Teilskript zur Vorlesung Lorentzgeometrie

Nicolas Ginoux

Universität Regensburg - SS 2010

7. August 2010

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Dieses Skript überdeckt vor allem den Teil der Vorlesung, der sich von den Hauptquellen [12], [3] und [1] unterscheidet[1]. Ein anderer Zweck ist, die zahlreichen Lücken der Vorlesung zu schließen. Ein paar Aussagen der semi-riemannschen Geometrie (z.B. erste und zweite Variation des Längenfunktionals) wurden hinzugefügt. Die Übungsblätter, die teilweise aus [2] und [12] stammen, wurden am Ende gesammelt. Ein herzliches Dankeschön geht an Olaf Müller, Marc Nardmann, Miguel Sánchez und Stefan Suhr für so anregende wie hilfreiche Diskussionen und (sehr) nutzliche Referenzen um das Thema sowie an die Zuhörer für ihr nachhaltiges Interesse und ihre ständig auftretenden pfiffigen Fragen. Meldungen von möglichen Fehlern oder noch nicht entdeckten Lücken werden gerne entgegengenommen.

Angekündigtes Programm: Eine Lorentz-Mannigfaltigkeit ist eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Metrik Index 1 hat. In den Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie angewurzelt hat sich die Lorentzgeometrie zu einem umfangreichen Gebiet entwickelt, welches einen natürlichen Rahmen für physikalische sowie analytische Probleme (u.a. Wellengleichungen) anbietet. In der Vorlesung werden nach einer Einführung in die Geometrie des Minkowski-Raumes Kausalitätsfragen auf Lorentz-Mannigfaltigkeiten untersucht. Als Abschlussthemen werden die Struktur global-hyperbolischer Mannigfaltigkeiten und die Singularitätensätze von Hawking und Penrose vorgeschlagen, je nach Bedarf oder Interesse der Zuhörer.

Tatsächliches Programm:

1. (19.4) Definition einer Lorentz-Mannigfaltigkeit, Vorlesungsplan, Kap. 1 (Beispiele), Minkowski-Raumzeit, Lorentz-Transformationen bis zur Proposition “ϕ ist Lorentz-Transformation $\iff$ ϕ ist linear und $(\phi(e_0), \ldots \phi(e_{n-1}))$ ist Lorentz-O.N.B. von $(\mathbb{R}^n, \langle\!\langle \cdot\,, \cdot \rangle\!\rangle)$”.

2. (21.4) Minkowski-Raumzeit 2/2: Satz “$\langle\!\langle x, x \rangle\!\rangle = \langle\!\langle y, y \rangle\!\rangle \iff \exists A \in \mathcal{L}(n)$ mit $A(x) = y$”, Untergruppe $\mathcal{L}^{\uparrow}(n)$ der Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}(n)$, die Poincaré-Gruppe ist die Isometriegruppe von $(\mathbb{R}^n, \langle\!\langle \cdot\,, \cdot \rangle\!\rangle)$.

3. (26.4) Die de-Sitter-Raumzeit: als semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, Isometriegruppe, Geodäten 1/2.

4. (28.4) Die de-Sitter-Raumzeit: Geodäten 2/2 (unerreichbare Punkte); die Anti-de-Sitter-Raumzeit: als semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, Isometriegruppe, Geodäten.

[1] indem, z.B., keine Quasilimiten vorkommen.

5. (3.5) Robertson-Walker Raumzeiten 1/2: als semi-riemannsche Mannigfaltigkeiten, Formeln für die versch. Komponenten des Krümmungstensors, Einstein-Bedingung ist äquivalent zur konstanten Schnittkrümmung.

6. (5.5) Robertson-Walker Raumzeiten 2/2: Massedichte und Druck, Friedman-Kosmos, Isometrien und Geodäten, Rotverschiebung.

7. (10.5) Die Schwarzschild-Halbebene: als semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, Isometrien und Geodäten, geodätische Vollständigkeit; Definition der 4-dim. Schwarzschild-Raumzeit.

8. (12.5) Kap. 2 (Kausalität in Raumzeiten): Zeitorientierung, Zeitorientierungsüberlagerung.

9. (17.5) Relationen $\leq, <, \ll$: $x \ll y \leq z \Rightarrow x \ll z$, die Kurve $\exp_x^{-1} \circ c$ verläuft in $I_+(0)$.

10. (19.5) Die Relation $\ll$ ist offen.

11. (26.5) Zusammenhang zwischen $I_\pm$ und $J_\pm$, jede kompakte Raumzeit hat eine geschlossene zeitartige Kurve; der Zeitunterschied, allg. Eigenschaften davon; Kausalitätsbedingungen.

12. (31.5) Kurvendeformationen: jede kausale Kurve, die keine glatte lichtartige Prägeodätische ist, kann durch zeitartige Kurven mit denselben Endpunkten approximiert werden; Erinnerung an Jacobi-Felder.

13. (2.6) Geodätische Variationen entlang Untermannigfaltigkeiten von semi-riemannschen Mannigfaltigkeiten, Brennpunkte, Beispiele, Approximation von auf raumartige Untermannigfaltigkeiten senkrecht stehenden lichtartigen Geodätischen durch zeitartige Kurven (Proposition angegeben und Beispiel diskutiert).

14. (7.6) Beweis der letzten Proposition 1/2.

15. (11.6) Beweis der letzten Proposition 2/2, Approximation von auf raumartige Untermannigfaltigkeiten nicht senkrecht stehenden lichtartigen Geodätischen durch zeitartige Kurven, Hauptsatz des Abschnitts (Approximation von kausalen Kurven durch zeitartige Kurven); konvexe Teilmengen 1/2: Existenz einer konvexen Unterumgebung einer Umgebung in einer semi-riemannschen Mannigfaltigkeit.

16. (14.6) Konvexe Teilmengen 2/2: Existenz einer konvexen Überdeckung einer semi-riemannschen Mannigfaltigkeit, Abbildung Δ, Anwendung der Konvexität auf die Fortsetzbarkeit von Geodätischen, konvexe Teilmengen von Lorentz-Mannigfaltigkeiten sind stark kausal und haben einen endlichen und stetigen Zeitunterschied.

17. (16.6) Kap. 3 (Globalhyperbolische Raumzeiten), Einführung und Motivation; achronale Teilmengen: Definition, Kante einer achronalen Teilmenge, "A achronal ist top. Hyperfläche (bzw. abgeschl. top. Hyperfläche) $\iff A \cap \mathrm{Kante}(A) = \varnothing$ (bzw. $\iff \mathrm{Kante}(A) = \varnothing$)", Anwendung auf den Rand von Zukunftsmengen.

18. (21.6) Cauchy-Hyperflächen 1/2: Definition, jede Cauchy-Hyperfläche ist eine abgeschl. top. Hyperfläche, die jede nichterw. or. kausale Kurve trifft, topologische Spaltung $\mathbb{R} \times \Sigma$.

19. (23.6) Cauchy-Hyperflächen 2/2: jede nichterw. or. kausale Kurve trifft eine vorgegebene Cauchy-Hyperfläche in einem (nichtleeren) kompakten Intervall, Grenzkurvenlemma (mit Beweisskizze), die Existenz einer Cauchy-Hyperfläche impliziert die Kausalitätsbedingung und die Kompaktheit von allen $J_+(x) \cap J_-(y)$; letzteres impliziert $J_\pm(x)$ abgeschl. für alle x, letzteres zus. mit der Kausalitätsbedingung impliziert die Injektivität und Stetigkeit von $I_\pm$.

20. (28.6) Zulässiges Maß, Zeitfunktion, Konstruktion eines zulässigen Maßes auf jeder Raumzeit, die Abb. $t_\pm = \mp\mu(I_\pm(\cdot))$ sind Zeitfunktionen, sobald $I_\pm$ stetig und injektiv sind; die Existenz einer Zeitfunktion impliziert die starke Kausalitätsbedingung, Korollar: existiert eine Cauchy-Hyperfläche, so ist die Raumzeit globalhyperbolisch.

21. (30.6) Die Globalhyperbolizität impliziert die Existenz einer Cauchy-Hyperfläche (sogar durch jeden Punkt und akausal); der Zeitunterschied auf einer globalhyperbolischen Raumzeit ist endlich und stetig.

22. (5.7) Cauchy-Entwicklungen: Definition, Beispiele, das Innere der Cauchy-Entwicklung einer beliebigen achronalen Teilmenge ist (falls nichtleer) globalhyperbolisch, die Cauchy-Entwicklung einer beliebigen akausalen topologischen Hyperfläche ist offen und globalhyperbolisch.

23. (7.7) Cauchy-Horizonte: Definition, Beispiele, elementare Eigenschaften, Charakterisierung von akausalen Cauchy-Hyperflächen mittels Cauchy-Horizonte bzw. lichtartiger Geodätischen.

24. (12.7) Kap. 4 (Singularitätensätze), der Hawking'sche Singularitätensatz: Aussage, Vorbereitungen für den Beweis (Existenz einer Geodätischen der Länge $\tau(x, A)$ zwischen einem $x \in D_-(A)$ und einer abgeschlossenen achronalen raumartigen Hyperfläche A, zweite Variation des Längenfunktionals), Beweis.

25. (14.7) Der Penrose'sche Singularitätensatz 1/2: Vorbereitungen I, jede auf eine 2-kodimensionale raumartige Untermannigfaltigkeit senkrecht stehende lichtartige Geodätische muss eine Brennstelle haben, sobald gewisse Krümmungsbed. entlang c erfüllt sind.

26. (19.7) Der Penrose'sche Singularitätensatz 2/2: Vorbereitungen II, Satz, Beweis, Beispiel: die Schwarzschild-Raumzeit.

