ M \end{array}$$

Par conséquent, $Spin_g M$ peut être vu comme un fibré réduit de $CSpin M$. D'où l'existence d'un isomorphisme

$$\begin{aligned} I^{(k)} : \Sigma^{(k)} M &\longrightarrow \Sigma_g M = Spin_g M \times_{\delta_n} \Sigma_n \\ [\tilde{s}_g, \sigma]_k &\longmapsto [\tilde{s}_g, \sigma] \end{aligned}$$

L'existence d'un produit scalaire hermitien et d'une multiplication de Clifford par des p -formes sur $\Sigma_g M$ nous conduit, par l'intermédiaire de $I^{(k)}$, à la même démarche:

- Contrairement au cas de $\Sigma_g M$, il n'y a pas de produit scalaire hermitien 'naturel' sur Σ_n qui soit $CSpin_n$ -invariant. Par contre, on peut ramener le produit scalaire hermitien de $\Sigma_g M$ à $\Sigma^{(k)} M$ par $I^{(k)}$. Posons, pour tout élément x de M ,

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot)_{g,x} : \Sigma_x^{(k)} M \times \Sigma_x^{(k)} M &\longrightarrow \mathbb{C} \\ ([\tilde{s}_g, \sigma], [\tilde{s}_g, \sigma']) &\longmapsto \langle \sigma, \sigma' \rangle \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire hermitien fixé $Spin_n$ -invariant sur Σ_n ; on a fait de $I^{(k)}$ une isométrie.

On veut maintenant que ce produit scalaire hermitien soit indépendant du choix de la métrique g dans c : si $\bar{g} = e^{2u} g$, $\tilde{s}_{\bar{g}} = \tilde{s}_g \cdot h$ où $\zeta(h) = e^{-u} I_n$, et dans ce cas

$$\begin{aligned} ([\tilde{s}_g, \sigma], [\tilde{s}_g, \sigma'])_{\bar{g}} &= \left([\tilde{s}_{\bar{g}}, \delta_n^k(h^{-1})(\sigma)], [\tilde{s}_{\bar{g}}, \delta_n^k(h^{-1})(\sigma')] \right)_{\bar{g}} \\ &= \langle \delta_n^k(h^{-1})(\sigma), \delta_n^k(h^{-1})(\sigma') \rangle \end{aligned}$$

Or $\delta_n^k(h^{-1}) = \pm e^{-ku} Id_{\Sigma_n}$, donc

$$([\tilde{s}_g, \sigma], [\tilde{s}_g, \sigma'])_{\bar{g}} = e^{-2ku} \langle \sigma, \sigma' \rangle$$

On voit que si on pose

$$([\tilde{s}_g, \sigma], [\tilde{s}_g, \sigma']) = \langle \sigma, \sigma' \rangle l_g^{2k}, \text{ où } g \in c,$$

on obtient une application $\Sigma^{(k)} M \times \Sigma^{(k)} M \xrightarrow{(\cdot, \cdot)} \mathcal{L}^{2k} \otimes \mathbb{C}$ indépendante de g dans c . De plus, on peut généraliser immédiatement cette construction non plus sur $\Sigma^{(k)} M \times \Sigma^{(k)} M$, mais sur $\Sigma^{(k)} M \times \Sigma^{(l)} M$.

Définition 4.11 *Le produit scalaire hermitien sur $\Sigma^{(k)}M \times \Sigma^{(l)}M$ est défini par*

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot) : \Sigma^{(k)}M \times \Sigma^{(l)}M &\longrightarrow \mathcal{L}^{k+l} \\ ([\tilde{s}_g, \sigma], [\tilde{s}_g, \sigma']) &\longmapsto \langle \sigma, \sigma' \rangle l_g^{k+l} \end{aligned}$$

– Pour la multiplication de Clifford par des vecteurs ou des p -formes, la situation est plus complexe que dans le cadre spinoriel riemannien : en effet, il n'y a pas de fibré de Clifford canonique sur M , donc on ne peut identifier canoniquement une p -forme à un élément de ce fibré. Voyons d'abord le cas des vecteurs de TM :

- On essaie la même méthode que précédemment, en ramenant, par $I^{(k)}$ la multiplication de Clifford de $\Sigma_g M$ à $\Sigma^{(k)}M$. Soit

$$\begin{aligned} \mu_g : TM \times \Sigma^{(k)}M &\longrightarrow \Sigma^{(k)}M \\ (v, \psi) &\longmapsto (I^{(k)})^{-1}(v \cdot I^{(k)}(\psi)) \end{aligned}$$

où $v \cdot I^{(k)}(\psi)$ est la multiplication de Clifford $TM \times \Sigma_g M \rightarrow \Sigma_g M$. On peut exprimer μ_g par

$$\mu_g([\tilde{s}_g, V], [\tilde{s}_g, \sigma]) = [\tilde{s}_g, \delta_n(V)(\sigma)],$$

où on a pris soin, lorsque n est impair, de prendre $\delta_n^+(V)$ (si n est impair, $\delta_n = \delta_n^+ \oplus \delta_n^-$ sur $\mathcal{C}l_n$ et les deux représentations sont inéquivalentes).

Si on change g en $\bar{g} = e^{2u}g$, alors

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{g}}([\tilde{s}_g, V], [\tilde{s}_g, \sigma]) &= \mu_{\bar{g}}([\tilde{s}_{\bar{g}}, e^u V], [\tilde{s}_{\bar{g}}, \pm e^{-ku} \sigma]) \\ &= [\tilde{s}_{\bar{g}}, \pm e^{-(k-1)u} \delta_n(V)(\sigma)] \\ &= e^{-(k-1)u} [\tilde{s}_{\bar{g}}, \pm \delta_n(V)(\sigma)] \\ &= e^{-(k-1)u} e^{ku} [\tilde{s}_g, \delta_n(V)(\sigma)] \\ &= e^u \mu_g([\tilde{s}_g, V], [\tilde{s}_g, \sigma]) \end{aligned}$$

donc à nouveau si on pose

$$\begin{aligned} \mu : TM \times \Sigma^{(k)}M &\longrightarrow \Sigma^{(k)}M \otimes \mathcal{L}^1 = \Sigma^{(k+1)}M \\ (v, \psi) &\longmapsto \mu_g(v, \psi) l_g \end{aligned}$$

on obtient une multiplication de Clifford ne dépendant que de c . On généralise cette démarche à $T^w M$.

Définition 4.12 *La multiplication de Clifford des spineurs de poids k par les vecteurs de poids w est définie par*

$$\begin{aligned} T^w M \times \Sigma^{(k)}M &\longrightarrow \Sigma^{(k+w)}M \\ ([\tilde{s}_g, V]_w, [\tilde{s}_g, \sigma]_k) &\longmapsto [\tilde{s}_g, \delta_n(V)(\sigma)]_k l_g^w \end{aligned}$$

- Pour les p -formes, on procède identiquement : soit

$$\begin{aligned} \Phi : \bigwedge \mathbb{R}^{n*} &= \bigoplus_{p=0}^n \bigwedge^p \mathbb{R}^{n*} \longrightarrow \mathcal{C}l_n \\ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} c_{i_1, \dots, i_p} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^* &\longmapsto \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} c_{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_p} \end{aligned}$$

où $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ désigne la base canonique de \mathbb{R}^n , et $Cl_n = Cl(\mathbb{R}^n, g_0)$ l'algèbre de Clifford réelle usuelle. Posons

$$\begin{aligned} \mu_g : \bigwedge^p T^*M \times \Sigma^{(k)}M &\longrightarrow \Sigma^{(k)}M \\ (\alpha, \psi) &\longmapsto (I^{(k)})^{-1}(\alpha \cdot I^{(k)}(\psi)) \end{aligned}$$

où $\alpha \cdot I^{(k)}(\psi)$ est la multiplication de Clifford de $I^{(k)}(\psi) \in \Sigma_g M$ par α .

Lemme 4.1 *Si $\bar{g} = e^{2u}g$, alors $\mu_{\bar{g}} = e^{-pu}\mu_g$ sur les p -formes.*

Preuve: Si $\alpha = [\tilde{s}_g, \alpha']$ et $\psi = [\tilde{s}_g, \sigma]$, alors

$$\begin{aligned} \mu_g(\alpha, \psi) &= [\tilde{s}_g, \delta_n(\Phi(\alpha'))(\sigma)] \\ \text{et } \mu_{\bar{g}}(\alpha, \psi) &= \mu_{\bar{g}}([\tilde{s}_{\bar{g}}, \wedge^p \rho^*(\zeta(h^{-1}))(\alpha')], [\tilde{s}_{\bar{g}}, \pm e^{-ku}\sigma]) \\ &= [\tilde{s}_{\bar{g}}, \pm \delta_n(\Phi(\wedge^p \rho^*(\zeta(h^{-1}))(\alpha')))(e^{-ku}\sigma)] \end{aligned}$$

avec $\wedge^p \rho^*(\zeta(h^{-1}))(\alpha') = \wedge^p \rho^*(e^u I_n)(\alpha') = e^{-pu}\alpha'$ donc

$$\begin{aligned} \mu_g(\alpha, \psi) &= [\tilde{s}_{\bar{g}}, \pm e^{-pu}\delta_n(\Phi(\alpha')))(e^{-ku}\sigma)] \\ &= e^{-pu}[\tilde{s}_{\bar{g}}, \delta_n(\Phi(\alpha'))(\sigma)] \\ &= e^{-pu}\mu_{\bar{g}}(\alpha, \psi). \quad \square \end{aligned}$$

Ainsi, $\mu_g \otimes l_g^{-p}$ ne dépend que de c .

Définition 4.13 *La multiplication de Clifford des spineurs de poids k par les p -formes est défini par:*

$$\begin{aligned} \mu : \bigwedge^p T^*M \times \Sigma^{(k)}M &\longrightarrow \Sigma^{(k-p)}M \\ ([\tilde{s}_g, \alpha']_{-p}, [\tilde{s}_g, \sigma]_k) &\longmapsto [\tilde{s}_g, \delta_n(\Phi(\alpha'))(\sigma)]_k l_g^{-p} \end{aligned}$$

En résumé, les multiplications de Clifford sont données par:

$$\begin{aligned} T^w M \times \Sigma^{(k)}M &\longrightarrow \Sigma^{(k+w)}M \\ ([s, V]_w, [s, \sigma]_k) &\longmapsto [s, \delta_n(V)(\sigma)]_{k+w} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \bigwedge^p T^*M \times \Sigma^{(k)}M &\longrightarrow \Sigma^{(k-p)}M \\ ([s, \alpha]_{-p}, [s, \sigma]_k) &\longmapsto [s, \delta_n(\Phi(\alpha))(\sigma)]_{k-p} \end{aligned}$$

où s est une section locale de $CSpinM$.

Remarques 4.5

1. *La multiplication de Clifford ainsi posée est, par définition, compatible avec les $I^{(k)}$:*

$$\begin{aligned} \forall X \in \Gamma(T^w M), \quad \forall \omega \in \Omega^p(M), \quad I^{(k+w)}(X \cdot \psi) &= X \cdot I^{(k)}(\psi) \\ \text{et } I^{(k-p)}(\omega \cdot \psi) &= \omega \cdot I^{(k)}(\psi) \end{aligned}$$

2. Par l'identification

$$T^*M \xrightarrow{\theta \mapsto \theta^{b \cdot g} \otimes (l_g)^{-2}} TM \otimes \mathcal{L}^{-2} \cong T^1M \otimes \mathcal{L}^{-2} \cong T^{-1}M,$$

les deux multiplications de Clifford coïncident.

3. On peut, à condition de fixer un ordre dans la multiplication des variables, multiplier un spineur de poids k par un (p,q) -tenseur quelconque sur M . Par exemple, l'expression $X \cdot Y \cdot \psi$ signifie $X \cdot (Y \cdot \psi)$; en revanche, $(X \cdot Y) \cdot \psi$ n'a aucun sens.
4. Pour un repère local g -orthonormé ($g \in c$) $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$, on a clairement:

$$\begin{aligned} \forall \psi \in \Gamma(\Sigma^{(k)}M), \quad X_i \cdot X_j \cdot \psi &= -X_j \cdot X_i \cdot \psi \text{ si } i \neq j \\ &= -l_g^2 \psi \text{ si } i = j \end{aligned}$$

et $(X_i^* \wedge X_j^*) \cdot \psi = X_i^* \cdot (X_j^* \cdot \psi)$ si $i \neq j$. Plus généralement,

$$(X_{i_1}^* \wedge \dots \wedge X_{i_p}^*) \cdot \psi = X_{i_1}^* \cdot (X_{i_2}^* \cdot (\dots (X_{i_p}^* \cdot \psi) \dots)).$$

4.2.2 Connexion et courbure spinorielles

De la même manière que dans le cas spinoriel riemannien, où le fait que

$$ad = T_1 Ad : \mathfrak{spin}_n \longrightarrow \mathfrak{so}_n$$

est un isomorphisme permet de remonter la 1-forme de connexion de Levi-Civita à $SpinM$, on peut, à partir d'une structure de Weyl sur une variété $CSpin$, définir une 1-forme de connexion sur $CSpinM$.

Définition 4.14 Soit (M^n, c) une variété $CSpin$ et D une structure de Weyl sur (M^n, c) . Soit ω la 1-forme de connexion associée à D sur CO^+M .