27. (21.7) Ausblick: aktuelle Forschungsbereiche und Verbindungen mit anderen Themen der Geometrie, Analysis oder Physik.

Kapitel 1

Beispiele

1.1 Die Minkowski-Raumzeit

Siehe z.B. [1, Abschn. 1.1], [12, Ch. 6] oder [3, Sec. 5.1].

1.1.1 Als semi-riemannsche Mannigfaltigkeit

1.1.2 Die drei kausalen Typen

1.1.3 Lorentz-Transformationen

1.2 Die de-Sitter-Raumzeit

Siehe z.B. [1, Abschn. 1.2], [12, Ch. 8] oder [3, Sec. 5.3].

1.2.1 Als semi-riemannsche Mannigfaltigkeit

1.2.2 Die Isometriegruppe der de-Sitter-Raumzeit

1.2.3 Die Geodätischen der de-Sitter-Raumzeit

1.3 Die Anti-de-Sitter-Raumzeit

Siehe z.B. [1, Abschn. 1.3], [12, Ch. 8] oder [3, Sec. 5.3].

1.3.1 Als semi-riemannsche Mannigfaltigkeit

1.3.2 Die Isometriegruppe der Anti-de-Sitter-Raumzeit

1.3.3 Die Geodätischen der Anti-de-Sitter-Raumzeit

1.4 Robertson-Walker-Raumzeiten

Siehe z.B. [1, Abschn. 1.4], [12, Ch. 12] oder [3, Sec. 5.4].

1.4.1 Als semi-riemannsche Mannigfaltigkeit

Folgende Formeln [12, Ch. 7] werden für die Berechnung der verschiedenen Krümmungsgrößen von Robertson-Walker-Raumzeiten und der Schwarzschild-Raumzeit benötigt. Unsere Konvention für einen Krümmungstensor R ist $R_{X,Y}Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z$.

Lemma 1.1 *Für semi-riemannsche Mannigfaltigkeiten* (P^p, g_P), (Q^q, g_Q) *und ein* $f \in \mathbb{C}^\infty(P, \mathbb{R}_+^\times)$ *betrachte man das* verzerrte Produkt

$$(M, g) := (P \times Q, g_P \oplus f^2 g_Q)$$

(kurz $P \times_f Q$*). Seien* $(p_0, q_0) \in P \times Q$, $X_P, Y_P, Z_P \in TP$ *und* $X_Q, Y_Q, Z_Q \in TQ$.

i) Die zweite Fundamentalform von $P \times \{q_0\}$ *bzw.* $\{p_0\} \times Q$ *in* (M, g) *ist gegeben durch*

$$II_{P\times\{q_0\}} = 0 \qquad \textit{bzw.} \qquad II_{\{p_0\}\times Q} = -g \otimes \frac{\operatorname{grad}(f)}{f},$$

wobei $\operatorname{grad}(f) := \operatorname{grad}_g(f) = \operatorname{grad}_{g_P}(f)$. *Insbesondere gilt* $II^*_{\{p_0\}\times Q}(X_Q, Y_P) = -\frac{Y_P(f)}{f} X_Q$ *und das mittlere Krümmungfeld von* $\{p_0\} \times Q$ *in* (M, g) *ist gegeben durch*

$$H_{\{p_0\}\times Q}\Big(:= \frac{1}{p-1}\operatorname{tr}_g(II_{\{p_0\}\times Q})\Big) = -\frac{\operatorname{grad}(f)}{f}.$$

ii) Der riemannsche Krümmungstensor R^M *von* (M, g) *ist gegeben durch:*

$$\begin{aligned}
R^M_{X_P,Y_P}Z_P &= R^P_{X_P,Y_P}Z_P \\
R^M_{X_P,Y_P}Z_Q &= 0 \\
R^M_{X_Q,Y_Q}Z_P &= 0 \\
R^M_{X_P,Y_Q}Z_P &= \frac{\operatorname{Hess}(f)(X_P,Z_P)}{f}Y_Q \\
R^M_{X_Q,Y_P}Z_Q &= \frac{g(X_Q,Z_Q)}{f}\nabla^M_{Y_P}\operatorname{grad}(f) \\
R^M_{X_Q,Y_Q}Z_Q &= R^Q_{X_Q,Y_Q}Z_Q + \frac{g(\operatorname{grad}(f),\operatorname{grad}(f))}{f^2}\Big(g(X_Q,Z_Q)Y_Q - g(Y_Q,Z_Q)X_Q\Big),
\end{aligned}$$

wobei $\operatorname{Hess}(f)(X_P, Z_P) := g(\nabla^M_{X_P}\operatorname{grad}(f), Z_P) = g_P(\nabla^P_{X_P}\operatorname{grad}(f), Z_P)$.

iii) Der $(2,0)$*-Ricci-Tensor* ric^M *von* (M, g) *ist gegeben durch:*

$$\begin{aligned}
\operatorname{ric}^M(X_P,Y_P) &= \operatorname{ric}^P(X_P,Y_P) - \frac{q}{f}\operatorname{Hess}(f)(X_P,Y_P) \\
\operatorname{ric}^M(X_P,Y_Q) &= 0 \\
\operatorname{ric}^M(X_Q,Y_Q) &= \operatorname{ric}^Q(X_Q,Y_Q) + \frac{(f\Delta_P f - (q-1)g(\operatorname{grad}(f),\operatorname{grad}(f)))}{f^2}g(X_Q,Y_Q),
\end{aligned}$$

wobei $\Delta_P f := -\operatorname{tr}_{g_P}(\operatorname{Hess}(f))$.

Beweis: Seien X_P, Y_P glatte Vektorfelder in einer offenen Umgebung vom betrachteten Fußpunkt $\pi(X_P) \in P$. Man setze sie konstant in Q-Richtung fort. Sei Z_Q ein glattes Vektorfeld in einer Umgebung von q_0. Man setze analog Z_Q konstant in P-Richtung fort. Bemerke, dass dies bereits $[X_P, Z_Q] = [Y_P, Z_Q] = 0$ impliziert (zerlege die Vektorfelder X_P, Y_P, Z_Q in einer Basis von Koordinatenvektorfeldern und benutze $[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}] = 0$). Nach der Koszul-Formel gilt

$$\begin{aligned} g(\nabla^M_{X_P} Y_P, Z_Q) &= \frac{1}{2}\Big(X_P(g(Y_P, Z_Q)) + Y_P(g(X_P, Z_Q)) - Z_Q(g(X_P, Y_P)) \\ &\quad + g([X_P, Y_P], Z_Q) - g([X_P, Z_Q], Y_P) - g([Y_P, Z_Q], X_P)\Big). \end{aligned}$$

Da $[X_P, Y_P]$ tangential an P ist und $g(X_P, Y_P)$ nur von p abhängt, verschwinden alle Summanden auf der rechten Seite der letzten Identität. Daraus folgt $\nabla^M_{X_P} Y_P = \nabla^P_{X_P} Y_P$, d.h., $II_{P\times\{q_0\}} = 0$. Analog gilt

$$\begin{aligned} g(\nabla^M_{X_Q} Y_Q, Z_P) &= \frac{1}{2}\Big(X_Q(g(Y_Q, Z_P)) + Y_Q(g(X_Q, Z_P)) - Z_P(g(X_Q, Y_Q)) \\ &\quad + g([X_Q, Y_Q], Z_P) - g([X_Q, Z_P], Y_Q) - g([Y_Q, Z_P], X_Q)\Big) \\ &= -\frac{1}{2} Z_P(g(X_Q, Y_Q)) \\ &= -f Z_P(f) g_Q(X_Q, Y_Q) \\ &= -\frac{Z_P(f)}{f} g(X_Q, Y_Q), \end{aligned}$$

was $II_{\{p_0\}\times Q}(X_Q, Y_Q) = -g(X_Q, Y_Q)\frac{\mathrm{grad}(f)}{f}$ und $i)$ liefert.
Für die Berechnung des riemannschen Krümmungstensors verwenden wir die Gauß-Gleichungen [5, Thm. 1.72 p.38]: für alle X, Y, Z, T tangential an einer Untermannigfaltigkeit N und alle U, V senkrecht darauf gilt

$$\begin{aligned} g(R^M_{X,Y} Z, T) &= g(R^N_{X,Y} Z, T) + g(II(X, Z), II(Y, T)) - g(II(X, T), II(Y, Z)) \\ g(R^M_{X,Y} Z, U) &= g((\nabla_X II)(Y, Z) - (\nabla_Y II)(X, Z), U) \\ g(R^M_{X,Y} U, V) &= g(R^\perp_{X,Y} U, V) + g(B_X U, B_Y V) - g(B_X V, B_Y U), \end{aligned}$$

wobei $B_X U := -II^*(X, U)$ ist, $R^\perp$ den zur kovarianten Ableitung $\nabla^\perp_X U := (\nabla^M_X U)^\perp$ gehörigen Krümmungstensor auf $T^\perp N$ bezeichnet und $(\nabla_X II)(Y, Z) := \nabla^M_X(II(Y, Z)) - II(\nabla^N_X Y, Z) - II(Y, \nabla^N_X Z)$ ist. Wegen $II_{P\times\{q_0\}} = 0$ gilt einerseits $g(R^M_{X_P,Y_P} Z_P, T_P) = g(R^P_{X_P,Y_P} Z_P, T_P)$ und andererseits $g(R^M_{X_P,Y_P} Z_P, U_Q) = 0$, somit $R^M_{X_P,Y_P} Z_P = R^P_{X_P,Y_P} Z_P$. Außerdem gilt $g(R^M_{X_P,Y_P} U_Q, V_Q) = g(R^{\perp,P}_{X_P,Y_P} U_Q, V_Q)$.
Behauptung: *Für die Krümmungstensoren $R^{\perp,Q}$ bzw. $R^{\perp,P}$ von $\nabla^{\perp,Q}$ auf $T^\perp Q \to \{p_0\} \times Q$ bzw. $\nabla^{\perp,P}$ auf $T^\perp P \to P \times \{q_0\}$ gilt $R^{\perp,Q} = 0$ und $R^{\perp,P} = 0$.*
Beweis der Behauptung: Nach der Gauß-Weingarten-Gleichung gilt, auf einer beliebigen (semi-riemannschen) Untermannigfaltigkeit N,