La 1-forme de connexion associée à D sur $CSpinM$ est donnée par :

$$\tilde{\omega} = \zeta_*^{-1} \circ \omega \circ \theta_*$$

$\tilde{\omega}$ est un élément de $\Gamma(T^*CSpinM \otimes \mathfrak{cspin}_n)$.

Cette définition a un sens car

$$\begin{aligned} \zeta_* : \mathfrak{cspin}_n = \mathfrak{spin}_n \oplus \mathbb{R}1 &\longrightarrow \mathfrak{co}_n^+ = \mathfrak{so}_n \oplus \mathbb{R}1_n \\ (a, t) &\longmapsto (ad(a), tI_n) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Dans toute la suite, D est une structure de Weyl sur une variété $CSpin(M^n, c)$. On note, pour tout réel w (resp. k), D^w (resp. $D^{(k)}$) la connexion linéaire induite par la 1-forme $\tilde{\omega}$ sur T^wM (resp. sur $\Sigma^{(k)}M$). On note également, pour une métrique g de c , $s_g = (X_1, \dots, X_n)$ une base g -orthonormée locale, \tilde{s}_g le relèvement (local) de s_g , i.e. tel que $\theta \circ \tilde{s}_g = s_g$. Pour tout réel w , on note X_i^w l'élément de $\Gamma(T^wM)$ défini par $X_i^w = [\tilde{s}_g, e_i]$ (e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de base de \mathbb{R}^n). On fixe d'autre part une base complexe $(\sigma_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$ de Σ_n , et on pose $\psi_\alpha = [\tilde{s}_g, \sigma_\alpha]$.

Lemme 4.2 Soit X un champ de vecteurs sur M . Alors

$$\begin{aligned} D_X^w X_i^w &= (w-1)\theta^g(X)X_i^w + \sum_{k=1}^n g(D_X X_i, X_k)X_k^w \\ \text{et} \\ D_X^{(k)} \psi_\alpha &= (k + \frac{n}{4})\theta^g(X)\psi_\alpha + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(D_X X_i, X_j)X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \end{aligned}$$

Preuve: Il suffit de se ramener aux définitions.

$$\begin{aligned} D_X X_i^w &= [\tilde{s}_g, \rho_*^w \circ \zeta_*(\tilde{\omega} \circ (s_g)_*(X))(e_i)] \\ &= [\tilde{s}_g, \rho_*^w(\omega \circ (s_g)_*(X))(e_i)] \text{ car } \tilde{\omega} = \zeta_*^{-1} \circ \omega \circ \theta_* \end{aligned}$$

Or l'égalité

$$D_X^{\zeta^1} l_g = \theta^g(X) l_g$$

entraîne, en utilisant la relation entre D et ω ,

$$\theta^g(X) = \frac{1}{n} \text{trace}(\omega \circ (s_g)_*(X)),$$

donc

$$\omega \circ (s_g)_*(X) = \theta^g(X) I_n + \sum_{i < j} \langle \omega \circ (s_g)_*(X)(e_i), e_j \rangle e_i^* \wedge e_j^*$$

où on note $e_i^* \wedge e_j^*$ l'endomorphisme antisymétrique de \mathbb{R}^n donné par

$$\forall V \in \mathbb{R}^n, \quad e_i^* \wedge e_j^*(V) = e_i^*(V) e_j - e_j^*(V) e_i.$$

D'autre part, un simple calcul utilisant la relation entre D et ω montre que, pour $i \neq j$,

$$\langle \omega \circ (s_g)_*(X)(e_i), e_j \rangle = g(D_X X_i, X_j)$$

Par conséquent,

$$\rho_*^w(\omega \circ (s_g)_*(X)) = w \theta^g(X) I_n + \sum_{i < j} g(D_X X_i, X_j) e_i^* \wedge e_j^*,$$

d'où

$$\rho_*^w(\omega \circ (s_g)_*(X))(e_i) = w \theta^g(X) e_i + \sum_{j \neq i} g(D_X X_i, X_j) e_j$$

et on en déduit que

$$D_X X_i^w = w \theta^g(X) X_i^w + \sum_{j \neq i} g(D_X X_i, X_j) X_j^w \text{ avec } g(D_X X_i, X_i) = \theta^g(X)$$

$$\text{donc } D_X X_i^w = (w-1) \theta^g(X) X_i^w + \sum_j g(D_X X_i, X_j) X_j^w$$

Pour ψ_α , la démonstration est similaire:

$$\begin{aligned} D_X^{(k)} \psi_\alpha &= [\tilde{s}_g, (\delta_n^k)_*(\tilde{\omega} \circ (s_g)_*(X))(\sigma_\alpha)] \\ &= [\tilde{s}_g, (\delta_n^k)_*(\zeta_*^{-1} \circ \omega \circ (s_g)_*(X))(\sigma_\alpha)] \end{aligned}$$

Puisque

$$\omega \circ (s_g)_*(X) = \theta^g(X) I_n + \sum_{i < j} \langle \omega \circ (s_g)_*(X)(e_i), e_j \rangle e_i^* \wedge e_j^*,$$

et que, pour $i \neq j$,

$$\langle \omega \circ (s_g)_*(X)(e_i), e_j \rangle = g(D_X X_i, X_j),$$

alors

$$\zeta_*^{-1} \circ \omega \circ (s_g)_*(X) = \theta^g(X) 1 + \frac{1}{2} \sum_{i < j} g(D_X X_i, X_j) e_i \cdot e_j$$

donc

$$(\delta_n^k)_*(\zeta_*^{-1} \circ \omega \circ (s_g)_*(X))(\sigma_\alpha) = k\theta^g(X)\sigma_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{i < j} g(D_X X_i, X_j) \delta_n(e_i \cdot e_j)(\sigma_\alpha)$$

d'où

$$\begin{aligned} D_X^{(k)} \psi_\alpha &= k\theta^g(X)\psi_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{i < j} g(D_X X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\ &= \left(k + \frac{n}{4}\right) \theta^g(X) \psi_\alpha + \frac{1}{4} \sum_{i, j} g(D_X X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \quad \square \end{aligned}$$

Proposition 4.6 *La dérivée covariante $D^{(k)}$ sur $\Sigma^{(k)}M$ est compatible avec le produit scalaire hermitien et la multiplication de Clifford :*

$$\forall X \in \Gamma(TM), \quad \forall Y^w \in \Gamma(T^w M), \quad \forall \alpha \in \Omega^p(M), \quad \forall \psi \in \Gamma(\Sigma^{(k)}M), \quad \forall \phi \in \Gamma(\Sigma^{(l)}M),$$

$$\begin{aligned} D_X^{\mathcal{L}^1}(\psi, \phi) &= (D_X^{(k)} \psi, \phi) + (\psi, D_X^{(l)} \phi) \\ D_X^{(k+w)}(Y^w \cdot \psi) &= (D_X^w Y^w) \cdot \psi + Y^w \cdot D_X^{(k)} \psi \\ D_X^{(k-p)}(\alpha \cdot \psi) &= (D_X \alpha) \cdot \psi + \alpha \cdot D_X^{(k)} \psi \end{aligned}$$

Preuve: Prouvons le résultat pour $Y^w = X_i^w$, $\psi = \psi_\alpha$, $\phi = \psi_\beta$; on en déduira aisément, par le biais d'une récurrence sur p pour les p -formes, le cas général.
D'après la définition du produit scalaire hermitien,

$$D_X^{\mathcal{L}^1}(\psi_\alpha, \psi_\beta) = D_X^{\mathcal{L}^1}(\langle \sigma_\alpha, \sigma_\beta \rangle l_g^{k+l}) = (k+l) \langle \sigma_\alpha, \sigma_\beta \rangle \theta^g(X) l_g^{k+l}.$$

Puisque

$$D_X^{(k)} \psi_\alpha = k\theta^g(X)\psi_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{i < j} g(D_X X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha,$$

alors

$$(D_X^{(k)} \psi_\alpha, \psi_\beta) = k\theta^g(X) \langle \sigma_\alpha, \sigma_\beta \rangle l_g^{k+l} + \frac{1}{2} \sum_{i < j} g(D_X X_i, X_j) (X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha, \psi_\beta),$$

et de même

$$(\psi_\alpha, D_X^{(l)} \psi_\beta) = l\theta^g(X) \langle \sigma_\alpha, \sigma_\beta \rangle l_g^{k+l} + \frac{1}{2} \sum_{i < j} g(D_X X_i, X_j) (\psi_\alpha, X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\beta)$$

Or, pour tout champ de vecteurs X sur M , (resp. pour toute 1-forme θ sur M),

$$(X \cdot \psi, \phi) = -(\psi, X \cdot \phi) \quad (\text{resp. } (\theta \cdot \psi, \phi) = -(\psi, \theta \cdot \phi)),$$

ce qui se démontre aisément en se ramenant aux définitions. Par conséquent,

$$(\psi_\alpha, X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\beta) = -(X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha, \psi_\beta),$$

d'où

$$\begin{aligned} (D_X^{(k)} \psi_\alpha, \psi_\beta) + (\psi_\alpha, D_X^{(l)} \psi_\beta) &= (k+l)\theta^g(X) \langle \sigma_\alpha, \sigma_\beta \rangle l_g^{k+l} \\ &= D_X^{\mathcal{L}^1}(\psi_\alpha, \psi_\beta) \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
D_X^{(k+w)}(X_i^w \cdot \psi_\alpha) &= (k+w)\theta^g(X)X_i^w \cdot \psi_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{k < l} g(D_X X_k, X_l) X_k^* \cdot X_l \cdot X_i^w \cdot \psi_\alpha \\
&= (k+w)\theta^g(X)X_i^w \cdot \psi_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{i < l} g(D_X X_i, X_l) l_g^{w-1} X_l \cdot \psi_\alpha - \frac{1}{2} \sum_{k < i} g(D_X X_k, X_i) l_g^{w+1} X_k^* \cdot \psi_\alpha \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k < l, k \neq i, l \neq i} g(D_X X_k, X_l) X_k^* \cdot X_l \cdot X_i^w \psi_\alpha \\
&= (k+w)\theta^g(X)X_i^w \cdot \psi_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{k \neq i} g(D_X X_i, X_k) X_k^w \cdot \psi_\alpha \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k < l, k \neq i, l \neq i} g(D_X X_k, X_l) X_i^w \cdot X_k^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha \\
&= (k+w)\theta^g(X)X_i^w \cdot \psi_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{k \neq i} g(D_X X_i, X_k) X_k^w \cdot \psi_\alpha \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k < l} g(D_X X_k, X_l) X_i^w \cdot X_k^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{i < l} g(D_X X_i, X_l) X_l^w \cdot \psi_\alpha - \frac{1}{2} \sum_{k < i} g(D_X X_k, X_i) X_k^w \cdot \psi_\alpha \\
&= (k+w)\theta^g(X)X_i^w \cdot \psi_\alpha + \sum_{k \neq i} g(D_X X_i, X_k) X_k^w \cdot \psi_\alpha \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k < l} g(D_X X_k, X_l) X_i^w \cdot X_k^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha \\
&= k\theta^g(X)X_i^w \cdot \psi_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{k < l} g(D_X X_k, X_l) X_i^w \cdot X_k^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha \\
&+ w\theta^g(X)X_i^w \cdot \psi_\alpha + \sum_{k \neq i} g(D_X X_i, X_k) X_k^w \cdot \psi_\alpha \\
&= X_i^w \cdot D_X^{(k)} \psi_\alpha + (D_X^w X_i^w) \cdot \psi_\alpha
\end{aligned}$$

Ce résultat vaut aussi pour la multiplication par les 1-formes, car une 1-forme est identifiée à un vecteur de poids -1, et la dérivée covariante est compatible avec cette identification.

Pour le passage $p \rightarrow p+1$ dans la récurrence, on veut prouver que,

si $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$,

$$\begin{aligned}
D_X^{(k-p-1)}((X_{i_1}^* \wedge \dots \wedge X_{i_{p+1}}^*) \cdot \psi_\alpha) &= D_X(X_{i_1}^* \wedge \dots \wedge X_{i_{p+1}}^*) \cdot \psi_\alpha \\
&+ (X_{i_1}^* \wedge \dots \wedge X_{i_{p+1}}^*) \cdot D_X^{(k)} \psi_\alpha
\end{aligned}$$

Il suffit d'écrire

$$X_{i_1}^* \wedge \dots \wedge X_{i_{p+1}}^* = (X_{i_1}^* \wedge \dots \wedge X_{i_p}^*) \wedge X_{i_{p+1}}^*$$

et de montrer que

$$\begin{aligned}
&D_X(X_{i_1}^* \wedge \dots \wedge X_{i_p}^*) \cdot (X_{i_{p+1}}^* \cdot \psi_\alpha) + (X_{i_1}^* \wedge \dots \wedge X_{i_p}^*) \cdot (D_X X_{i_{p+1}}^* \cdot \psi_\alpha) \\
&= \left(D_X(X_{i_1}^* \wedge \dots \wedge X_{i_p}^*) \wedge X_{i_{p+1}}^* \right) \cdot \psi_\alpha + (X_{i_1}^* \wedge \dots \wedge X_{i_p}^* \wedge D_X X_{i_{p+1}}^*) \cdot \psi_\alpha.
\end{aligned}$$

Le membre de gauche est égal à

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^p \sum_{k \notin \{i_1, \dots, i_p\}}^n g(D_X X_{i_j}^*, X_k^*) X_{i_1}^* \dots \dots \underbrace{X_k^*}_{j} \dots \dots X_{i_p}^* \cdot X_{i_{p+1}}^* \cdot \psi_\alpha \\
&+ \sum_{k=1}^n g(D_X X_{i_{p+1}}^*, X_k^*) X_{i_1}^* \dots \dots X_{i_p}^* \cdot X_k^* \cdot \psi_\alpha
\end{aligned}$$

et le membre de droite égal à

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^p \sum_{k \notin \{i_1, \dots, i_{p+1}\}}^n g(D_X X_{i_j}^*, X_k^*) X_{i_1}^* \cdots \cdots \underbrace{X_k^*}_{j} \cdots \cdots X_{i_p}^* \cdot X_{i_{p+1}}^* \cdot \psi_\alpha \\ & + \sum_{k \notin \{i_1, \dots, i_p\}}^n g(D_X X_{i_{p+1}}^*, X_k^*) X_{i_1}^* \cdots \cdots X_{i_p}^* \cdot X_k^* \cdot \psi_\alpha \end{aligned}$$

Donc si on soustrait le membre de droite au membre de gauche, on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n g(D_X X_{i_j}^*, X_{i_{p+1}}^*) X_{i_1}^* \cdots \cdots \underbrace{X_{i_{p+1}}^*}_{j} \cdots \cdots X_{i_p}^* \cdot X_{i_{p+1}}^* \cdot \psi_\alpha \\ & + \sum_{j=1}^n g(D_X X_{i_{p+1}}^*, X_{i_j}^*) X_{i_1}^* \cdots \cdots X_{i_p}^* \cdot X_{i_j}^* \cdot \psi_\alpha \end{aligned}$$

Or

$$X_{i_1}^* \cdots \cdots \underbrace{X_{i_{p+1}}^*}_{j} \cdots \cdots X_{i_p}^* \cdot X_{i_{p+1}}^* \cdot \psi_\alpha = X_{i_1}^* \cdots \cdots X_{i_p}^* \cdot X_{i_j}^* \cdot \psi_\alpha$$

et

$$\begin{aligned} g(D_X X_{i_j}^*, X_{i_{p+1}}^*) + g(X_{i_j}^*, D_X X_{i_{p+1}}^*) &= -D_X g(X_{i_j}^*, X_{i_{p+1}}^*) \\ &= \theta^g(X) g(X_{i_j}^*, X_{i_{p+1}}^*) l_g^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où le membre de gauche égale le membre de droite, et notre assertion, et par conséquent la proposition, est démontrée. \square

Proposition 4.7 *Soit γ une 1-forme sur M et D' la structure de Weyl sur (M^n, c) donnée par $(D')^{\mathcal{L}^1} = D^{\mathcal{L}^1} + \gamma$. Pour tout réel k et toute section ψ de $\Sigma^{(k)} M$, on a :*

$$\forall X \in \Gamma(TM), \quad D_X'^{(k)} \psi - D_X^{(k)} \psi = -\frac{1}{2} X \cdot \gamma \cdot \psi + (k - \frac{1}{2}) \gamma(X) \psi$$

Preuve: En effet, l'égalité restant vraie si on multiplie chaque membre par une fonction lisse, on peut supposer que $\psi = \psi_\alpha$, et dans ce cas

$$\begin{aligned} D_X'^{(k)} \psi_\alpha - D_X^{(k)} \psi_\alpha &= (k + \frac{n}{4}) \left((\theta')^g(X) - \theta^g(X) \right) \psi_\alpha \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{k,l} g \left(\gamma(X) X_k + \gamma(X_k) X - g(X, X_k) \gamma^{*g}, X_l \right) X_k^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha \end{aligned}$$

Or $(\theta')^g(X) - \theta^g(X) = \gamma(X)$ par définition de $(\theta')^g$ et θ^g , et

$$\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \gamma(X) g(X_k, X_k) X_k^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha = -\frac{n}{4} \gamma(X) \psi_\alpha$$

donc

$$D_X'^{(k)} \psi_\alpha - D_X^{(k)} \psi_\alpha = k \gamma(X) \psi_\alpha + \frac{1}{4} (\gamma \cdot X \cdot \psi_\alpha - X \cdot \gamma \cdot \psi_\alpha)$$

et puisque $\gamma \cdot X \cdot \psi_\alpha = -X \cdot \gamma \cdot \psi_\alpha - 2\gamma(X) \psi_\alpha$,

$$D_X'^{(k)} \psi_\alpha - D_X^{(k)} \psi_\alpha = (k - \frac{1}{2}) \gamma(X) \psi_\alpha - \frac{1}{2} X \cdot \gamma \cdot \psi_\alpha. \quad \square$$

Considérons maintenant, pour tout réel k , le tenseur de courbure $R^{(k)}$ de $D^{(k)}$ défini pour tous champs de vecteurs X et Y sur M par

$$R_{X,Y}^{(k)} = D_{[X,Y]}^{(k)} - [D_X^{(k)}, D_Y^{(k)}]$$

On se sert du lemme (4.2) pour exprimer $R^{(k)}$ en fonction de R^D :

Proposition 4.8 *Pour tous champs de vecteurs X et Y sur M , et pour tout entier $1 \leq \alpha \leq 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$,*

$$R_{X,Y}^{(k)} \psi_\alpha = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g((R_A^D)_{X,Y} X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha + k \rho^D(X, Y) \psi_\alpha$$

Preuve: D'après (4.2), on a d'une part

$$D_{[X,Y]}^{(k)} \psi_\alpha = (k + \frac{n}{4}) \theta^g([X, Y]) \psi_\alpha + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(D_{[X,Y]} X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha,$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} D_X^{(k)} D_Y^{(k)} \psi_\alpha &= D_X^{(k)} \left((k + \frac{n}{4}) \theta^g(Y) \psi_\alpha + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(D_Y X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \right) \\ &= (k + \frac{n}{4}) X(\theta^g(Y)) \psi_\alpha + (k + \frac{n}{4}) \theta^g(Y) D_X^{(k)} \psi_\alpha \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n X(g(D_Y X_i, X_j)) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha + g(D_Y X_i, X_j) D_X X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\ &+ g(D_Y X_i, X_j) X_i^* \cdot D_X X_j \cdot \psi_\alpha + g(D_Y X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot D_X^{(k)} \psi_\alpha, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} X(g(D_Y X_i, X_j)) &= D_X g(D_Y X_i, X_j) + g(D_X D_Y X_i, X_j) + g(D_Y X_i, D_X X_j) \\ &= -2\theta^g(X) g(D_Y X_i, X_j) + g(D_X D_Y X_i, X_j) + g(D_Y X_i, D_X X_j). \end{aligned}$$

Or

$$D_X X_i^* = \sum_{k=1}^n (D_X X_i^*)(X_k) X_k^* = - \sum_{k=1}^n X_i^*(D_X X_k) X_k^* = - \sum_{k=1}^n g(D_X X_k, X_i) X_k^*,$$

donc

$$\begin{aligned} D_X^{(k)} D_Y^{(k)} \psi_\alpha &= (k + \frac{n}{4}) X(\theta^g(Y)) \psi_\alpha + (k + \frac{n}{4}) \theta^g(Y) D_X^{(k)} \psi_\alpha \\ &- \frac{1}{2} \theta^g(X) \sum_{i,j=1}^n g(D_Y X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(D_X D_Y X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(D_Y X_i, D_X X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha - \frac{1}{4} \sum_{i,j,k=1}^n g(D_Y X_i, X_j) g(D_X X_k, X_i) X_k^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i,j,k=1}^n g(D_Y X_i, X_j) g(D_X X_j, X_k) X_i^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(D_Y X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \left((k + \frac{n}{4}) \theta^g(X) \psi_\alpha + \frac{1}{4} \sum_{l,m=1}^n g(D_X X_l, X_m) X_l^* \cdot X_m \cdot \psi_\alpha \right). \end{aligned}$$

De même,

$$D_Y^{(k)} D_X^{(k)} \psi_\alpha = (k + \frac{n}{4}) Y(\theta^g(X)) \psi_\alpha + (k + \frac{n}{4}) \theta^g(X) D_Y^{(k)} \psi_\alpha$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2}\theta^g(Y) \sum_{i,j=1}^n g(D_X X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(D_Y D_X X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
& + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(D_X X_i, D_Y X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha - \frac{1}{4} \sum_{i,j,k=1}^n g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_k, X_i) X_k^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
& + \frac{1}{4} \sum_{i,j,k=1}^n g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_j, X_k) X_i^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha \\
& + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(D_X X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \left((k + \frac{n}{4})\theta^g(Y) \right) \psi_\alpha + \frac{1}{4} \sum_{l,m=1}^n g(D_Y X_l, X_m) X_l^* \cdot X_m \cdot \psi_\alpha,
\end{aligned}$$

donc on en déduit que

$$\begin{aligned}
R_{X,Y}^{(k)} \psi_\alpha &= (k + \frac{n}{4}) \underbrace{(\theta^g([X,Y]) - X(\theta^g(Y)) + Y(\theta^g(X)))}_{\rho^D(X,Y)} \psi_\alpha \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n \underbrace{g(D_{[X,Y]} X_i - D_X D_Y X_i + D_Y D_X X_i, X_j)}_{R_{X,Y}^D X_i} X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
&- (k + \frac{n}{4})^2 \theta^g(Y) \theta^g(X) \psi_\alpha - \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n (k + \frac{n}{4}) \theta^g(Y) g(D_X X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
&+ (k + \frac{n}{4})^2 \theta^g(X) \theta^g(Y) \psi_\alpha + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n (k + \frac{n}{4}) \theta^g(X) g(D_Y X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
&+ \underbrace{\frac{1}{2} \theta^g(X) \sum_{i,j=1}^n g(D_Y X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha}_{a} - \underbrace{\frac{1}{2} \theta^g(Y) \sum_{i,j=1}^n g(D_X X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha}_{a'} \\
&- \underbrace{\frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(D_Y X_i, D_X X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha}_{b} + \underbrace{\frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(D_X X_i, D_Y X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha}_{b'} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{4} \sum_{i,j,k=1}^n g(D_Y X_i, X_j) g(D_X X_k, X_i) X_k^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha}_{c} - \underbrace{\frac{1}{4} \sum_{i,j,k=1}^n g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_k, X_i) X_k^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha}_{c'} \\
&- \underbrace{\frac{1}{4} \sum_{i,j,k=1}^n g(D_Y X_i, X_j) g(D_X X_j, X_k) X_i^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha}_{d} + \underbrace{\frac{1}{4} \sum_{i,j,k=1}^n g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_j, X_k) X_i^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha}_{d'} \\
&- \frac{1}{4} (k + \frac{n}{4}) \theta^g(X) \sum_{i,j=1}^n g(D_Y X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha + \frac{1}{4} (k + \frac{n}{4}) \theta^g(Y) \sum_{i,j=1}^n g(D_X X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
&- \underbrace{\frac{1}{16} \sum_{i,j,l,m=1}^n g(D_Y X_i, X_j) g(D_X X_l, X_m) X_i^* \cdot X_j \cdot X_l^* \cdot X_m \cdot \psi_\alpha}_{e} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{16} \sum_{i,j,l,m=1}^n g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_l, X_m) X_i^* \cdot X_j \cdot X_l^* \cdot X_m \cdot \psi_\alpha}_{e'}
\end{aligned}$$

Reste à montrer que $a + a' + b + b' + c + c' + d + d' + e + e' = 0$.

$$\begin{aligned}
a &= -\frac{1}{2}\theta^g(X) \sum_{i=1}^n g(D_Y X_i, X_i) \psi_\alpha + \frac{1}{2}\theta^g(X) \sum_{i \neq j} g(D_Y X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
&= -\frac{n}{2}\theta^g(X) \theta^g(Y) \psi_\alpha + \frac{1}{2}\theta^g(X) \sum_{i \neq j} g(D_Y X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
a' &= \frac{n}{2}\theta^g(Y) \theta^g(X) \psi_\alpha - \frac{1}{2}\theta^g(Y) \sum_{i \neq j} g(D_X X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
b &= -\frac{1}{4} \sum_{i,j,k=1}^n g(D_Y X_i, X_k) g(D_X X_j, X_k) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i,k=1}^n g(D_Y X_i, X_k) g(D_X X_i, X_k) \psi_\alpha - \frac{1}{4} \sum_{i \neq j} \sum_k g(D_Y X_i, X_k) g(D_X X_j, X_k) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
b' &= -\frac{1}{4} \sum_{i,k=1}^n g(D_X X_i, X_k) g(D_Y X_i, X_k) \psi_\alpha + \frac{1}{4} \sum_{i \neq j} \sum_k g(D_X X_i, X_k) g(D_Y X_j, X_k) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
\text{donc } b + b' &= -\frac{1}{2} \sum_k \sum_{i \neq j} g(D_X X_j, X_k) g(D_Y X_i, X_k) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
c &= -\frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(D_Y X_i, X_j) g(D_X X_j, X_i) \psi_\alpha + \frac{1}{4} \sum_i \sum_{j \neq k} g(D_Y X_i, X_j) g(D_X X_k, X_i) X_k^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(D_Y X_i, X_j) g(D_X X_j, X_i) \psi_\alpha + \frac{1}{4} \sum_k \sum_{j \neq i} g(D_Y X_k, X_j) g(D_X X_i, X_k) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
c' &= \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_j, X_i) \psi_\alpha - \frac{1}{4} \sum_k \sum_{j \neq i} g(D_X X_k, X_j) g(D_Y X_i, X_k) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
d &= \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(D_Y X_i, X_j) g(D_X X_j, X_i) \psi_\alpha - \frac{1}{4} \sum_j \sum_{i \neq k} g(D_Y X_i, X_j) g(D_X X_j, X_k) X_i^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha \\
d' &= -\frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_j, X_i) \psi_\alpha + \frac{1}{4} \sum_j \sum_{i \neq k} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_j, X_k) X_i^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha \\
e + e' &= \frac{1}{16} \sum_{i,j,k,l=1}^n g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_k, X_l) (X_i^* \cdot X_j \cdot X_k^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha - X_k^* \cdot X_l \cdot X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha)
\end{aligned}$$