$$\nabla^M_X U = \nabla^\perp_X U + B_X U, \tag{1.1}$$

wobei X tangential an N und $U \in \Gamma(T^\perp N)$ sind. Ist nun M das Produkt von Untermannigfaltigkeiten N_0 und N_1, so gilt für alle $i \in \mathbb{Z}_2$:

$$\begin{aligned} \nabla^{\perp_i}_{X_i} U_i &= (\nabla^M_{X_i} U_i)^{\perp_i} \\ &= (\nabla^M_{U_i} X_i)^{\perp_i} + ([X_i, U_i])^{\perp_i} \\ &= B^{i+1}_{U_i, X_i} + \partial_{X_i} U_i, \end{aligned}$$

wobei X_i und U_i konstant in N_{i+1}-Richtung fortgesetzt wurden und $\partial_{X_i} U_i := [X_i, U_i]$ (zu bemerken ist, dass dies $C^\infty(N_i)$-linear von X_i abhängt und $T^\perp N_i$-wertig ist). In unserem Fall liefert diese Identität

$$\nabla^{\perp,Q}_{X_Q} U_P = B^P_{U_P} X_Q + \partial_{X_Q} U_P = \partial_{X_Q} U_P \tag{1.2}$$

und

$$\nabla^{\perp,P}_{X_P} U_Q = B^Q_{U_Q} X_P + \partial_{X_P} U_Q = \frac{X_P(f)}{f} U_Q + \partial_{X_P} U_Q. \tag{1.3}$$

Da $(X_i, U_i) \mapsto \partial_{X_i} U_i$ eine flache kovariante Ableitung auf $T^\perp N_i \to N_i$ definiert, gilt $R^{\perp,Q} = 0$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
R^{\perp,P}_{X_P,Y_P} U_Q &= \nabla^{\perp,P}_{X_P} \nabla^{\perp,P}_{Y_P} U_Q - \nabla^{\perp,P}_{Y_P} \nabla^{\perp,P}_{X_P} U_Q - \nabla^{\perp,P}_{[X_P,Y_P]} U_Q \\
&= X_P\Big(\frac{Y_P(f)}{f}\Big) U_Q + \frac{Y_P(f)}{f} \nabla^{\perp,P}_{X_P} U_Q + \frac{X_P(f)}{f} \partial_{Y_P} U_Q + \partial_{X_P} \partial_{Y_P} U_Q \\
&\quad - Y_P\Big(\frac{X_P(f)}{f}\Big) U_Q - \frac{X_P(f)}{f} \nabla^{\perp,P}_{Y_P} U_Q - \frac{Y_P(f)}{f} \partial_{X_P} U_Q - \partial_{Y_P} \partial_{X_P} U_Q \\
&\quad - \frac{[X_P, Y_P](f)}{f} U_Q - \partial_{[X_P,Y_P]} U_Q \\
&= X_P\Big(\frac{Y_P(f)}{f}\Big) U_Q + \frac{Y_P(f)}{f} \Big(\frac{X_P(f)}{f} U_Q + \partial_{X_P} U_Q\Big) + \frac{X_P(f)}{f} \partial_{Y_P} U_Q \\
&\quad - Y_P\Big(\frac{X_P(f)}{f}\Big) U_Q - \frac{X_P(f)}{f} \Big(\frac{Y_P(f)}{f} U_Q + \partial_{Y_P} U_Q\Big) - \frac{Y_P(f)}{f} \partial_{X_P} U_Q \\
&\quad - \frac{[X_P, Y_P](f)}{f} U_Q \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $R^{\perp,P} = 0$. $\checkmark$

Wegen $g(R^M_{X_P,Y_P} Z_Q, Z_P) = -g(R^M_{X_P,Y_P} Z_P, Z_Q) = -g(R^P_{X_P,Y_P} Z_P, Z_Q) = 0$ und der Behauptung gilt $R^M_{X_P,Y_P} Z_Q = 0$. Dieselbe Behauptung liefert

$$\begin{aligned}
g(R^M_{X_Q,Y_Q} Z_P, T_P) &= g(B^Q_{X_Q} Z_P, B^Q_{Y_Q} T_P) - g(B^Q_{X_Q} T_P, B^Q_{Y_Q} Z_P) \\
&\overset{i)}{=} g\Big(\frac{Z_P(f)}{f} X_Q, \frac{T_P(f)}{f} Y_Q\Big) - g\Big(\frac{T_P(f)}{f} X_Q, \frac{Z_P(f)}{f} Y_Q\Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Desweiteren gilt, mit der Abkürzung $II_Q = II_{\{p_0\}\times Q}$:

$$\begin{aligned}
(\nabla_{X_Q} II_Q)(Y_Q, Z_Q) &= \nabla^M_{X_Q}(II_Q(Y_Q, Z_Q)) - II_Q(\nabla^Q_{X_Q} Y_Q, Z_Q) - II_Q(Y_Q, \nabla^Q_{X_Q} Z_Q) \\
&\overset{i)}{=} \nabla^M_{X_Q}\Big(- g(Y_Q, Z_Q) \frac{\mathrm{grad}(f)}{f}\Big) \\
&\quad + g(\nabla^Q_{X_Q} Y_Q, Z_Q) \frac{\mathrm{grad}(f)}{f} + g(Y_Q, \nabla^Q_{X_Q} Z_Q) \frac{\mathrm{grad}(f)}{f} \\
&= -g(Y_Q, Z_Q) \nabla^M_{X_Q} (\frac{\mathrm{grad}(f)}{f}) \\
&= -\frac{g(Y_Q, Z_Q)}{f^2} \Big(f \nabla^M_{X_Q} \mathrm{grad}(f) - \underbrace{X_Q(f)}_{0} \mathrm{grad}(f)\Big) \\
&= -\frac{g(Y_Q, Z_Q)}{f} \nabla^M_{X_Q} \mathrm{grad}(f),
\end{aligned}$$

woraus mit der zweiten Gauß-Gleichung folgt

$$\begin{aligned} g(R^M_{X_Q,Y_Q}Z_Q,U_P) &= g((\nabla_{X_Q}II_Q)(Y_Q,Z_Q)-(\nabla_{Y_Q}II_Q)(X_Q,Z_Q),U_P) \\ &= \frac{1}{f}\Big(g(X_Q,Z_Q)\mathrm{Hess}(f)(Y_Q,U_P)-g(Y_Q,Z_Q)\mathrm{Hess}(f)(X_Q,U_P)\Big), \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}(f)(X_Q,U_P) &= g(\nabla^M_{U_P}\mathrm{grad}(f),X_Q) \\ &= U_P(\underbrace{X_Q(f)}_{0})-(\nabla^M_{U_P}X_Q)(f) \\ &= -(\nabla^{\perp,P}_{U_P}X_Q)(f)-(\underbrace{B^P_{U_P}X_Q}_{0})(f) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

da $\nabla^{\perp,P}_{U_P}X_Q$ tangential an Q ist. Es folgt $g(R^M_{X_Q,Y_Q}Z_Q,U_P)=0$. Einerseits folgt $R^M_{X_Q,Y_Q}Z_P=0$, andererseits gilt nach der ersten Gauß-Gleichung

$$\begin{aligned} g(R^M_{X_Q,Y_Q}Z_Q,T_Q) &= g(R^Q_{X_Q,Y_Q}Z_Q,T_Q) \\ &\quad +g(II_Q(X_Q,Z_Q),II_Q(Y_Q,T_Q))-g(II_Q(X_Q,T_Q),II_Q(Y_Q,Z_Q)) \\ &\overset{i)}{=} g(R^Q_{X_Q,Y_Q}Z_Q,T_Q) \\ &\quad +\frac{g(\mathrm{grad}(f),\mathrm{grad}(f))}{f^2}\Big(g(X_Q,Z_Q)g(Y_Q,T_Q)-g(X_Q,T_Q)g(Y_Q,Z_Q)\Big), \end{aligned}$$

somit folgt

$$R^M_{X_Q,Y_Q}Z_Q=R^Q_{X_Q,Y_Q}Z_Q+\frac{g(\mathrm{grad}(f),\mathrm{grad}(f))}{f^2}\Big(g(X_Q,Z_Q)Y_Q-g(Y_Q,Z_Q)X_Q\Big). \tag{1.5}$$