Afin de calculer la somme $e + e'$, on la décompose sous la forme:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k,l} &= \underbrace{\sum_{i=j=k=l}}_1 + \underbrace{\sum_{i=j=k \neq l}}_2 + \underbrace{\sum_{i=j \neq k \neq l=k}}_3 + \underbrace{\sum_{i=j \neq k \neq l=j}}_4 + \underbrace{\sum_{i=j \neq k \neq l}}_5 \\
&+ \underbrace{\sum_{i \neq j \neq k=l}}_6 + \underbrace{\sum_{i \neq j \neq k \neq l=i}}_7 + \underbrace{\sum_{i \neq j \neq l \neq k}}_8 + \underbrace{\sum_{i \neq j \neq k \neq l=i}}_9 + \underbrace{\sum_{i \neq j \neq k \neq l=k}}_{10} + \underbrace{\sum_{i \neq j \neq l \neq k \neq i}}_{11} \\
&+ \underbrace{\sum_{i \neq j \neq k \neq l \neq i}}_{12} + \underbrace{\sum_{i \neq j \neq k \neq l=j}}_{13} + \underbrace{\sum_{i \neq j \neq k \neq l=k}}_{14} + \underbrace{\sum_{i \neq j \neq k \neq l}}_{15}
\end{aligned}$$

Il est clair que, dans la somme $e + e'$, si $i = j$ ou $k = l$, alors le terme correspondant à la valeur (i, j, k, l) du multi-indice est nul. C'est pourquoi les sommes 1 à 6, ainsi que 9 et 14, sont nulles. De plus, la somme

'7' donne

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{16} \sum_{i \neq j / j = k / l = i} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_k, X_l) (X_i^* \cdot X_j \cdot X_k^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha - X_k^* \cdot X_l \cdot X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha) \\
&= \frac{1}{16} \sum_{i \neq j} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_j, X_i) (X_i^* \cdot X_j \cdot X_j^* \cdot X_i \cdot \psi_\alpha - X_j^* \cdot X_i \cdot X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

la somme '8'

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{16} \sum_{i \neq j \neq l / j = k} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_k, X_l) (X_i^* \cdot X_j \cdot X_k^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha - X_k^* \cdot X_l \cdot X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha) \\
&= \frac{1}{16} \sum_{i \neq j \neq l} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_j, X_l) (X_i^* \cdot X_j \cdot X_j^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha - X_j^* \cdot X_l \cdot X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha) \\
&= \frac{1}{16} \sum_{i \neq j \neq l} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_j, X_l) (-X_i^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha + X_l \cdot X_i^* \cdot \psi_\alpha) \\
&= -\frac{1}{8} \sum_{i \neq j \neq l} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_j, X_l) X_i^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha,
\end{aligned}$$

la somme '10'

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{16} \sum_{i \neq j / j \neq k / k = i / l = j} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_k, X_l) (X_i^* \cdot X_j \cdot X_k^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha - X_k^* \cdot X_l \cdot X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha) \\
&= \frac{1}{16} \sum_{i \neq j} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_i, X_j) (X_i^* \cdot X_j \cdot X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha - X_i^* \cdot X_j \cdot X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

la somme '11'

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{16} \sum_{i \neq j \neq l / j \neq k / k = i} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_k, X_l) (X_i^* \cdot X_j \cdot X_k^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha - X_k^* \cdot X_l \cdot X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha) \\
&= \frac{1}{16} \sum_{i \neq j \neq l} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_i, X_l) (X_i^* \cdot X_j \cdot X_i^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha - X_i^* \cdot X_l \cdot X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha) \\
&= \frac{1}{16} \sum_{i \neq j \neq l} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_i, X_l) (X_j^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha - X_l \cdot X_j^* \cdot \psi_\alpha) \\
&= \frac{1}{8} \sum_{i \neq j \neq l} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_i, X_l) X_j^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha,
\end{aligned}$$

la somme '12'

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{16} \sum_{i \neq j \neq k / l = i} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_k, X_l) (X_i^* \cdot X_j \cdot X_k^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha - X_k^* \cdot X_l \cdot X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha) \\
&= \frac{1}{16} \sum_{i \neq j \neq k} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_k, X_i) (X_i^* \cdot X_j \cdot X_k^* \cdot X_i \cdot \psi_\alpha - X_k^* \cdot X_i \cdot X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha) \\
&= \frac{1}{16} \sum_{i \neq j \neq k} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_k, X_i) (-X_j^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha + X_k \cdot X_j^* \cdot \psi_\alpha) \\
&= -\frac{1}{8} \sum_{i \neq j \neq k} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_k, X_i) X_j^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha,
\end{aligned}$$

la somme '13'

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{16} \sum_{i \neq j \neq k/l=j} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_k, X_l) (X_i^* \cdot X_j \cdot X_k^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha - X_k^* \cdot X_l \cdot X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha) \\
&= \frac{1}{16} \sum_{i \neq j \neq k} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_k, X_j) (X_i^* \cdot X_j \cdot X_k^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha - X_k^* \cdot X_j \cdot X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha) \\
&= \frac{1}{16} \sum_{i \neq j \neq k} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_k, X_j) (X_i^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha - X_k \cdot X_i^* \cdot \psi_\alpha) \\
&= \frac{1}{8} \sum_{i \neq j \neq k} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_k, X_j) X_i^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha,
\end{aligned}$$

et la somme '15'

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{16} \sum_{i \neq j \neq k \neq l} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_k, X_l) (X_i^* \cdot X_j \cdot X_k^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha - X_k^* \cdot X_l \cdot X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha) \\
&= \frac{1}{16} \sum_{i \neq j \neq k \neq l} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_k, X_l) (X_i^* \cdot X_j \cdot X_k^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha - X_i^* \cdot X_j \cdot X_k^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned}
e + e' &= -\frac{1}{8} \sum_{i \neq j \neq l} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_j, X_l) X_i^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha \\
&\quad - \frac{1}{8} \sum_{i \neq j \neq l} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_j, X_l) X_i^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha \\
&\quad - \frac{1}{8} \sum_{i \neq j \neq l} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_j, X_l) X_i^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha \\
&\quad - \frac{1}{8} \sum_{i \neq j \neq l} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_j, X_l) X_i^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha,
\end{aligned}$$

d'où

$$e + e' = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j \neq k} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_j, X_k) X_i^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
a + a' + b + b' + c + c' + d + d' + e + e' &= \frac{1}{2} \theta^g(X) \sum_{i \neq j} g(D_Y X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha - \frac{1}{2} \theta^g(Y) \sum_{i \neq j} g(D_X X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_k \sum_{i \neq j} g(D_X X_j, X_k) g(D_Y X_i, X_k) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
&\quad - \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(D_Y X_i, X_j) g(D_X X_j, X_i) \psi_\alpha + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_j, X_i) \psi_\alpha \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_k \sum_{i \neq j} g(D_Y X_k, X_j) g(D_X X_i, X_k) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
&\quad - \frac{1}{4} \sum_k \sum_{i \neq j} g(D_X X_k, X_j) g(D_Y X_i, X_k) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(D_Y X_i, X_j) g(D_X X_j, X_i) \psi_\alpha - \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_j, X_i) \psi_\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4} \sum_j \sum_{i \neq k} g(D_Y X_i, X_j) g(D_X X_j, X_k) X_i^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha \\
& + \frac{1}{4} \sum_j \sum_{i \neq k} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_j, X_k) X_i^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j \neq k} g(D_X X_i, X_j) g(D_Y X_j, X_k) X_i^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha.
\end{aligned}$$

La somme des trois premiers termes vaut:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \left(\theta^g(X) g(D_Y X_i, X_j) - \theta^g(Y) g(D_X X_i, X_j) \right) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j/k=i} \theta^g(Y) g(D_X X_j, X_i) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \theta^g(X) g(D_Y X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j \neq k} g(D_X X_j, X_k) g(D_Y X_i, X_k) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
& = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j \neq k} g(D_X X_j, X_k) g(D_Y X_i, X_k) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha,
\end{aligned}$$

La somme du quatrième et du cinquième vaut:

$$\begin{aligned}
& - \frac{n}{4} \theta^g(X) \theta^g(Y) \psi_\alpha + \frac{n}{4} \theta^g(Y) \theta^g(X) \psi_\alpha + \frac{1}{4} \sum_{i \neq j} g(D_Y X_j, X_i) g(D_X X_j, X_i) \psi_\alpha \\
& - \frac{1}{4} \sum_{i \neq j} g(D_X X_j, X_i) g(D_Y X_j, X_i) \psi_\alpha \\
& = 0.
\end{aligned}$$

La somme du sixième et du septième vaut:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \sum_{i \neq j/k=i} g(D_Y X_i, X_j) \theta^g(X) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha + \frac{1}{4} \sum_{i \neq j/k=j} g(D_X X_i, X_j) \theta^g(Y) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
& - \frac{1}{4} \sum_{i \neq j \neq k} g(D_Y X_j, X_k) g(D_X X_i, X_k) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
& - \frac{1}{4} \sum_{i \neq j} g(D_X X_i, X_j) \theta^g(Y) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha - \frac{1}{4} \sum_{i \neq j} g(D_Y X_i, X_j) \theta^g(X) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
& + \frac{1}{4} \sum_{i \neq j \neq k} g(D_X X_j, X_k) g(D_Y X_i, X_k) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
& = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j \neq k} g(D_X X_j, X_k) g(D_Y X_i, X_k) X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha.
\end{aligned}$$

La somme du huitième et du neuvième vaut:

$$\begin{aligned}
& - \frac{n}{4} \theta^g(X) \theta^g(Y) \psi_\alpha - \frac{1}{4} \sum_{i \neq j} g(D_Y X_j, X_i) g(D_X X_j, X_i) \psi_\alpha \\
& + \frac{n}{4} \theta^g(Y) \theta^g(X) \psi_\alpha + \frac{1}{4} \sum_{i \neq j} g(D_X X_j, X_i) g(D_Y X_j, X_i) \psi_\alpha \\
& = 0.
\end{aligned}$$

La somme du dixième et du onzième vaut:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \sum_{i \neq k/i=j} \theta^g(Y)g(D_X X_i, X_k)X_i^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha - \frac{1}{4} \sum_{i \neq k/j=k} \theta^g(X)g(D_Y X_i, X_k)X_i^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha \\
& - \frac{1}{4} \sum_{i \neq j \neq k} g(D_Y X_i, X_j)g(D_X X_j, X_k)X_i^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha \\
& + \frac{1}{4} \sum_{i \neq k} \theta^g(X)g(D_Y X_i, X_k)X_i^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha + \frac{1}{4} \sum_{i \neq k} \theta^g(Y)g(D_X X_i, X_k)X_i^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha \\
& + \frac{1}{4} \sum_{i \neq j \neq k} g(D_X X_i, X_j)g(D_Y X_j, X_k)X_i^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha \\
& = \frac{1}{4} \sum_{i \neq j \neq k} \left(g(D_Y X_j, X_i)g(D_X X_j, X_k) - g(D_X X_j, X_i)g(D_Y X_j, X_k) \right) X_i^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \sum_{i \neq j \neq k} \left(g(D_Y X_j, X_i)g(D_X X_j, X_k) - g(D_X X_j, X_i)g(D_Y X_j, X_k) \right) X_i^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha \\
& = \frac{1}{4} \sum_{i \neq j \neq k} g(D_Y X_j, X_k)g(D_X X_j, X_i)X_k \cdot X_i^* \cdot \psi_\alpha - \frac{1}{4} \sum_{i \neq j \neq k} g(D_X X_j, X_k)g(D_Y X_j, X_i)X_k \cdot X_i^* \cdot \psi_\alpha \\
& = \frac{1}{4} \sum_{i \neq j \neq k} g(D_Y X_j, X_k)g(D_X X_i, X_j)X_i^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha + \frac{1}{4} \sum_{i \neq j \neq k} g(D_X X_i, X_j)g(D_Y X_j, X_k)X_i^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha \\
& = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j \neq k} g(D_X X_i, X_j)g(D_Y X_j, X_k)X_i^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha.
\end{aligned}$$

La somme $a + a' + b + b' + c + c' + d + d' + e + e'$ se réduit donc à: 0. Ainsi

$$\begin{aligned}
R_{X,Y}^{(k)} \psi_\alpha & = (k + \frac{n}{4})\rho^D(X,Y)\psi_\alpha + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(R_{X,Y}^D X_i, X_j)X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\
& = k\rho^D(X,Y)\psi_\alpha + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g((R_A^D)_{X,Y} X_i, X_j)X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \text{ car } R^D = R_A^D + \rho^D \otimes I. \quad \square
\end{aligned}$$