Wählt man nun X_P, Z_P bzw. Y_Q konstant in Q-Richtung bzw. P-Richtung, so gilt

$$\begin{aligned} R^M_{X_P,Y_Q}Z_P &= \nabla^M_{X_P}\nabla^M_{Y_Q}Z_P-\nabla^M_{Y_Q}\nabla^M_{X_P}Z_P-\nabla^M_{\underbrace{[X_P,Y_Q]}_{0}}Z_P \\ &\overset{i)}{=} \nabla^M_{X_P}\nabla^M_{Y_Q}Z_P-\nabla^M_{Y_Q}\nabla^P_{X_P}Z_P \\ &\overset{(1.1)}{=} \nabla^M_{X_P}(\nabla^{\perp,Q}_{Y_Q}Z_P+B^P_{Y_Q}Z_P)-\nabla^{\perp,Q}_{Y_Q}\nabla^P_{X_P}Z_P-B^Q_{Y_Q}\nabla^P_{X_P}Z_P \\ &\overset{(1.2)}{=} \nabla^M_{X_P}(\underbrace{\partial_{Y_Q}Z_P}_{0}+\frac{Z_P(f)}{f}Y_Q)-\underbrace{\partial_{Y_Q}(\nabla^P_{X_P}Z_P)}_{0}-\frac{(\nabla^P_{X_P}Z_P)(f)}{f}Y_Q \\ &= X_P(\frac{Z_P(f)}{f})Y_Q+\frac{Z_P(f)}{f}\nabla^M_{X_P}Y_Q-\frac{(\nabla^P_{X_P}Z_P)(f)}{f}Y_Q \\ &\overset{(1.3)}{=} \frac{X_P(Z_P(f))}{f}Y_Q-\frac{X_P(f)Z_P(f)}{f^2}Y_Q \\ &\quad +\frac{Z_P(f)}{f}\Big(\frac{X_P(f)}{f}Y_Q+\underbrace{\partial_{X_P}Y_Q}_{0}\Big)-\frac{(\nabla^P_{X_P}Z_P)(f)}{f}Y_Q \\ &= \frac{\mathrm{Hess}(f)(X_P,Z_P)}{f}Y_Q. \end{aligned}$$

Wegen $g(R^M_{X_Q,Y_P}Z_Q, T_Q) = g(R^M_{Z_Q,T_Q}X_Q, Y_P) \overset{(1.5)}{=} 0$ und der letzten Identität gilt

$$\begin{aligned} g(R^M_{X_Q,Y_P}Z_Q, T_P) &= g(R^M_{Y_P,X_Q}T_P, Z_Q) \\ &= \frac{\mathrm{Hess}(f)(Y_P, T_P)}{f} g(X_Q, Z_Q) \\ &= \frac{g(X_Q, Z_Q)}{f} g(\nabla^M_{Y_P}\mathrm{grad}(f), T_P), \end{aligned}$$

woraus $R^M_{X_Q,Y_P}Z_Q = \frac{g(X_Q,Z_Q)}{f}\nabla^M_{Y_P}\mathrm{grad}(f)$ und *ii)* folgen.
Nun bilden wir die Spur der gewonnenen Identitäten. Sei $(e_i)_{1\le i\le p+q}$ eine verallgemeinerte Orthonormalbasis von $T_{p_0}P \oplus T_{q_0}Q$ so, dass $(e_i)_{1\le i\le p}$ eine verallgemeinerte Orthonormalbasis von $T_{p_0}P$ und $(e_i)_{p+1\le i\le p+q}$ eine verallgemeinerte Orthonormalbasis von $T_{q_0}Q$ (beide bezüglich g) sind. Wie üblich bezeichne $\varepsilon_i := g(e_i, e_i) \in \{\pm 1\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{ric}^M(X_P, Y_P) &= \sum_{i=1}^{p+q} \varepsilon_i g(R^M_{X_P,e_i}e_i, Y_P) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i g(R^M_{X_P,e_i}e_i, Y_P) + \sum_{i=p+1}^{p+q} \varepsilon_i g(R^M_{X_P,e_i}e_i, Y_P) \\ &\overset{ii)}{=} \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i g(R^P_{X_P,e_i}e_i, Y_P) - \sum_{i=p+1}^{p+q} \varepsilon_i g\Big(\frac{g(e_i, e_i)}{f}\nabla^M_{X_P}\mathrm{grad}(f), Y_P\Big) \\ &= \mathrm{ric}^P(X_P, Y_P) - \frac{q}{f}\mathrm{Hess}(f)(X_P, Y_P). \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{ric}^M(X_P, Y_Q) &= \sum_{i=1}^{p+q} \varepsilon_i g(R^M_{X_P,e_i}e_i, Y_Q) \\ &\overset{ii)}{=} \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i \underbrace{g(R^P_{X_P,e_i}e_i, Y_Q)}_{0} - \sum_{i=p+1}^{p+q} \varepsilon_i g\Big(\frac{g(e_i, e_i)}{f}\nabla^M_{X_P}\mathrm{grad}(f), Y_Q\Big) \\ &\overset{(1.4)}{=} 0. \end{aligned}$$

Schließlich folgt analog aus *ii)*

$$\begin{aligned} \mathrm{ric}^M(X_Q, Y_Q) &= \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i g(R^M_{X_Q,e_i}e_i, Y_Q) + \sum_{i=p+1}^{p+q} \varepsilon_i g(R^M_{X_Q,e_i}e_i, Y_Q) \\ &= -\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i \frac{\mathrm{Hess}(f)(e_i, e_i)}{f} g(X_Q, Y_Q) + \sum_{i=p+1}^{p+q} \varepsilon_i g(R^Q_{X_Q,e_i}e_i, Y_Q) \\ &\quad + \frac{g(\mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(f))}{f^2} \cdot \sum_{i=p+1}^{p+q} \varepsilon_i (g(X_Q, e_i)g(Y_Q, e_i) - g(e_i, e_i)g(X_Q, Y_Q)) \\ &= \frac{\Delta_P f}{f} g(X_Q, Y_Q) + \mathrm{ric}^Q(X_Q, Y_Q) \\ &\quad + (1-q)\frac{g(\mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(f))}{f^2} g(X_Q, Y_Q). \end{aligned}$$

Der Teil *iii*) und das Lemma sind damit bewiesen. □

1.4.2 Isometriegruppe und Geodätische von Robertson-Walker-Raumzeiten

1.5 Die Schwarzschild-Halbebene

Siehe z.B. [1, Abschn. 1.5], [12, Ch. 9 & 13] oder [3, Sec. 5.2].

1.5.1 Als semi-riemannsche Mannigfaltigkeit

Definition 1.2 *Die* Schwarzschild-Raumzeit *wird definiert durch* $(M^4, g) := P \times_r \mathbb{S}^2$, *wobei* $(P, g_P) := (\mathbb{R} \times (]0, 2m[\cup]2m, \infty[), -h(r)dt^2 + \frac{1}{h(r)}dr^2)$ *die Schwarzschild-Halbebene und* $(\mathbb{S}^2, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ *die* 2*-dimensionale Sphäre mit konstanter Schnittkrümmung* 1 *ist. Hierbei bezeichnen* m *eine positive Konstante und* $h(r) := 1 - \frac{2m}{r}$.

Man beachte, dass die Schwarzschild-Raumzeit (genau wie die Schwarzschild-Halbebene) aus zwei Zusammenhangskomponenten besteht.

Lemma 1.3 *Die Schwarzschild-Raumzeit ist Ricci-flach.*

Beweis: Wir haben schon die Schnittkrümmung der Schwarzschild-Halbebene ausgerechnet: es gilt $K_P(t, r) = \frac{2m}{r^3}$. Da P Dimension 2 hat, gilt $\mathrm{ric}^P = K_P g_P = \frac{2m}{r^3} g_P$. Außerdem gilt für $f(t, r) := r$ auf P:

$$\mathrm{grad}(f) = h(r)\frac{\partial}{\partial r} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Hess}(f) = \frac{h'}{2} g_P$$

(für die erste Identität verwende die Formel $\mathrm{grad}(f) = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}$, für die zweite $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22} = 0$ sowie $\Gamma^2_{11} = \frac{hh'}{2}$ und $\Gamma^1_{12} = -\Gamma^2_{22} = \frac{h'}{2h}$), insbesondere $\Delta_P f = -h'$ und somit

$$f\Delta_P f - g(\mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(f)) = -rh' - \frac{h^2}{h} = -1.$$

Zusammen mit $\mathrm{ric}^{\mathbb{S}^2} = \langle\cdot\,,\cdot\rangle$ ergibt sich nach Lemma 1.1

$$\begin{aligned} \mathrm{ric}^M(X_P, Y_P) &= \mathrm{ric}^P(X_P, Y_P) - \frac{q}{f}\mathrm{Hess}(f)(X_P, Y_P) \\ &= \frac{2m}{r^3} g(X_P, Y_P) - \frac{2}{r} \cdot \frac{h'(r)}{2} g_P(X_P, Y_P) \\ &= 0 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathrm{ric}^M(X_Q, Y_Q) &= \mathrm{ric}^Q(X_Q, Y_Q) + \frac{(f\Delta_P f - (q-1)g(\mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(f)))}{f^2} g(X_Q, Y_Q) \\ &= \langle X_Q, Y_Q\rangle - \frac{1}{r^2} g(X_Q, Y_Q) \\ &= 0, \end{aligned}$$

was mit $\mathrm{ric}^M(X_P, Y_Q) = 0$ zu beweisen war. □

1.5.2 Isometriegruppe und Geodätische der Schwarzschild-Halbebene

Kapitel 2

Kausalität in Raumzeiten

2.1 Grundbegriffe

Siehe z.B. [1, Abschn. 2.1], [12, Ch. 14] oder [3, Sec. 3.2].

2.1.1 Zeitorientierung

Siehe dazu [12, Ch. 7].

2.1.2 Die Relationen $\leq$, $<$ und $\ll$

2.1.3 Der Zeitunterschied

Wir erinnern hier an die erste und zweite Variationen des Längenfunktionals im Spezialfall einer zeitartigen Kurve in einer Lorentz-Mannigfaltigkeit. Eine gute Referenz für folgende Ergebnisse ist [12, Ch. 10]. Von hier aus bezeichnen $\delta(W)(t) := W(t^+) - W(t^-)$ für ein stückweise stetiges Vektorfeld W längs einer stückweise glatten (stetigen) Kurve c und $|\dot{c}| := |g(\dot{c},\dot{c})|^{\frac{1}{2}}$.