On va d'autre part chercher à relier les multiplications de Clifford de ψ_α par R_A^D et celles par ρ^D , Ric^D et $Scal^D$:

Proposition 4.9 *Pour tout champ de vecteurs X sur M , on a:*

$$\begin{aligned}
1. \quad & \sum_{i,j,k} g((R_A^D)_{X,X_i} X_j, X_k)X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha = 2 \sum_{k=1}^n Ric'^D(X, X_k)X_k^* \cdot \psi_\alpha \\
& - 2 \sum_{k=1}^n \rho^D(X, X_k)X_k^* \cdot \psi_\alpha - 2X \cdot \rho^D \cdot \psi_\alpha \\
2. \quad & \sum_{i,j,k,l} g((R_A^D)_{X_i, X_j} X_k, X_l)X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_k^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha = 4(n-2)\rho^D \cdot \psi_\alpha - 2nScal^D \psi_\alpha
\end{aligned}$$

Preuve: 1. Fixons $l \in \{1, \dots, n\}$ et montrons le résultat pour $X = X_l$:

$$\sum_{i,j,k} g((R_A^D)_{X_l, X_i} X_j, X_k)X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha = \sum_{i \neq l, j \neq k} g((R_A^D)_{X_l, X_i} X_j, X_k)X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq l, j \neq k} g((R_A^D)_{X_l, X_i} X_j, X_k) X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha &= \sum_{i \neq l, j \neq k} g((R_A^D)_{X_j, X_k} X_l, X_i) X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha \\ &+ \sum_{i \neq l, j \neq k} \left(\rho^D(X_l, X_j) g(X_i, X_k) + \rho^D(X_k, X_l) g(X_i, X_j) \right. \\ &\left. + \rho^D(X_j, X_i) g(X_l, X_k) + \rho^D(X_i, X_k) g(X_l, X_j) \right) X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha \end{aligned}$$

On remarque que les deux premiers termes de la deuxième somme du membre de droite donnent la même somme, ainsi que les deux derniers. En outre,

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq l, j \neq k} \rho^D(X_l, X_j) g(X_i, X_k) X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha &= \sum_{i \neq j \neq l} \rho^D(X_l, X_j) X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_i \cdot \psi_\alpha \\ &= (n-2) \sum_{j \neq l} \rho^D(X_l, X_j) X_j^* \cdot \psi_\alpha \\ &= (n-2) \mu_2(\rho^D(X_l), \psi_\alpha) \end{aligned}$$

où

$$\mu_2(\rho^D(X_l), \psi_\alpha) = \sum_{j, l} \rho^D(X_l, X_j) X_j^* \cdot \psi_\alpha.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq l, j \neq k} \rho^D(X_j, X_i) g(X_l, X_k) X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha &= \sum_{i \neq j \neq l} \rho^D(X_j, X_i) X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_l \cdot \psi_\alpha \\ &= -X_l \cdot \rho^D \cdot \psi_\alpha - 2\mu_2(\rho^D(X_l), \psi_\alpha). \end{aligned}$$

Ainsi, la deuxième somme vaut:

$$2(n-2)\mu_2(\rho^D(X_l), \psi_\alpha) - 2X_l \cdot \rho^D \cdot \psi_\alpha - 4\mu_2(\rho^D(X_l), \psi_\alpha)$$

Reste à calculer la première somme:

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq l, j \neq k} g((R_A^D)_{X_j, X_k} X_l, X_i) X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha &= - \sum_{i \neq l, j \neq k} g((R_A^D)_{X_j, X_k} X_i, X_l) X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha \\ &= - \sum_{i \neq j \neq k} g((R_A^D)_{X_j, X_k} X_i, X_l) X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha \\ &+ \sum_{j \neq k, i=j} g((R_A^D)_{X_j, X_k} X_j, X_l) X_k^* \cdot \psi_\alpha \\ &- \sum_{j \neq k, i=k} g((R_A^D)_{X_j, X_k} X_k, X_l) X_k^* \cdot X_j^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha \end{aligned}$$

Les deux derniers termes sont identiques, et leur somme vaut

$$2 \sum_{j \neq k} g((R_A^D)_{X_j, X_k} X_j, X_l) X_k^* \cdot \psi_\alpha = 2 \sum_{k=1}^n Ric'^D(X_k, X_l) X_k^* \psi_\alpha$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n Ric'^D(X_l, X_i) X_i^* \psi_\alpha - \sum_{i=1}^n Ric'^D(X_i, X_l) X_i^* \psi_\alpha &= (n-2) \sum_{i=1}^n \rho^D(X_l, X_i) X_i^* \cdot \psi_\alpha \\ &= (n-2) \mu_2(\rho^D(X_l), \psi_\alpha) \end{aligned}$$

donc

$$2 \sum_{j \neq k} g((R_A^D)_{X_j, X_k} X_j, X_l) X_k^* \cdot \psi_\alpha = 2\mu_2(\text{Ric}'^D(X_l), \psi_\alpha) - 2(n-2)\mu_2(\rho^D(X_l), \psi_\alpha)$$

Reste à traiter le premier terme

$$- \sum_{i \neq j \neq k} g((R_A^D)_{X_j, X_k} X_i, X_l) X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha$$

Or $R_A^D = R^D - \rho^D \otimes I$ et R^D vérifie la première identité de Bianchi, donc

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j \neq k} g(R_{X_j, X_k}^D X_i, X_l) X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha &= - \sum_{i \neq j \neq k} g(R_{X_k, X_i}^D X_j, X_l) X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha \\ &\quad - \sum_{i \neq j \neq k} g(R_{X_i, X_j}^D X_k, X_l) X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha \\ &= - \sum_{i \neq j \neq k} g(R_{X_j, X_k}^D X_i, X_l) X_k^* \cdot X_i^* \cdot X_j \cdot \psi_\alpha \\ &\quad - \sum_{i \neq j \neq k} g(R_{X_j, X_k}^D X_i, X_l) X_j^* \cdot X_k^* \cdot X_i \cdot \psi_\alpha \\ &= -2 \sum_{i \neq j \neq k} g(R_{X_j, X_k}^D X_i, X_l) X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha \\ \text{donc} &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} - \sum_{i \neq j \neq k} g((R_A^D)_{X_j, X_k} X_i, X_l) X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha &= \sum_{i \neq j \neq k} \rho^D(X_j, X_k) g(X_i, X_l) X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha \\ &= \sum_{j \neq k, j \neq l, k \neq l} \rho^D(X_j, X_k) X_l^* \cdot X_j^* \cdot X_k \cdot \psi_\alpha \\ &= X_l \cdot \rho^D \cdot \psi_\alpha + 2\mu_2(\rho^D(X_l), \psi_\alpha) \end{aligned}$$

et la conclusion est immédiate.

2. Le membre de gauche vaut, d'après 1.,

$$2 \sum_{i, k} \text{Ric}'^D(X_i, X_k) X_i^* \cdot X_k^* \cdot \psi_\alpha - 2 \sum_{i, k} \rho^D(X_i, X_k) X_i^* \cdot X_k^* \cdot \psi_\alpha - 2 \sum_i X_i^* \cdot X_i \cdot \rho^D \cdot \psi_\alpha$$

et

$$\begin{aligned} -2 \sum_{i, k} \rho^D(X_i, X_k) X_i^* \cdot X_k^* \cdot \psi_\alpha &= -4\rho^D \cdot \psi_\alpha \\ -2 \sum_i X_i^* \cdot X_i \cdot \rho^D \cdot \psi_\alpha &= 2n\rho^D \cdot \psi_\alpha \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \sum_{i, k} \text{Ric}'^D(X_i, X_k) X_i^* \cdot X_k^* \cdot \psi_\alpha &= -n \text{Scal}^D \psi_\alpha \\ &\quad + \sum_{i < k} (\text{Ric}'^D(X_i, X_k) - \text{Ric}'^D(X_k, X_i)) X_i^* \cdot X_k^* \cdot \psi_\alpha \\ &= -n \text{Scal}^D \psi_\alpha + (n-2)\rho^D \cdot \psi_\alpha \end{aligned}$$

d'où, en sommant, on obtient le résultat. \square

4.2.3 Opérateur de Dirac et laplacien conformes

La donnée d'une structure de Weyl sur une variété CSpin conforme induit naturellement, on l'a vu, une connexion linéaire sur chaque fibré des spineurs à poids de la variété. Comme dans le cas riemannien, on peut alors construire un opérateur de Dirac sur chacun de ces fibrés :

Définition 4.15 Soit D une structure de Weyl sur une variété CSpin conforme (M^n, c) . L'opérateur de Dirac P associé à D sur le fibré des spineurs de poids k est défini par :

$$\begin{aligned} P : \Gamma(\Sigma^{(k)} M) &\longrightarrow \Gamma(\Sigma^{(k-1)} M) \\ \psi &\longmapsto P\psi = \sum_{i=1}^n X_i^* \cdot D_{X_i}^{(k)} \psi \end{aligned}$$

où $(X_i)_{1 \leq i \leq n} : U \longrightarrow CO^+ M$ est une section locale de $CO^+ M$.

Remarques 4.6

1. En fait, $P = m \circ D^{(k)}$, où $m : \Gamma(T^* M \otimes \Sigma^{(k)} M) \longrightarrow \Gamma(\Sigma^{(k-1)} M)$ est la multiplication de Clifford.
2. A la différence du cas riemannien, P modifie le poids conforme des spineurs.

Proposition 4.10 Soit une autre structure de Weyl D' sur (M^n, c) , d'opérateur de Dirac P' sur les spineurs de poids k , et γ la 1-forme sur M définie par

$$(D')^{\mathcal{L}^1} = D^{\mathcal{L}^1} + \gamma.$$

Alors

$$\forall \psi \in \Gamma(\Sigma^{(k)} M), \quad P' \psi - P\psi = \left(\frac{n-1}{2} + k\right) \gamma \cdot \psi$$

Corollaire 4.1

1. Lorsque $k = -\frac{n-1}{2}$, l'opérateur de Dirac sur $\Sigma^{(k)} M$ est indépendant de la structure de Weyl choisie sur (M^n, c) .
2. Si g est une métrique de c et P^g l'opérateur de Dirac riemannien associé à g sur $\Sigma_g M$, alors

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall \psi \in \Gamma(\Sigma^{(k)} M), \quad P\psi = l_g^{-1} (P^g \psi + \left(\frac{n-1}{2} + k\right) \mu_g(\theta^g, \psi))$$

Définition 4.16 Le laplacien conforme sur les spineurs de poids k est défini par

$$\begin{aligned} \Delta^{(k)} : \Gamma(\Sigma^{(k)} M) &\longrightarrow \Gamma(\Sigma^{(k-2)} M) \\ \psi &\longmapsto \sum_{i=1}^n l_g^{-2} (D_{D_{X_i} X_i}^{(k)} \psi - D_{X_i}^{(k)} D_{X_i}^{(k)} \psi) \end{aligned}$$

où $g \in c$ et $(X_i)_{1 \leq i \leq n} : U \longrightarrow SO_g M$ est une section locale de $SO_g M$.

Grâce à (4.9), on peut immédiatement donner une relation entre le carré de l'opérateur de Dirac et le laplacien conforme :

Théorème 4.4 (formule de Schrödinger-Lichnérowicz conforme) Soit une section ψ de $\Sigma^{(k)} M$. Alors

$$P^2 \psi = \Delta^{(k)} \psi + \frac{n}{4} \text{Scal}^D \psi - \frac{1}{2} (n-2+2k) \rho^D \cdot \psi$$

Preuve: Par définition de l'opérateur de Dirac,

$$\begin{aligned} P^2 \psi &= \sum_{i,j=1}^n X_i^* \cdot D_{X_i}^{(k-1)} (X_j^* \cdot D_{X_j}^{(k)} \psi) \\ &= \sum_{i,j=1}^n X_i^* \cdot D_{X_i} X_j^* \cdot D_{X_j}^{(k)} \psi + \sum_{i,j=1}^n X_i^* \cdot X_j^* \cdot D_{X_i}^{(k)} D_{X_j}^{(k)} \psi \end{aligned}$$