Proposition 2.1 *Sei (M^n, g) eine Lorentz-Mannigfaltigkeit und $c : [a,b] \to M^n$ eine glatte zeitartige Kurve in (M^n, g). Sei $(c_s)_{s\in]-\varepsilon,\varepsilon[}$ eine Variation von c durch zeitartige Kurven mit stückweise glattem Variationsfeld $V := \frac{\partial c_s}{\partial s}_{|s=0}$ und stückweise glattem Beschleunigungsfeld $A := (\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial c_s}{\partial s})_{|s=0}$. Betrachte das Längenfunktional $s \mapsto L[c_s] := \int_a^b |g(\dot{c}_s, \dot{c}_s)|^{\frac{1}{2}} dt$.*

i) Die erste Variation des Längenfunktionals ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}L[c_s]_{|s=0} &= \int_a^b \frac{1}{|\dot{c}|} g\Big(V, \frac{\nabla \dot{c}}{dt} + g(\frac{\nabla \dot{c}}{dt}, \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|})\frac{\dot{c}}{|\dot{c}|}\Big) dt \\ &\quad - g(V(b), \frac{\dot{c}(b)}{|\dot{c}(b)|}) + g(V(a), \frac{\dot{c}(a)}{|\dot{c}(a)|}) + \sum_{i=1}^k g(V(t_i), \delta(\frac{\dot{c}}{|\dot{c}|})(t_i)),\end{aligned}$$

wobei $t_1 < \ldots < t_k$ die unstetigen Stellen von $\dot{c}$ in $]a,b[$ sind.

ii) Ist c eine (glatte) Geodätische von (M^n, g), so ist die zweite Variation des Längenfunktionals gegeben durch

$$\frac{d^2}{ds^2}L[c_s]_{|s=0} = g(A(a), \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|}(a)) - g(A(b), \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|}(b))$$

$$- \int_a^b \frac{1}{|\dot c|}\Big(g(\frac{\nabla V}{dt}, \frac{\dot c}{|\dot c|})^2 + g(\frac{\nabla V}{dt}, \frac{\nabla V}{dt}) + g(R_{V,\dot c}V, \dot c)\Big) dt.$$

Beweis: Da $(s,t) \mapsto g(\dot c_s(t), \dot c_s(t))$ stückweise glatt ist, können $\frac{d}{ds}$ und $\int_a^b dt$ vertauscht werden, somit gilt für alle $s \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} L[c_s] &= \frac{d}{ds}\int_a^b |g(\dot c_s(t), \dot c_s(t))|^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\Big(|g(\dot c_s(t), \dot c_s(t))|^{\frac{1}{2}}\Big) dt \\
&= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\Big(- g(\dot c_s(t), \dot c_s(t))\Big)^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \int_a^b \frac{1}{2}\cdot \frac{-2g(\frac{\nabla \dot c_s}{\partial s}, \dot c_s)}{|g(\dot c_s(t), \dot c_s(t))|^{\frac{1}{2}}} dt \\
&= -\int_a^b \frac{g(\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial c}{\partial t}, \dot c_s)}{|g(\dot c_s(t), \dot c_s(t))|^{\frac{1}{2}}} dt \\
&\overset{([\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}]=0)}{=} -\int_a^b \frac{g(\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial s}, \dot c_s)}{|g(\dot c_s(t), \dot c_s(t))|^{\frac{1}{2}}} dt,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

insbesondere gilt für $s = 0$

$$\frac{d}{ds} L[c_s]_{|s=0} = -\int_a^b g(\frac{\nabla V}{dt}, \frac{\dot c}{|\dot c|}) dt.$$

Führe nun eine partielle Integration durch: setze $t_0 := a$ und $t_{k+1} := b$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} L[c_s]_{|s=0} &= -\sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(\frac{\nabla V}{dt}, \frac{\dot c}{|\dot c|}) dt \\
&= -\sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{dt} g(V, \frac{\dot c}{|\dot c|}) dt + \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(V, \frac{\nabla}{dt}(\frac{\dot c}{|\dot c|})) dt \\
&= -\sum_{i=0}^k g(V(t_{i+1}), \frac{\dot c}{|\dot c|}(t_{i+1}^-)) - g(V(t_i), \frac{\dot c}{|\dot c|}(t_i^+)) + \int_a^b g(V, \frac{\nabla}{dt}(\frac{\dot c}{|\dot c|})) dt \\
&= -g(V(b), \frac{\dot c(b)}{|\dot c(b)|}) + g(V(a), \frac{\dot c(a)}{|\dot c(a)|}) + \sum_{i=1}^k g(V(t_i), \delta(\frac{\dot c}{|\dot c|})(t_i)) \\
&\quad + \int_a^b g(V, \frac{\nabla}{dt}(\frac{\dot c}{|\dot c|})) dt,
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla}{dt}(\frac{\dot c}{|\dot c|}) &= -\frac{1}{2}|\dot c|^{-3}\cdot(-2g(\frac{\nabla \dot c}{dt}, \dot c)\dot c) + \frac{1}{|\dot c|}\frac{\nabla \dot c}{dt} \\
&= \frac{1}{|\dot c|}\cdot \Big(\frac{\nabla \dot c}{dt} + g(\frac{\nabla \dot c}{dt}, \frac{\dot c}{|\dot c|})\frac{\dot c}{|\dot c|}\Big).
\end{aligned}$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}L[c_s]_{|s=0} &= \int_a^b \frac{1}{|\dot c|} g\Big(V, \frac{\nabla \dot c}{dt} + g(\frac{\nabla \dot c}{dt}, \frac{\dot c}{|\dot c|})\frac{\dot c}{|\dot c|}\Big)dt \\
&\quad - g(V(b), \frac{\dot c(b)}{|\dot c(b)|}) + g(V(a), \frac{\dot c(a)}{|\dot c(a)|}) + \sum_{i=1}^k g(V(t_i), \delta(\frac{\dot c}{|\dot c|})(t_i)),
\end{aligned}
$$

was $i)$ beweist.
Sei nun c eine Geodätische (d.h., $\frac{\nabla \dot c}{dt} = 0$ auf $[a,b]$), insbesondere ist $g(\dot c, \dot c)$ konstant. Wird (2.1) noch einmal abgeleitet, so bekommen wir

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}L[c_s]_{|s=0} &= -\int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\Big\{ \frac{g(\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial s}, \dot c_s)}{|g(\dot c_s, \dot c_s)|^{\frac12}} \Big\}_{|s=0} dt \\
&= -\int_a^b \Big\{ -\frac{1}{2|g(\dot c_s, \dot c_s)|^{\frac32}} \cdot (-2g(\frac{\nabla}{\partial s}\dot c_s, \dot c_s)) \cdot g(\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial s}, \dot c_s) \Big\}_{|s=0} dt \\
&\quad - \int_a^b \frac{1}{|g(\dot c_s, \dot c_s)|^{\frac12}} \Big\{ g(\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial s}, \dot c_s) + g(\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\nabla}{\partial s}\dot c_s) \Big\}_{|s=0} dt \\
&\overset{([\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}]=0)}{=} -\int_a^b \Big\{ \frac{g(\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial s}, \dot c_s)^2}{|g(\dot c_s, \dot c_s)|^{\frac32}} + \frac{g(\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial s})}{|g(\dot c_s, \dot c_s)|^{\frac12}} \Big\}_{|s=0} dt \\
&\quad - \int_a^b \frac{1}{|g(\dot c_s, \dot c_s)|^{\frac12}} \Big\{ g(\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial c}{\partial s}, \dot c_s) + g(R_{\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}}\frac{\partial c}{\partial s}, \dot c_s) \Big\}_{|s=0} dt \\
&= -\int_a^b \frac{1}{|\dot c|}\Big(g(\frac{\nabla V}{dt}, \frac{\dot c}{|\dot c|})^2 + g(\frac{\nabla V}{dt}, \frac{\nabla V}{dt}) \Big) dt \\
&\quad - \int_a^b \frac{1}{|\dot c|}\Big(g(\frac{\nabla A}{dt}, \dot c) + g(R_{V,\dot c}V, \dot c) \Big) dt.
\end{aligned}
$$

Analog kann eine partielle Integration durchgeführt werden und wegen $\frac{\nabla \dot c}{dt} = 0$ gilt $\int_a^b g(\frac{\nabla A}{dt}, \frac{\dot c}{|\dot c|})dt = [g(A, \frac{\dot c}{|\dot c|})]_a^b$, was $ii)$ liefert. □

Von hier aus bezeichne $\Omega_{p,q}$ die Menge der stückweise glatten zeitartigen Kurven von einem Punkt p nach einem Punkt q in einer Lorentz-Mannigfaltigkeit (M^n, g).