La seconde somme s'exprime sous la forme:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n X_i^* \cdot X_j^* \cdot \left(D_{X_i}^{(k)} D_{X_j}^{(k)} \psi - D_{X_j}^{(k)} D_{X_i}^{(k)} \psi \right) &= - \sum_{i=1}^n l_g^{-2} D_{X_i}^{(k)} D_{X_i}^{(k)} \psi \\ &+ \sum_{i < j} X_i^* \cdot X_j^* \cdot \left(D_{X_i}^{(k)} D_{X_j}^{(k)} \psi - D_{X_j}^{(k)} D_{X_i}^{(k)} \psi \right) \end{aligned}$$

et la première

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n X_i^* \cdot D_{X_i} X_j^* \cdot D_{X_j}^{(k)} \psi &= \sum_{i,j,l=1}^n D_{X_i} X_j^*(X_l) X_i^* \cdot X_l^* \cdot D_{X_j}^{(k)} \psi \\ &= - \sum_{i,j,l=1}^n g(D_{X_i} X_l, X_j) X_i^* \cdot X_l^* \cdot D_{X_j}^{(k)} \psi \text{ car } X_i(X_j^*(X_l)) = 0 \\ &= - \sum_{i,l=1}^n X_i^* \cdot X_l^* \cdot D_{D_{X_i} X_l}^{(k)} \psi \\ &= \sum_{i=1}^n l_g^{-2} D_{D_{X_i} X_i}^{(k)} \psi - \sum_{i < l} X_i^* \cdot X_l^* \cdot D_{[X_i, X_l]}^{(k)} \psi \text{ car } D \text{ est sans torsion} \end{aligned}$$

d'où

$$P^2 \psi = \sum_{i=1}^n l_g^{-2} \left(D_{D_{X_i} X_i}^{(k)} \psi - D_{X_i}^{(k)} D_{X_i}^{(k)} \psi \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n X_i^* \cdot X_j^* \cdot \left([D_{X_i}^{(k)}, D_{X_j}^{(k)}] \psi - D_{[X_i, X_j]}^{(k)} \psi \right)$$

avec $[D_{X_i}^{(k)}, D_{X_j}^{(k)}] \psi - D_{[X_i, X_j]}^{(k)} \psi = -R_{X_i, X_j}^{(k)} \psi$. De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n X_i^* \cdot X_j^* \cdot R_{X_i, X_j}^{(k)} \psi &= \frac{1}{4} \sum_{k,l,i,j} g((R_A^D)_{X_i, X_j} X_k, X_l) X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_k^* \cdot X_l^* \cdot \psi \\ &+ k \sum_{i,j} \rho^D(X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j^* \cdot \psi \\ &= \frac{1}{4} \left(4(n-2) \rho^D \cdot \psi - 2n \text{Scal}^D \psi \right) + 2k \rho^D \cdot \psi \end{aligned}$$

d'où

$$P^2 \psi = \Delta^{(k)} \psi + \frac{n}{4} \text{Scal}^D \psi - \frac{1}{2} (n-2 + 2k) \rho^D \cdot \psi. \quad \square$$

4.2.4 Opérateur des twisteurs

Dans toute la suite, pour un $(0,2)$ -tenseur b sur M , on note, pour tout champ de vecteurs X sur M et pour toute section ψ de $\Sigma^{(k)} M$,

$$\mu_2(b(X), \psi) = \sum_{i=1}^n b(X, X_i) X_i^* \cdot \psi$$

pour n'importe quelle section $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $CO^+ M$.

Définition 4.17 Soit (M^n, c) une variété conforme $CSpin$ munie d'une structure de Weyl D . L'opérateur des twisteurs sur les spineurs de poids k est défini par

$$\begin{aligned} \text{Twist} : \Gamma(\Sigma^{(k)} M) &\longrightarrow \Gamma(T^* M \otimes \Sigma^{(k)} M) \\ \psi &\longmapsto \text{Twist } \psi \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \text{Twist } \psi : \Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(\Sigma^{(k)}M) \\ X &\longmapsto D_X^{(k)}\psi + \frac{1}{n}X \cdot P\psi \end{aligned}$$

Proposition 4.11 *Soit une autre structure de Weyl D' sur (M^n, c) , d'opérateur des twisteurs Twist' sur les spineurs de poids k , et γ la 1-forme sur M définie par*

$$(D')^{\mathcal{L}^1} = D^{\mathcal{L}^1} + \gamma.$$

Alors

$$\forall X \in \Gamma(TM), \quad \forall \psi \in \Gamma(\Sigma^{(k)}M), \quad (\text{Twist}'\psi - \text{Twist}\psi)_X = (k - \frac{1}{2})(\gamma(X)\psi + \frac{1}{n}X \cdot \gamma \cdot \psi)$$

Corollaire 4.2

1. Lorsque $k = \frac{1}{2}$, l'opérateur des twisteurs sur $\Sigma^{(k)}M$ est indépendant de la structure de Weyl choisie sur (M^n, c) .
2. Si g est une métrique de c et Twist^g l'opérateur des twisteurs riemannien associé à g sur $\Sigma_g M$, alors pour tout réel k ,

$$\forall X \in \Gamma(TM), \quad \forall \psi \in \Gamma(\Sigma^{(k)}M), \quad \text{Twist}_X\psi = \text{Twist}_X^g\psi + (k - \frac{1}{2})(\theta^g(X)\psi + \frac{1}{n}X \cdot \theta^g \cdot \psi)$$

On s'intéresse maintenant au noyau de l'opérateur des twisteurs :

Définition 4.18 *On appelle spineur twisteur de poids k sur M tout élément du noyau de l'opérateur Twist , i.e. toute section de $\Sigma^{(k)}M$ vérifiant*

$$\forall X \in \Gamma(TM), \quad \text{Twist}_X\psi = 0$$

Pour un spineur twisteur sur M , il existe une relation fondamentale :

Lemme 4.3 *Soit ψ un spineur twisteur de poids k . Alors pour tout champ de vecteurs X sur M ,*

$$\begin{aligned} D_X^{(k-1)}(P\psi) &= \frac{n}{n-2} \left(\left(\frac{1}{2} - k \right) \mu_2(\rho^D(X), \psi) - \frac{1}{2} \mu_2(\text{Ric}'^D(X), \psi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} X \cdot \rho^D \cdot \psi + \frac{1}{n} X \cdot P^2\psi \right) \end{aligned}$$

Preuve: D'après (4.9), on a d'une part

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{i,j,k} g((R_A^D)_{X, X_i} X_j, X_k) X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_k \cdot \psi &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{Ric}'^D(X, X_k) X_k^* \cdot \psi \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \rho^D(X, X_k) X_k^* \cdot \psi - \frac{1}{2} X \cdot \rho^D \cdot \psi \end{aligned}$$

et aussi

$$\frac{1}{4} \sum_{i,j,k} g((R_A^D)_{X, X_i} X_j, X_k) X_i^* \cdot X_j^* \cdot X_k \cdot \psi = \sum_{i=1}^n X_i^* \cdot R_{X, X_i}^{(k)} \psi - k \sum_{i=1}^n \rho^D(X, X_i) X_i^* \cdot \psi$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i^* \cdot R_{X, X_i}^{(k)} \psi &= \sum_{i=1}^n X_i^* \cdot (D_{[X, X_i]}^{(k)} \psi - [D_X^{(k)}, D_{X_i}^{(k)}] \psi) \\ &= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^* \cdot [X, X_i] \cdot P\psi - \sum_{i=1}^n X_i^* \cdot D_X^{(k)} D_{X_i}^{(k)} \psi + \sum_{i=1}^n X_i^* \cdot D_{X_i}^{(k)} D_X^{(k)} \psi \end{aligned}$$

La seconde somme du membre de droite vaut

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^n X_i^* \cdot D_X^{(k)} \left(-\frac{1}{n} X_i \cdot P\psi\right) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^* \cdot D_X X_i \cdot P\psi + X_i^* \cdot X_i \cdot D_X^{(k-1)}(P\psi) \\ &= -D_X^{(k-1)}(P\psi) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^* \cdot D_X X_i \cdot P\psi \end{aligned}$$

et la troisième

$$\sum_{i=1}^n X_i^* \cdot D_{X_i}^{(k)} \left(-\frac{1}{n} X \cdot P\psi\right) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^* \cdot D_{X_i} X \cdot P\psi - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^* \cdot X \cdot D_{X_i}^{(k-1)}(P\psi)$$

et comme

$$X_i^* \cdot X \cdot D_{X_i}^{(k-1)}(P\psi) = -X \cdot X_i^* \cdot D_{X_i}^{(k-1)}(P\psi) - 2X_i^*(X)D_{X_i}^{(k-1)}(P\psi)$$

alors

$$\sum_{i=1}^n X_i^* \cdot R_{X, X_i}^{(k)} \psi = -D_X^{(k-1)}(P\psi) + \frac{1}{n} X \cdot P^2 \psi + \frac{2}{n} D_X^{(k-1)}(P\psi)$$

En fin de compte, en utilisant (4.8), on obtient

$$\begin{aligned} -D_X^{(k-1)}(P\psi) + \frac{1}{n} X \cdot P^2 \psi + \frac{2}{n} D_X^{(k-1)}(P\psi) &= \frac{1}{2} \mu_2(\text{Ric}'^D(X), \psi) + \left(k - \frac{1}{2}\right) \mu_2(\rho^D(X), \psi) \\ &\quad - \frac{1}{2} X \cdot \rho^D \cdot \psi \end{aligned}$$

d'où la relation voulue. \square

On en déduit immédiatement:

Proposition 4.12 *Soit ψ un spineur twisteur de poids k . Alors*

$$P^2 \psi = \frac{n^2}{4(n-1)} \text{Scal}^D \psi - \frac{n}{2(n-1)} (n-2+2k) \rho^D \cdot \psi$$

Preuve: Reprenons l'égalité du lemme précédent. On remplace X par X_i , on multiplie par X_i^* et on somme sur i :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i^* \cdot D_{X_i}^{(k-1)}(P\psi) &= \frac{n}{n-2} \left(\left(\frac{1}{2} - k\right) \sum_{i,j} \rho^D(X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j^* \cdot \psi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \text{Ric}'^D(X_i, X_j) X_i^* \cdot X_j^* \cdot \psi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i^* \cdot X_i \cdot \rho^D \cdot \psi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^* \cdot X_i \cdot P^2 \psi \right) \\ &= \frac{n}{n-2} \left(2\left(\frac{1}{2} - k\right) \rho^D \cdot \psi + \frac{n}{2} \text{Scal}^D \psi - 2\frac{1}{2} \left(\frac{n-2}{2}\right) \rho^D \cdot \psi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} n \rho^D \cdot \psi - P^2 \psi \right) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{n}{n-2}\right) P^2 \psi &= \frac{n}{n-2} \left(\frac{n}{2} \text{Scal}^D \psi + \left(1 - 2k - \left(\frac{n-2}{2}\right) - \frac{n}{2}\right) \rho^D \cdot \psi \right) \\ \text{donc } P^2 \psi &= \frac{n}{2(n-1)} \left(\frac{n}{2} \text{Scal}^D \psi + (2 - 2k - n) \rho^D \cdot \psi \right). \quad \square \end{aligned}$$

Donnons une conséquence de cette proposition:

Corollaire 4.3 *Pour un spineur twisteur ψ de poids k ,*

$$\Delta^{(k)}\psi = \frac{1}{n}P^2\psi$$

Preuve: D'après la formule de Schrödinger-Lichnérowicz conforme et la proposition précédente,

$$P^2\psi = \Delta^{(k)}\psi + \frac{n-1}{n}P^2\psi,$$

d'où le résultat. \square

Remarque 4.2 *On peut donner une démonstration directe de ce résultat: en effet*

$$\begin{aligned} \Delta^{(k)}\psi &= \sum_{i=1}^n l_g^{-2} (D_{D_{X_i} X_i}^{(k)} \psi - D_{X_i}^{(k)} D_{X_i}^{(k)} \psi) \text{ où } (X_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ } g\text{-orthonormée, } g \in c \\ &= \sum_{i=1}^n l_g^{-2} \left(-\frac{1}{n} D_{X_i} X_i \cdot P\psi - D_{X_i}^{(k)} \left(-\frac{1}{n} X_i \cdot P\psi \right) \right) \text{ car } \psi \text{ est un spineur twisteur} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_g^{-2} X_i \cdot D_{X_i}^{(k-1)} P\psi \text{ avec } l_g^{-2} X_i = X_i^* \\ &= \frac{1}{n} P^2\psi. \quad \square \end{aligned}$$

Comme application du lemme, on obtient, sous certaines conditions, l'existence d'une section parallèle du fibré des scalaires:

Proposition 4.13 *Si ψ est un spineur twisteur de poids k tel que*

$$k = \frac{1}{2} \text{ ou } \rho^D \cdot \psi = 0,$$

alors la section

$$C(\psi) = \text{Re}((\psi, P\psi))$$

de \mathcal{L}^{2k-1} est $D^{\mathcal{L}^1}$ -parallèle.

Preuve: Par compatibilité de la dérivée covariante D avec le produit scalaire hermitien, pour tout champ de vecteurs X sur M ,

$$\begin{aligned} D_X^{\mathcal{L}^1} (C(\psi)) &= \text{Re} \left(D_X^{\mathcal{L}^1} ((\psi, P\psi)) \right) = \text{Re} \left((D_X^{(k)} \psi, P\psi) \right) + \text{Re} \left((\psi, D_X^{(k-1)} (P\psi)) \right) \\ &= -\frac{1}{n} \text{Re} \left((X \cdot P\psi, P\psi) \right) \end{aligned}$$

car le deuxième terme est la partie réelle d'une somme de termes imaginaires (pour tout champ de vecteurs Y et tout spineur ϕ sur M , $(Y \cdot \phi, \phi) = -(\phi, Y \cdot \phi)$); mais pour la même raison, $(X \cdot P\psi, P\psi) \in i\mathbb{R}$ donc $D_X^{\mathcal{L}^1} (C(\psi)) = 0$. \square

La proposition (4.12) s'applique également à l'étude des zéros d'un spineur twisteur.

Lemme 4.4 *On suppose M connexe.*

1. *Un spineur twisteur ψ qui vérifie en un point x de M*

$$\psi_x = 0 \text{ et } (P\psi)_x = 0$$

est identiquement nul.