Korollar 2.2 *Eine stückweise glatte zeitartige Kurve $c : [a,b] \to M^n$ in einer Lorentz-Mannigfaltigkeit (M^n, g) ist genau dann ein kritischer Punkt des Längenfunktionals auf $\Omega_{c(a),c(b)}$, wenn sie bis auf Umparametrisierung eine (glatte) Geodätische ist.*

Beweis: *[24. Aufgabe im 7. Übungsblatt]* Sei $(c_s)_{s\in]-\varepsilon,\varepsilon[}$ eine beliebige Variation von c in $\Omega_{c(a),c(b)}$, insbesondere $c_s(a) = c(a)$ und $c_s(b) = c(b)$ für alle s und somit $V(a) = 0$ sowie $V(b) = 0$ für das zugehörige Variationsfeld $V := \frac{\partial c_s}{\partial s}_{|s=0}$. Ist c eine glatte Geodätische von (M^n, g), so ist nach Proposition 2.1 die erste Variation $\frac{d}{ds}L[c_s]_{|s=0} = 0$ und somit ist c ein kritischer Punkt des Längenfunktionals auf $\Omega_{c(a),c(b)}$. Da das Längenfunktional invariant unter Umparametrisierungen der Kurve ist, gilt dieselbe Aussage für Umparametrisierungen von Geodätischen. Ist umgekehrt c ein kritischer Punkt des Längenfunktionals auf $\Omega_{c(a),c(b)}$, so betrachte erstens jedes glatte Segment von c und jede Variation davon, die die Endpunkte festlässt (sowie alle Punkte außerhalb des betrachteten Segments). Da das zugehörige Variationsfeld V beliebig gewählt werden kann auf dem entsprechenden offenen

Intervall (und an den Endstellen verschwindet) muss nach Proposition 2.1 das Vektorfeld $\frac{\nabla \dot{c}}{dt} + g(\frac{\nabla \dot{c}}{dt}, \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|})\frac{\dot{c}}{|\dot{c}|}$ in diesem Intervall identisch verschwinden. Dies bedeutet, dass c eine Prägeodätische auf diesem Segment, d.h., c besitzt eine Umparametrisierung, die eine Geodätische ist (gilt $\frac{\nabla \dot{c}}{dt} = f \cdot \dot{c}$, so ist $\tilde{c} := c \circ \varphi$ - mit $\varphi^{-1}(t) := \int_{t_0}^{t} \exp(\int_{t_0}^{s} f(x)dx)ds$ und t_0 beliebig im Intervall - eine Geodätische, siehe 11. Aufgabe im 4. Übungsblatt). Somit ist bis auf Umpamaterisierung jedes glatte Segment von c eine Geodätische. Zweitens können keine Knicke auftreten, d.h., c muss tatsächlich glatt sein, denn: hätte $\dot{c}$ eine unstetige Stelle $t_1 \in]a, b[$, d.h., $\delta(\dot{c})(t_1) = \dot{c}(t_1^+) - \dot{c}(t_1^-) \neq 0$, so könnte ein Variationsfeld V längs c konstruiert werden, dessen Träger in einer kleinen Umgebung von t_1 enthalten ist und mit $g(V(t_1), \delta(\dot{c})(t_1)) \neq 0$; Proposition 2.1 würde dann $\frac{d}{ds}L[c_s]_{|s=0} \neq 0$ liefern, Widerspruch. Deswegen muss c eine glatte Geodätische sein. □

Proposition 2.3 *Sei (M^n, g) eine Lorentz-Mannigfaltigkeit und $c : [a, b] \to M^n$ eine zeitartige Geodätische von (M^n, g). Sei $(c_s)_{s \in]-\varepsilon,\varepsilon[}$ eine Variation von c durch zeitartige Kurven mit festen Endpunkten und mit stückweise glattem Variationsfeld $V := \frac{\partial c_s}{\partial s}_{|s=0}$. Man bezeichne mit $t_1 < \ldots < t_k$ die unstetigen Stellen von $\frac{\nabla V}{dt}$ in $]a, b[$. Dann ist die zweite Variation des Längenfunktionals $s \mapsto L[c_s] := \int_a^b |g(\dot{c}_s, \dot{c}_s)|^{\frac{1}{2}} dt$ gegeben durch*

$$\frac{d^2}{ds^2}L[c_s]_{|s=0} = \frac{1}{|\dot{c}|}\Big\{ \int_a^b g(\frac{\nabla^2 V^\perp}{dt^2} - R_{\dot{c},V^\perp}\dot{c}, V^\perp)dt + \sum_{i=1}^{k} g(\delta(\frac{\nabla V^\perp}{dt})(t_i), V^\perp(t_i)) \Big\},$$

wobei $V^\perp := V + g(V, \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|})\frac{\dot{c}}{|\dot{c}|}$.

Beweis: Wähle ein beliebiges (stückweise glattes) Beschleunigungsfeld A. Bemerke, dass nach Voraussetzung $V(a) = A(a) = 0$ und $V(b) = A(b) = 0$ gelten muss. Für jedes Vektorfeld W längs c zerlege $W = W^\perp + \lambda \dot{c}$, wobei $\lambda = \frac{1}{g(\dot{c},\dot{c})} g(W, \dot{c}) = -\frac{1}{|\dot{c}|^2} g(W, \dot{c})$. Dann gilt $g(W, W) = g(W^\perp, W^\perp) + \lambda^2 g(\dot{c}, \dot{c}) = g(W^\perp, W^\perp) - g(W, \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|})^2$. Diese Formel angewandt auf $W = \frac{\nabla V}{dt}$ liefert, mit der zweiten Identität von Proposition 2.1:

$$\frac{d^2}{ds^2}L[c_s]_{|s=0} = -\frac{1}{|\dot{c}|}\int_a^b g((\frac{\nabla V}{dt})^\perp, (\frac{\nabla V}{dt})^\perp) + g(R_{V,\dot{c}}V, \dot{c})dt.$$

Wegen der Schiefsymmetrie des riemannschen Krümmungstensors in den beiden ersten und beiden letzten Veränderlichen gilt $g(R_{V,\dot{c}}V, \dot{c}) = g(R_{V^\perp,\dot{c}}V^\perp, \dot{c})$. Da außerdem c eine Geodätische ist, gilt $(\frac{\nabla V}{dt})^\perp = \frac{\nabla V^\perp}{dt}$. Nun führen wir wiederum eine partielle Integration durch: setze $t_0 := a$ und $t_{k+1} := b$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}L[c_s]_{|s=0} &= -\frac{1}{|\dot{c}|}\int_a^b g(\frac{\nabla V^\perp}{dt}, \frac{\nabla V^\perp}{dt}) + g(R_{V^\perp,\dot{c}}V^\perp, \dot{c})dt \\
&= -\frac{1}{|\dot{c}|}\sum_{i=0}^{k}\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(\frac{\nabla V^\perp}{dt}, \frac{\nabla V^\perp}{dt}) + g(R_{V^\perp,\dot{c}}V^\perp, \dot{c})dt \\
&= \frac{1}{|\dot{c}|}\sum_{i=0}^{k}\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(\frac{\nabla^2 V^\perp}{dt^2}, V^\perp) - g(R_{V^\perp,\dot{c}}V^\perp, \dot{c})dt \\
&\quad -\frac{1}{|\dot{c}|}\sum_{i=0}^{k}[g(\frac{\nabla V^\perp}{dt}, V^\perp)]_{t_i}^{t_{i+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|\dot c|}\sum_{i=0}^{k}\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(\frac{\nabla^2 V^\perp}{dt^2} - R_{\dot c, V^\perp}\dot c, V^\perp)dt \\
&\quad -\frac{1}{|\dot c|}\sum_{i=0}^{k}\Big(g(\frac{\nabla V^\perp}{dt}(t_{i+1}^-), V^\perp(t_{i+1})) - g(\frac{\nabla V^\perp}{dt}(t_i^+), V^\perp(t_i))\Big) \\
&= \frac{1}{|\dot c|}\int_a^b g(\frac{\nabla^2 V^\perp}{dt^2} - R_{\dot c, V^\perp}\dot c, V^\perp)dt \\
&\quad +\frac{1}{|\dot c|}\sum_{i=1}^{k}\Big(g(\frac{\nabla V^\perp}{dt}(t_i^+) - \frac{\nabla V^\perp}{dt}(t_i^-), V^\perp(t_i))\Big),
\end{aligned}$$

wobei $V^\perp(a) = 0$ und $V^\perp(b) = 0$ benutzt wurden. $\square$

Bemerkung 2.4 Die zweite Variation des Längenfunktionals hängt quadratisch vom Variationsfeld V ab. In den Bezeichnungen von Proposition 2.1 lautet die dazu gehörige symmetrische Bilinearform

$$(V, W) \mapsto \int_a^b g(\frac{\nabla^2 V^\perp}{dt^2} - R_{\dot c, V^\perp}\dot c, W^\perp)dt + \sum_{i=1}^{k} g(\delta(\frac{\nabla V^\perp}{dt})(t_i), W^\perp(t_i)),$$

denn: integriere wieder partiell[1] und bekomme

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(\frac{\nabla^2 V^\perp}{dt^2}, W^\perp)dt &= \sum_{i=0}^{k+1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(\frac{\nabla^2 V^\perp}{dt^2}, W^\perp)dt \\
&= \sum_{i=0}^{k+1}[g(\frac{\nabla V^\perp}{dt}, W^\perp)]_{t_i}^{t_{i+1}} - \sum_{i=0}^{k+1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(\frac{\nabla V^\perp}{dt}, \frac{\nabla W^\perp}{dt})dt \\
&= -\sum_{i=1}^{k} g(\delta(\frac{\nabla V^\perp}{dt})(t_i), W^\perp(t_i)) \\
&\quad -\sum_{i=0}^{k+1}[g(V^\perp, \frac{\nabla W^\perp}{dt})]_{t_i}^{t_{i+1}} + \sum_{i=0}^{k+1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(V^\perp, \frac{\nabla^2 W^\perp}{dt^2})dt \\
&= -\sum_{i=1}^{k} g(\delta(\frac{\nabla V^\perp}{dt})(t_i), W^\perp(t_i)) + \sum_{i=1}^{k} g(V^\perp(t_i), \delta(\frac{\nabla W^\perp}{dt})(t_i)) \\
&\quad + \int_a^b g(V^\perp, \frac{\nabla^2 W^\perp}{dt^2})dt,
\end{aligned}$$

was mit $g(R_{\dot c, V^\perp}\dot c, W^\perp) = g(R_{\dot c, W^\perp}\dot c, V^\perp)$ die Symmetrie liefert.