2. *En conséquence, l'espace des spineurs twisteurs sur M est de dimension finie inférieure ou égale à $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$.*

Preuve: Il suffit pour cela de voir que tout spineur twisteur de poids k fournit une section parallèle du fibré $\Sigma^{(k)}M \oplus \Sigma^{(k-1)}M$. Posons $E^k = \Sigma^{(k)}M \oplus \Sigma^{(k-1)}M$ et considérons la dérivée covariante D^{E^k} sur E^k donnée par:

$$D_X^{E^k} = \begin{pmatrix} D_X^{(k)} & \frac{1}{n}X \cdot \\ -D_X^{(k-1)}P & D_X^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

Si ψ est un spineur twisteur, clairement $D^{E^k}(\psi, P\psi) = 0$, et si $D^{E^k}(\psi, \phi) = 0$, on obtient aisément que ψ est un twisteur et que $\phi = P\psi$. Ainsi, l'espace des spineurs twisteurs de poids k sur M s'identifie à l'espace des sections parallèles de D^{E^k} , d'où la conclusion. \square

Théorème 4.5 *Soit ψ un spineur twisteur de poids k sur M . On suppose de plus M connexe. Alors*

- soit ψ est identiquement nul,
- soit l'ensemble des zéros de ψ est discret dans M .

Preuve: Supposons ψ non identiquement nul, et choisissons un zéro x de ψ dans M . D'après la proposition (4.12),

$$(D^{(k-1)}P\psi)_x = 0$$

D'autre part, pour tout champ de vecteurs X sur M ,

$$\begin{aligned} (D_X^{\mathcal{L}^1}((\psi, \psi)))_x &= 2Re((D_X^{(k)}\psi, \psi))_x \\ &= 0 \end{aligned}$$

et aussi

$$X((\psi, \psi)_g)_x = 0$$

Si on prend donc deux champs de vecteurs X et Y sur M , on a

$$D_X^{\mathcal{L}^1}D_Y^{\mathcal{L}^1}(\psi, \psi)_x = X(Y((\psi, \psi)_g))_x$$

Or on a aussi

$$\begin{aligned} D_X^{\mathcal{L}^1}D_Y^{\mathcal{L}^1}(\psi, \psi)_x &= 2Re(D_X^{\mathcal{L}^1}(D_Y^{\mathcal{L}^1}\psi, \psi))_x \\ &= 2Re(D_X^{\mathcal{L}^1}(-\frac{1}{n}Y \cdot P\psi, \psi))_x \\ &= -\frac{2}{n}Re((Y \cdot P\psi, D_X^{(k)}\psi))_x \\ &= \frac{2}{n^2}Re((Y \cdot P\psi, X \cdot P\psi))_x \\ &= \frac{2}{n^2}c(X, Y)(P\psi, P\psi)_x \end{aligned}$$

On en déduit, puisque $(P\psi, P\psi)_x \neq 0$ (sinon, par le précédent lemme, $\psi = 0$), que $Hess_g((\psi, \psi)_g)_x$ est non-dégénérée; par conséquent, x est isolé. \square

4.2.5 Spineurs de Killing

Définition 4.19 *Un spineur de Killing de poids k sur M est une section ψ de $\Sigma^{(k)}M$ satisfaisant :*

$$\forall X \in \Gamma(TM), \quad D_X^{(k)}\psi = \beta X \cdot \psi$$

pour une section β de $\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathbb{C}$. La section β est appelée densité de Killing de ψ .

Remarques 4.7

1. De manière équivalente, ψ est de Killing de densité β si et seulement si ψ est un spineur twisteur et si $P\psi = -n\beta\psi$.

2. Un spineur de Killing non trivial (i.e. non identiquement nul) n'a pas de zéros car est une section parallèle pour la dérivée covariante

$$D_X^{(k)} - \beta X.$$

On examine alors les conditions nécessaires d'existence de spineurs de Killing non triviaux sur (M^n, c, D) .

Théorème 4.6 Soit ψ un spineur de Killing de poids k non trivial de densité de Killing β .

1. Si β est imaginaire pur et $k \neq -\frac{n-2}{2}$, alors $(\rho^D \cdot \psi, \psi) = 0$.
2. Si β est un réel non nul, alors pour n'importe quelle valeur non nulle de k , et pour $n > 3$ si $k = 0$, D est exacte et (M^n, c, D) est d'Einstein-Weyl. De plus, $Scal^D = 4(n-1)\beta^2$.
3. Si β est nul,
 - si $k \neq 0$, alors D est exacte et (M^n, c, D) est d'Einstein-Weyl
 - si $k = 0$ et si $n > 2$, D est d'Einstein-Weyl et
 - . si $n \neq 4$ ou M est compacte, D est fermée
 - . si $n = 4$ et M est non compacte, ρ^D est harmonique.

Preuve:

1. D'après 4.12, on a

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{4(n-1)} Scal^D \psi - \frac{n}{2(n-1)} (n-2+2k) \rho^D \cdot \psi &= P^2 \psi \\ &= P(-n\beta\psi) \\ &= -n(D^{\mathcal{L}^1} \beta) \cdot \psi + n^2 \beta^2 \psi \end{aligned}$$

donc

$$n Scal^D \psi - 2(n-2+2k) \rho^D \cdot \psi = -4(n-1)(D^{\mathcal{L}^1} \beta) \cdot \psi + 4n(n-1)\beta^2 \psi \quad (4.2)$$

Par conséquent,

$$n Scal^D(\psi, \psi) - 2(n-2+2k)(\rho^D \cdot \psi, \psi) = -4(n-1)((D^{\mathcal{L}^1} \beta) \cdot \psi, \psi) + 4n(n-1)\beta^2(\psi, \psi) \quad (4.3)$$

Or

$$(\rho^D \cdot \psi, \psi) = \sum_{i < j} \rho^D(X_i, X_j)(X_i^* \cdot X_j^* \cdot \psi, \psi) \text{ et } (X_i^* \cdot X_j^* \cdot \psi, \psi) = -\overline{(X_i^* \cdot X_j^* \cdot \psi, \psi)}$$

donc $(\rho^D \cdot \psi, \psi) \in i\mathbb{R}$. De plus,

$$((D^{\mathcal{L}^1} \beta) \cdot \psi, \psi) = \sum_{i=1}^n (D_{X_i}^{\mathcal{L}^1} \beta)(X_i^* \cdot \psi, \psi) \text{ est réel puisque } \beta \in i\mathbb{R},$$

donc en prenant la partie imaginaire de l'identité (4.3), on obtient

$$\left(\frac{n-2}{2} + 2k\right)(\rho^D \cdot \psi, \psi) = 0,$$

et d'après l'hypothèse $k \neq -\frac{n-2}{2}$, $(\rho^D \cdot \psi, \psi) = 0$.

2. Si β est réel, alors

$$X((\psi, \psi)) = 2Re((D_X^{(k)} \psi, \psi)) = 2Re(\beta(X \cdot \psi, \psi)) = 0$$

par conséquent, puisque

$$\begin{aligned} X((\psi, \psi)) &= X((\psi, \psi)_g l_g^{2k}) \\ &= X((\psi, \psi)_g) l_g^{2k} + 2k\theta^g(X)(\psi, \psi)_g l_g^{2k} \end{aligned}$$

alors si $k \neq 0$, $\theta^g(X) = -\frac{1}{2k} \frac{X((\psi, \psi)_g)}{(\psi, \psi)_g}$ donc θ^g est exacte, d'où D est exacte. Si $k = 0$, on va montrer qu'alors β est $D^{\mathcal{L}^1}$ -parallèle : puisque $\beta \neq 0$, $\beta = fl_g$ où $f \in C^\infty(M)$. En supposant que

$$f(x) \neq 0 \quad \forall x \in M$$

(on le peut, quitte à travailler localement)

$$\begin{aligned} D_X^{\mathcal{L}^1} \beta = 0 \quad \forall X \in \Gamma(TM) &\iff X(f)l_g + f\theta^g(X)l_g = 0 \\ &\iff \theta^g(X) = -\frac{X(f)}{f} \end{aligned}$$

donc θ^g sera encore exacte. Pour cela, ramenons-nous à la définition de $R^{(0)}$:

$$\begin{aligned} R_{X,Y}^{(0)} \psi &= D_{[X,Y]}^{(0)} \psi - [D_X^{(0)}, D_Y^{(0)}] \psi \\ &= -(D_X^{\mathcal{L}^1} \beta)Y \cdot \psi + (D_Y^{\mathcal{L}^1} \beta)X \cdot \psi - \beta^2 Y \cdot X \cdot \psi + \beta^2 X \cdot Y \cdot \psi \\ &= -(D_X^{\mathcal{L}^1} \beta)Y \cdot \psi + (D_Y^{\mathcal{L}^1} \beta)X \cdot \psi - 2\beta^2 Y \cdot X \cdot \psi - 2c(X,Y)\beta^2 \psi \end{aligned}$$

$$\text{donc } \sum_{i=1}^n X_i^* \cdot R_{X_i, X_i}^D \psi = n(D_X^{\mathcal{L}^1} \beta)\psi + (D^{\mathcal{L}^1} \beta) \cdot X \cdot \psi + 2(n-1)\beta^2 X \cdot \psi$$

$$\text{et par ailleurs} = \frac{1}{2}\mu_2(\text{Ric}'^D(X), \psi) - \frac{1}{2}\mu_2(\rho^D(X), \psi) - \frac{1}{2}X \cdot \rho^D \cdot \psi$$

d'où

$$\begin{aligned} \mu_2(\text{Ric}'^D(X), \psi) &= \mu_2(\rho^D(X), \psi) + X \cdot \rho^D \cdot \psi + 2n(D_X^{\mathcal{L}^1} \beta)\psi + 2(D^{\mathcal{L}^1} \beta) \cdot X \cdot \psi \\ &\quad + 4(n-1)\beta^2 X \cdot \psi. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Comme par (4.3), on a $Scal^D = 4(n-1)\beta^2$ en prenant la partie réelle de chaque membre, on obtient, par (4.2),

$$\rho^D \cdot \psi = \frac{2(n-1)}{n-2}(D^{\mathcal{L}^1} \beta) \cdot \psi,$$

donc

$$\begin{aligned} \mu_2(\text{Ric}'^D(X), \psi) &= \mu_2(\rho^D(X), \psi) + 2n(D_X^{\mathcal{L}^1} \beta)\psi + 2(D^{\mathcal{L}^1} \beta) \cdot X \cdot \psi + 4(n-1)\beta^2 X \cdot \psi \\ &\quad + \frac{2(n-1)}{n-2}X \cdot (D^{\mathcal{L}^1} \beta) \cdot \psi \\ &= \mu_2(\rho^D(X), \psi) + 2n(D_X^{\mathcal{L}^1} \beta)\psi + 2(D^{\mathcal{L}^1} \beta) \cdot X \cdot \psi + 4(n-1)\beta^2 X \cdot \psi \\ &\quad - \frac{2(n-1)}{n-2}(D^{\mathcal{L}^1} \beta) \cdot X \cdot \psi - \frac{4(n-1)}{n-2}(D_X^{\mathcal{L}^1} \beta)\psi \\ &= \mu_2(\rho^D(X), \psi) + (2n - \frac{4(n-1)}{n-2})(D_X^{\mathcal{L}^1} \beta)\psi \\ &\quad + 2(1 - \frac{n-1}{n-2})(D^{\mathcal{L}^1} \beta) \cdot X \cdot \psi + 4(n-1)\beta^2 X \cdot \psi \end{aligned}$$

Prenons la partie réelle du produit scalaire hermitien de chaque membre de l'égalité précédente avec ψ : on obtient

$$\frac{2(n-1)(n-3)}{n-2}(D_X^{\mathcal{L}^1} \beta)(\psi, \psi) = 0.$$

En effet, la partie réelle de $((D^{\mathcal{L}^1} \beta) \cdot X \cdot \psi, \psi)$ vaut $-(D_X^{\mathcal{L}^1} \beta)(\psi, \psi)$. Ainsi, si $n \neq 3$, on en déduit que $D_X^{\mathcal{L}^1} \beta = 0$.

3. Si $\beta = 0$ et $k \neq 0$, comme en début de 2., D est exacte. Si $k = 0$, alors d'après (4.4),

$$\mu_2(\text{Ric}'^D(X), \psi) = \mu_2(\rho^D(X), \psi) + X \cdot \rho^D \cdot \psi.$$

Or, par (4.3), si $n > 2$, $Scal^D = 0$ et $\rho^D \cdot \psi = 0$, donc $\text{Ric}'^D = \rho^D$. En particulier (M^n, c, D) est d'Einstein-Weyl. On peut alors appliquer le théorème (4.3) pour conclure. \square

Chapitre 5

Conventions et notations

Dans tout ce mémoire, M^n désigne une variété lisse dénombrable à l'infini de dimension (réelle) n , TM son fibré tangent et $GL(TM)$ le $GL_n(\mathbb{R})$ -fibré des bases de TM .

On note $C^\infty(M)$ la \mathbb{R} -algèbre des fonctions numériques (réelles) lisses sur M . Pour un champ de vecteurs X et une fonction lisse f sur M , on note $X(f) = df(X)$.

Pour p et q entiers positifs, on appelle (p,q) -tenseur sur M toute section du fibré vectoriel réel $\otimes^p TM \otimes \otimes^q T^*M$. On note $T_q^p(M)$ le $C^\infty(M)$ -module des (p,q) -tenseurs sur M . Un (p,q) -tenseur peut être identifié à une application $C^\infty(M)$ -multilinéaire $\Gamma(T^*M)^p \times \Gamma(TM)^q \rightarrow C^\infty(M)$.

Pour un entier positif p , on note $\wedge^p T^*M$ le fibré vectoriel réel des formes p -alternées sur TM et $\Omega^p(M) = \Gamma(\wedge^p T^*M)$ le $C^\infty(M)$ -module des p -formes différentielles sur M ($\Omega^p(M) \subset T_p^0(M)$).