Korollar 2.5 *Sei (M^n, g) eine Lorentz-Mannigfaltigkeit und $c : [a, b] \to M^n$ eine zeitartige Geodätische von (M^n, g).*

1. *Hat c keine konjugierten Punkte in $]a, b]$, so gilt $\frac{d^2}{ds^2}L[c_s]_{|s=0} < 0$ für jede nichttriviale Variation in $\Omega_{c(a),c(b)}$. Insbesondere wird ein lokales Maximum des Längenfunktionals auf $\Omega_{c(a),c(b)}$ an der Stelle c erreicht.*

[1] schlauer wäre: schreibe die symmetrische Bilinearform nach Proposition 2.1 hin und leite die letzte Formel für diese Bilinearform her.

2. *Hat c keine konjugierten Punkte in $]a, b[$, so gilt $\frac{d^2}{ds^2} L[c_s]_{|s=0} \leq 0$ für jede Variation in $\Omega_{c(a),c(b)}$.*

3. *Hat c einen konjugierten Punkt in $]a, b[$, so nimmt das Längenfunktional auf $\Omega_{c(a),c(b)}$ weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum an der Stelle c an.*

Beweis: Nach Korollar 2.2 wissen wir schon, dass c als zeitartige Geodätische ein kritischer Punkt des Längenfunktionals ist.
Ad 1.: Wähle Jacobi-Felder $J_1, \ldots, J_{n-1}$ längs c mit $J_i(a) = 0$ und so, dass die Vektoren $\frac{\nabla J_1}{dt}(a), \ldots, \frac{\nabla J_{n-1}}{dt}(a)$ eine Basis von $\dot{c}(a)^\perp$ bilden. Da die Abbildungen $[a, b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto g(\dot{c}(t), J_i(t))$ affin-linear sind mit $g(\dot{c}(a), J_i(a)) = g(\dot{c}(a), \frac{\nabla J_i}{dt}(a)) = 0$, müssen sie identisch verschwinden, d.h., $J_i(t) \in \dot{c}(t)^\perp$ für alle $t \in [a, b]$ und $1 \leq i \leq n-1$. Nach Voraussetzung darf kein Jacobi-Feld Nullstellen in a und $]a, b]$ besitzen. Daraus folgt, dass $\{J_1(t), \ldots, J_{n-1}(t)\}$ eine Basis von $\dot{c}(t)^\perp$ ist für alle $t \in]a, b]$. Ist nun V ein nicht identisch verschwindendes beliebiges Vektorfeld längs c mit $V(a) = 0$, $V(b) = 0$ und o.B.d.A. $V(t) \perp \dot{c}(t)$ für alle t, so lässt sich V in der Basis $\{J_1, \ldots, J_{n-1}\}$ punktweise zerlegen: es existieren stückweise glatte Funktionen $f_1, \ldots, f_{n-1}$ auf $]a, b]$ mit $V = \sum_{i=1}^{n-1} f_i J_i$. Beachte, dass die f_i's auch an der Stelle a auf glatte Weise definiert werden können, denn die J_i's verschwinden bis lediglich zur nullten Ordnung an der Stelle a und die Vektoren $\frac{\nabla J_1}{dt}(a), \ldots, \frac{\nabla J_{n-1}}{dt}(a)$ bilden eine Basis von $\dot{c}(a)^\perp$. Außerdem gilt wegen $V(b) = 0$ auch $f_i(b) = 0$ für alle $1 \leq i \leq n-1$. Wir berechnen das Skalarprodukt $g(\frac{\nabla^2 V}{dt^2} - R_{\dot{c},V}\dot{c}, V)$: wegen $\frac{\nabla^2 V}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n-1} f_i'' J_i + 2 f_i' \frac{\nabla J_i}{dt} + f_i \frac{\nabla^2 J_i}{dt^2}$ gilt

$$
\begin{aligned}
g(\frac{\nabla^2 V}{dt^2} - R_{\dot{c},V}\dot{c}, V) &= g\Big(\sum_{i=1}^{n-1} f_i'' J_i + 2 f_i' \frac{\nabla J_i}{dt}, \sum_{j=1}^{n} f_j J_j\Big) \\
&\quad + g(\sum_{i=1}^{n-1} f_i R_{\dot{c},J_i}\dot{c}, V) - g(R_{\dot{c},V}\dot{c}, V) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n-1} f_i'' f_j g(J_i, J_j) + 2 \sum_{i,j=1}^{n-1} f_i' f_j g(\frac{\nabla J_i}{dt}, J_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n-1} (f_i' f_j g(J_i, J_j))' - \sum_{i,j=1}^{n-1} f_i' f_j' g(J_i, J_j) \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{n-1} f_i' f_j \Big(g(\frac{\nabla J_i}{dt}, J_j) + g(J_i, \frac{\nabla J_j}{dt})\Big) + 2 \sum_{i,j=1}^{n-1} f_i' f_j g(\frac{\nabla J_i}{dt}, J_j).
\end{aligned}
$$

Da aber $g(\frac{\nabla J_i}{dt}, J_j) - g(J_i, \frac{\nabla J_j}{dt})$ konstant auf $[a, b]$ ist (leite diese Funktion nach t ab und benutze die Symmetrie des Krümmungstensors $g(R_{X,Y}Z, T) = g(R_{Z,T}X, Y)$) und an der Stelle a verschwindet, verschwindet sie identisch auf $[a, b]$, insbesondere gilt $g(\frac{\nabla J_i}{dt}, J_j) = g(J_i, \frac{\nabla J_j}{dt})$ auf $[a, b]$. Daraus folgt

$$
g(\frac{\nabla^2 V}{dt^2} - R_{\dot{c},V}\dot{c}, V) = g(V, W)' - g(W, W),
$$

wobei $W := \sum_{i=1}^{n-1} f_i' J_i$, insbesondere ist W raumartig längs c. Seien $t_1 < \ldots < t_k$ die unstetigen Stellen von $\frac{\nabla V}{dt}$, d.h., von den Funktionen f_i', und setze $t_0 := a$ bzw. $t_{k+1} := b$.

Nach Proposition 2.3, wegen $V(a) = 0$ sowie $V(b) = 0$ und $\delta(W) = \delta(\frac{\nabla V}{dt})$ gilt für die zweite Variation des Längenfunktionals

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}L[c_s]_{|s=0} &= \frac{1}{|\dot c|}\int_a^b \Big\{g(\frac{\nabla^2 V}{dt^2} - R_{\dot c,V}\dot c, V)dt + \sum_{j=1}^k g(\delta(\frac{\nabla V^\perp}{dt})(t_j), V^\perp(t_j))\Big\}\\
&= \frac{1}{|\dot c|}\Big\{\int_a^b g(V,W)' - g(W,W)dt + \sum_{j=1}^k g(\delta(\frac{\nabla V}{dt})(t_j), V(t_j))\Big\}\\
&= \frac{1}{|\dot c|}\sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(V,W)'dt - \frac{1}{|\dot c|}\int_a^b g(W,W)dt\\
&\quad + \sum_{j=1}^k g(\delta(\frac{\nabla V}{dt})(t_j), V(t_j))\\
&= \frac{1}{|\dot c|}\Big(\underbrace{[g(V,W)]_a^b}_{0} - \sum_{j=1}^k g(V(t_j), \delta(W)(t_j)) + \sum_{j=1}^k g(\delta(\frac{\nabla V}{dt})(t_j), V(t_j))\Big)\\
&\quad - \frac{1}{|\dot c|}\int_a^b g(W,W)dt\\
&= -\frac{1}{|\dot c|}\int_a^b g(W,W)dt\\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Die Gleichheit tritt genau dann auf, wenn $W = 0$ gilt, d.h., wenn $f_i' = 0$ für alle i gilt, was wegen $f_i(b) = 0$ zu $f_i = 0$ für alle i äquivalent ist, d.h., wenn $V = 0$ gilt, was nach Voraussetzung nicht erlaubt ist. Dies zeigt $\frac{d^2}{ds^2}L[c_s]_{|s=0} < 0$ und die Behauptung.

Ad 2.: Im allgemeineren Fall, wo c keine konjugierten Punkte in $]a, b[$ hat, lässt sich V in der Form $V(t) = (b-t)Z(t)$ für alle $t \in [a, b]$ schreiben mit einem stückweise glatten Vektorfeld Z längs c. Für $m \in \mathbb{N}$ hinreichend groß betrachte das stückweise glatte Vektorfeld V_m längs c mit $V_m(t) := (b_m - t)Z(t)$ für $a \leq t \leq b_m := b - \frac{1}{m}$ und $V_m(t) := 0$ für $b_m \leq t \leq b$. Da c keine konjugierten Punkte in $]a, b_m]$ hat und V_m auf $]a, b_m]$ wohl stückweise glatt ist und an den Endstellen verschwindet, kann der erste Fall auf $c_{|]a,b_m]}$ angewendet werden: ist $(c_s^{(m)})_s$ eine Variation von c zwischen $c(a)$ und $c(b_m)$ mit Variationsfeld $V_{m|]a,b_m]}$, so gilt nach Proposition 2.1

$$\begin{aligned}
0 &> \frac{d^2}{ds^2}L[c_s^{(m)}]_{|s=0}\\
&= -\frac{1}{|\dot c|}\int_a^{b_m} g(\frac{\nabla V_m}{dt}, \frac{\dot c}{|\dot c|})^2 + g(\frac{\nabla V_m}{dt}, \frac{\nabla V_m}{dt}) + g(R_{V_m,\dot c}V_m, \dot c)dt. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Wegen $\frac{\nabla V_m}{dt} = -Z + (b_m - t)\frac{\nabla Z}{dt}$ und $b_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} b$ konvergiert die rechte Seite von (2.2) gegen $-\frac{1}{|\dot c|}\int_a^b \Big(g(\frac{\nabla V}{dt}, \frac{\dot c}{|\dot c|})^2 + g(\frac{\nabla V}{dt}, \frac{\nabla V}{dt}) + g(R_{V,\dot c}V, \dot c)\Big)dt = \frac{d^2}{ds^2}L[c_s]_{|s=0}$, insbesondere ist $\frac{d^2}{ds^2}L[c_s]_{|s=0} \leq 0$, was zu beweisen war.