Si $\phi : M \rightarrow M'$ est une application lisse de la variété M dans la variété M' , et ω une p -forme sur M' , on note $\phi^*\omega$ la p -forme sur M image réciproque de ω par ϕ , définie par

$$(\phi^*\omega)(X_1, \dots, X_p) = \omega(T\phi(X_1), \dots, T\phi(X_p)).$$

Si ω est une p -forme sur M , on note $d\omega$ la $(p+1)$ -forme sur M définie de la manière suivante: si $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ est une carte locale de M^n , on pose $\omega_\phi = (\phi^{-1})^*\omega$ puis

$$d\omega = \phi^*(d_{\mathbb{R}^n}\omega_\phi)$$

où

$$d_{\mathbb{R}^n}\omega_0(V_1, \dots, V_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \omega'_0(V_i)(V_1, \dots, \widehat{V}_i, \dots, V_{p+1})$$

pour toute p -forme ω_0 sur \mathbb{R}^n (ω'_0 désigne la différentielle de ω_0 sur \mathbb{R}^n).

Pour un groupe de Lie G , on note \mathfrak{g} son algèbre de Lie, i.e. $\mathfrak{g} = T_e G$, où e est l'élément neutre de G . Si $f : G \rightarrow G'$ est un morphisme de groupes de Lie, on note $f_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ l'application tangente de f en l'élément neutre e .

Pour un entier strictement positif k , on note S_k le groupe symétrique d'ordre k , i.e. le groupe des permutations de $\{1, 2, \dots, k\}$, et $\epsilon : S_k \rightarrow \{-1, 1\}$ la signature. Pour deux entiers positifs i et j , on note δ_{ij} le symbole de Kronecker de i et j , i.e. $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, 0 sinon. On note aussi

$$\sum_{i \neq j \neq k} \text{ la somme } \sum_{i \neq j, i \neq k, j \neq k} .$$

Si on se donne un G -fibré $P \xrightarrow{\pi} M$ au-dessus de M , et une représentation linéaire de G , i.e. un morphisme de groupes de Lie $\nu : G \rightarrow \text{Aut}_K(V)$ où V est un espace vectoriel de dimension finie sur K ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), on note $P \times_\nu V$ le fibré K -vectoriel quotient de $P \times V$ par l'action à droite de G donnée par

$$\begin{aligned} (P \times V) \times G &\longrightarrow P \times V \\ ((p, v), g) &\longmapsto (p, g, \nu(g^{-1})(v)) \end{aligned}$$

On note $[p, v]$ la classe d'équivalence de (p, v) pour cette action.

Si $P' \xrightarrow{\pi'} M$ est un G' -fibré au-dessus de M , et $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes de Lie, on appelle morphisme des fibrés principaux au-dessus de f tout morphisme des fibrés $\hat{f} : P \rightarrow P'$ (i.e. application lisse de P dans P' telle que $\pi' \circ \hat{f} = \pi$) vérifiant:

$$\forall p \in P, \quad \forall g \in G, \quad \hat{f}(p.g) = \hat{f}(p).f(g)$$

On appelle connexion linéaire (ou dérivée covariante) associée à une 1-forme de connexion ω sur P et à une représentation linéaire ν de G la connexion linéaire D sur $P \times_\nu V$ définie par:

$$D_X([s, v]) = [s, X(v) + \nu_*(\omega \circ s_*(X))(v)]$$

où $s : U \rightarrow P$ est une section locale de P et $s_* = Ts$. Inversement, si $P = GL(TM)$ est le $GL_n(\mathbb{R})$ -fibré des bases de TM , la 1-forme de connexion ω associée à une connexion linéaire D sur M est l'élément de $\Gamma(T^*GL(TM) \otimes \mathfrak{gl}_n)$ défini dans les sections locales $s = (X_1, \dots, X_n)$ de $GL(TM)$ par:

$$s^*\omega = (\omega_{ji})_{1 \leq i, j \leq n}$$

où les ω_{ji} sont les 1-formes sur M données par

$$D_X X_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ji}(X) X_j$$

Si $P' \subset P$ est un G' -fibré au-dessus de M , avec $G' \subset G$ (P' est un fibré réduit de P), et si $\nu : G \rightarrow \text{Aut}_K(V)$ est une représentation linéaire de G , alors en posant $\nu' = \nu|_{G'}$,

$$\begin{aligned} P' \times_{\nu'} V &\longrightarrow P \times_\nu V \\ [p', v] &\longmapsto [p', v] \end{aligned}$$

est un isomorphisme des fibrés vectoriels. De plus, si ω est une 1-forme de connexion sur P vérifiant

$$\forall p' \in P', \quad (\omega_{p'})|_{T_{p'} P'} : T_{p'} P' \rightarrow \mathfrak{g},$$

alors les connexions linéaires associées à ω et $\omega|_{TP'}$ par ν et ν' sur $P \times_\nu V$ et $P' \times_{\nu'} V$ coïncident par l'isomorphisme précédent.

Si $\nu_i : G \rightarrow \text{Aut}_K(V_i)$, $i = 1, 2$, sont deux représentations linéaires de G , alors on note $\nu_1 \otimes \nu_2$ la représentation

$$\begin{aligned} \nu_1 \otimes \nu_2 : G &\longrightarrow \text{Aut}_K(V_1 \otimes V_2) \\ g &\longmapsto \nu_1(g) \otimes \nu_2(g) \end{aligned}$$

On obtient un isomorphisme des fibrés K -vectoriels

$$\begin{aligned} (P \times_{\nu_1} V_1) \otimes (P \times_{\nu_2} V_2) &\longrightarrow P \times_{\nu_1 \otimes \nu_2} (V_1 \otimes V_2) \\ [s, v_1] \otimes [s, v_2] &\longmapsto [s, v_1 \otimes v_2] \end{aligned}$$

(s désigne une section locale de P). De plus, si ω est une 1-forme de connexion sur P , et, pour $i = 1, 2$, D^i la connexion linéaire associée à ω et ν_i sur $P \times_{\nu_i} V_i$, alors la connexion linéaire associée à ω et $\nu_1 \otimes \nu_2$ sur $P \times_{\nu_1 \otimes \nu_2} (V_1 \otimes V_2)$ est donnée par:

$$\forall \psi_i \in \Gamma(P \times_{\nu_i} V_i), \quad i = 1, 2, \quad D_X(\psi_1 \otimes \psi_2) = (D_X^1 \psi_1) \otimes \psi_2 + \psi_1 \otimes (D_X^2 \psi_2)$$

Si E est un fibré vectoriel réel au-dessus de M , on note $S^2 E^*$ le fibré des (0,2)-tenseurs symétriques sur E . Si E et F sont deux fibrés vectoriels, on note $\text{Hom}(E, F)$ le fibré vectoriel défini par

$$\text{Hom}(E, F) = \coprod_{x \in M} \text{Hom}(E_x, F_x)$$

Pour une section s de $\text{Hom}(E,E)$, avec $r = \text{rang}(E)$, on note $\text{trace}(s)$ la fonction numérique sur M donnée par

$$\forall x \in M, \quad \text{trace}(s)(x) = \text{trace}(s_x) = \sum_{i=1}^r X_i^*(s_x(X_i))$$

où $(X_i)_{1 \leq i \leq r}$ est une base quelconque de E_x .

Si on se donne une métrique riemannienne g sur M^n , i.e. un $(0,2)$ -tenseur symétrique défini positif sur M^n :

- On note

$$\begin{aligned} TM & \xrightarrow{b,g} T^*M \\ X & \longmapsto X^{b,g} = g(X, \cdot) \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} T^*M & \xrightarrow{\sharp g} TM \\ \theta & \longmapsto \theta^{\sharp g} \end{aligned}$$

la dualité riemannienne resp. sa réciproque. On fait naturellement de celle-ci une g -isométrie en posant

$$\forall x \in M, \quad \forall \theta, \theta' \in T_x^*M, \quad g_x(\theta, \theta') = g_x(\theta^{\sharp g}, (\theta')^{\sharp g})$$

- On note O_gM le O_n -fibré des bases g -orthonormées de TM ; si M est orientée, on note SO_gM le SO_n -fibré des bases g -orthonormées directes sur M .
- On note D^g la connexion de Levi-Civita de g , i.e. l'unique dérivée covariante sur M qui préserve g ($D^g g = 0$) et qui soit sans torsion ($\forall X, Y \in \Gamma(TM), \quad D_X^g Y - D_Y^g X = [X, Y]$).
- On note tr_g l'application $C^\infty(M)$ -linéaire

$$\begin{aligned} tr_g : T_2^0(M) & \longrightarrow C^\infty(M) \\ S & \longmapsto \sum_{i=1}^n S(X_i, X_i) \end{aligned}$$

où $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base g -orthonormée locale quelconque.

- Un $(1,3)$ -tenseur R sur M
 - vérifie la première identité de Bianchi si et seulement si

$$\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM), \quad R(X, Y, Z) + R(Y, Z, X) + R(Z, X, Y) = 0$$

- vérifie la deuxième identité de Bianchi par rapport à une connexion linéaire D si et seulement si

$$\forall X, Y, Z, T \in \Gamma(TM), \quad D_X R(Y, Z, T) + D_Y R(Z, X, T) + D_Z R(X, Y, T) = 0$$

- est de type courbure sur (M^n, g) si et seulement si il vérifie la première identité de Bianchi et

$$\forall X, Y, Z, T \in \Gamma(TM), \quad g(R_{X,Y}Z, T) = -g(R_{X,Y}T, Z).$$

On note $\mathcal{C}(TM)$ le $C^\infty(M)$ -module des $(1,3)$ -tenseurs de type courbure sur (M^n, g) . $\mathcal{C}(TM) \subset S^2 \wedge^2 T^*M$.

- Si ρ est une 2-forme et X, Y deux champs de vecteurs sur M , on note $[\rho, X \wedge Y]$ l'endomorphisme g -antisymétrique de TM donné par

$$\forall Z \in \Gamma(TM), \quad [\rho, X \wedge Y]Z = \rho(X, Z)Y - g(Y, Z)(\rho(X))^{\sharp g} - \rho(Y, Z)X + g(X, Z)(\rho(Y))^{\sharp g}$$

- g induit un produit scalaire sur les (p,q) -tenseurs, appelé produit scalaire tensoriel (et dont on déduit une norme tensorielle), défini par :

$$g(X_1 \otimes \dots \otimes X_p \otimes \theta_1 \otimes \dots \otimes \theta_q, X'_1 \otimes \dots \otimes X'_p \otimes \theta'_1 \otimes \dots \otimes \theta'_q) = \\ g(X_1, X'_1) \dots g(X_p, X'_p) g(\theta_1, \theta'_1) \dots g(\theta_q, \theta'_q)$$

Par abus de notation, on le note souvent (\cdot, \cdot) , de norme $|\cdot|$, dans la partie ‘Géométrie hermitienne’. Par restriction, le produit scalaire ainsi défini sur $T_p^0(M)$ induit un produit scalaire sur les p -formes, et on a

$$\forall \alpha_i, \beta_j \in T_x^*M, \quad 1 \leq i, j \leq p \quad g(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p, \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_p) = p! \det((g(\alpha_i, \beta_j))_{1 \leq i, j \leq p})$$

On posera en fait

$$g(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p, \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_p) = \det((g(\alpha_i, \beta_j)));$$

sauf mention expresse, c’est de ce produit scalaire qu’il s’agit. D’autre part, $\bigwedge^2 T_x^*M \otimes T_x M$ hérite aussi d’un produit scalaire, mais on posera

$$g((\alpha_1 \wedge \alpha_2) \otimes X, (\beta_1 \wedge \beta_2) \otimes Y) = g(X, Y) \det(g(\alpha_i, \beta_j)),$$

i.e. ce produit scalaire sur $\bigwedge^2 T^*M \otimes TM$ est la moitié de celui induit par $T_2^1(M)$.

Remarque 5.1 Dès que D est sans torsion, le tenseur de courbure de D vérifie les deux identités de Bianchi (Cf [Be]).

Chapitre 6

Bibliographie

- [Be] A.L. Besse *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, (1987)
- [BHMM] J.-P. Bourguignon, O. Hijazi, J-L. Milhorat, A. Moroianu *A spinorial approach to riemannian and conformal geometry*, à paraître
- [Bu] V. Buchholz *Spinor equations in Weyl geometry*, Humboldt Universität, preprint, (1999)
- [Ca-Pe] D. Calderbank, H. Pedersen *Einstein-Weyl geometry*, Odense Universitet, preprint, 40, (1997)
- [Gau1] P.Gauduchon *Hermitian connections and Dirac operators*, Bol. U.M.I (7) 11-B, suppl. fasc. 2, 257-288, (1997)
- [Gau2] P. Gauduchon *Structures de Weyl et théorèmes d'annulation sur les variétés conformes autoduales*, An. Scuola Normale Superiore di Pisa, Série IV, Vol. XVIII, fasc. 4, (1991)
- [Hi] O. Hijazi *Spectral properties of the Dirac operator and geometrical structures*, Prépub. IECN, n° 36, (1998)
- [K-N] S. Kobayashi, K. Nomizu *Foundations of differential geometry*, T. I et II, Interscience Publishers, (1965)
- [Mo] A. Moroianu *Structures de Weyl admettant des spineurs parallèles*, Bull. Soc. Math. France, 124, (1996)
- [Ne-Ni] A. Newlander, L. Nirenberg *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. Math., 65, (1957)