Ad 3.: Sei $r \in]a, b[$ eine konjugierte Stelle längs c. In der Vorlesung wurde bereits bewiesen, dass dann eine kleinste konjugierte Stelle in $]a, b[$ existiert. O.B.d.A. sei r diese kleinste konjugierte Stelle. Für ein $r' \in]a, b[$ hat dann $c_{|]a,r']}$ keine konjugierten Punkte. Ist V ein beliebiges nichttriviales Vektorfeld längs $c_{|]a,r']}$ mit $V(a) = 0$ und $V(r') = 0$, so zeigt der

Beweis des ersten Teils, dass für die entsprechende Variation gilt $\frac{d^2}{ds^2}L[c_s]_{|s=0} < 0$ (hierbei wird V durch 0 auf $[a,b]$ fortgesetzt). Nun zeigen wir die Existenz eines Vektorfelds längs c so, dass die entsprechende zweite Variation des Längenfunktionals positiv ist. Nach Voraussetzung existiert ein nichttriviales Jacobi-Feld J längs c mit $J(a) = 0$ und $J(r) = 0$. Bemerke, dass insbesondere $g(J, \dot{c}) = g(\frac{\nabla J}{dt}, \dot{c}) = 0$ gilt. Setze $\tilde{J}_{|[a,r]} := J$ und $\tilde{J}_{|]r,b]} := 0$. Wegen $\frac{\nabla J}{dt}(r) \neq 0$ (sonst wäre $J = 0$, da J ein Jacobi-Feld ist) ist $\delta(\frac{\nabla \tilde{J}}{dt})(r) = -\frac{\nabla J}{dt}(r) \neq 0$. Wähle ein glattes Vektorfeld W längs c mit $W(a) = 0$, $W(b) = 0$, $W \perp \dot{c}$ sowie $W(r) = \delta(\frac{\nabla \tilde{J}}{dt})(r)$. Für ein $\varepsilon > 0$ betrachte $V_\varepsilon := \tilde{J} + \varepsilon W$ und die entsprechende Variation $(c_s^{(\varepsilon)})_s$ von c. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}L[c_s^{(\varepsilon)}]_{|s=0} &= \frac{1}{|\dot{c}|}\Big\{\int_a^b g(\frac{\nabla^2 V_\varepsilon}{dt^2} - R_{\dot{c},V_\varepsilon}\dot{c}, V_\varepsilon)dt + g(\delta(\frac{\nabla V_\varepsilon}{dt})(r), V_\varepsilon(r))\Big\} \\
&= \frac{1}{|\dot{c}|}\Big\{\int_a^b g(\underbrace{\frac{\nabla^2 \tilde{J}}{dt^2} - R_{\dot{c},\tilde{J}}\dot{c}}_{0}, V_\varepsilon)dt + g(\underbrace{\tilde{J}(r)}_{0}, \delta(\frac{\nabla V_\varepsilon}{dt})(r))\Big\} \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{|\dot{c}|}\Big\{\int_a^b g(\frac{\nabla^2 W}{dt^2} - R_{\dot{c},W}\dot{c}, \tilde{J})dt + g(W(r), \delta(\frac{\nabla \tilde{J}}{dt})(r))\Big\} \\
&\quad + \frac{\varepsilon^2}{|\dot{c}|}\Big\{\int_a^b g(\frac{\nabla^2 W}{dt^2} - R_{\dot{c},W}\dot{c}, W)dt + g(W(r), \delta(\frac{\nabla W}{dt})(r))\Big\}.
\end{aligned}$$

Nach Bemerkung 2.4 vereinfacht sich der zweite Summand in $\frac{d^2}{ds^2}L[c_s^{(\varepsilon)}]_{|s=0}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}L[c_s^{(\varepsilon)}]_{|s=0} &= \frac{2\varepsilon}{|\dot{c}|}g(W(r), \delta(\frac{\nabla \tilde{J}}{dt})(r)) \\
&\quad + \frac{\varepsilon^2}{|\dot{c}|}\Big\{\int_a^b g(\frac{\nabla^2 W}{dt^2} - R_{\dot{c},W}\dot{c}, W)dt + g(W(r), \delta(\frac{\nabla W}{dt})(r))\Big\},
\end{aligned}$$

mit $g(W(r), \delta(\frac{\nabla \tilde{J}}{dt})(r)) = g(\delta(\frac{\nabla \tilde{J}}{dt})(r), \delta(\frac{\nabla \tilde{J}}{dt})(r)) > 0$ da $\frac{\nabla J}{dt}(r)$ raumartig ist und nicht verschwindet. Daraus folgt $\frac{d^2}{ds^2}L[c_s^{(\varepsilon)}]_{|s=0} > 0$ für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein. □

Nun betrachten wir Variationen von Kurven zwischen einer Untermannigfaltigkeit und einem Punkt. Für eine Lorentz-Mannigfaltigkeit (M^n, g), einen Punkt $y \in M^n$ und eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit N von (M^n, g) bezeichne $\Omega_{N,y}$ die Menge der stückweise glatten zeitartigen Kurven von N nach y.

Korollar 2.6 *Sei (M^n, g) eine Lorentz-Mannigfaltigkeit, N eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit von (M^n, g) und $c : [a,b] \to M^n$ eine stückweise glatte zeitartige Kurve in (M^n, g) mit $c(a) \in N$. Dann gilt: Die Kurve c ist genau dann ein kritischer Punkt des Längenfunktionals auf $\Omega_{N,c(b)}$, wenn c bis auf Umparametrisierung eine (glatte) Geodätische ist mit $\dot{c}(a) \in T^\perp_{c(a)}N$.*

Beweis: Nach Voraussetzung betrachten wir als Variationsfelder längs c

$$T_c\Omega_{N,c(b)} := \{V \text{ stückw. glattes Vektorfeld längs } c \text{ mit } V(a) \in T_{c(a)}N \text{ und } V(b) = 0\}.$$

Ist c eine glatte Geodätische mit $\dot{c}(a) \in T^\perp_{c(a)}N$, so gilt nach Proposition 2.1 für jedes $V \in T_c\Omega_{N,c(b)}$

$$\frac{d}{ds}L[c_s]_{|s=0} = 0,$$

somit ist c ein kritischer Punkt des Längenfunktionals auf $\Omega_{N,c(b)}$. Sei umgekehrt c ein kritischer Punkt des Längenfunktionals auf $\Omega_{N,c(b)}$. Da $T_c\Omega_{N,c(b)}$ alle Variationsfelder längs c enthält, die in a und b verschwinden, muss nach Korollar 2.2 die Kurve c (bis auf Umparametrisierung) eine glatte Geodätische sein. Nun gilt für ein beliebiges $V \in T_c\Omega_{N,c(b)}$

$$0 = \frac{d}{ds}L[c_s]_{|s=0} = g(V(a), \frac{\dot{c}(a)}{|\dot{c}(a)|}).$$

Da $V(a) \in T_{c(a)}N$ beliebig gewählt werden kann, muss $\dot{c}(a)$ senkrecht auf $T_{c(a)}N$ stehen. □

Proposition 2.7 *Sei (M^n, g) eine Lorentz-Mannigfaltigkeit, N eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit von (M^n, g) und $c : [a, b] \to M^n$ eine zeitartige Geodätische von (M^n, g) mit $c(a) \in N$ und $\dot{c}(a) \in T^{\perp}_{c(a)}N$. Sei $(c_s)_{s\in]-\varepsilon,\varepsilon[}$ eine Variation von c durch zeitartige Kurven mit $c_s(a) \in N$, $c_s(b) = c(b)$ und mit stückweise glattem Variationsfeld $V := \frac{\partial c_s}{\partial s}_{|s=0}$. Man bezeichne mit $t_1 < \ldots < t_k$ die unstetigen Stellen von $\frac{\nabla V}{dt}$ in $]a, b[$. Dann ist die zweite Variation des Längenfunktionals gegeben durch*

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2}L[c_s]_{|s=0} \quad = \quad & \frac{1}{|\dot{c}|}\Big\{ \int_a^b g(\frac{\nabla^2 V^{\perp}}{dt^2} - R_{\dot{c},V^{\perp}}\dot{c}, V^{\perp})dt + \sum_{i=1}^{k} g(\delta(\frac{\nabla V^{\perp}}{dt})(t_i), V^{\perp}(t_i)) \\ & + g(\frac{\nabla^M V^{\perp}}{dt}(a) + II^*(V^{\perp}(a), \dot{c}(a)), V^{\perp}(a))\Big\}, \end{aligned}$$

wobei $V^{\perp} := V + g(V, \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|})\frac{\dot{c}}{|\dot{c}|}$ und $II^* \in \Gamma(T^*N \otimes T^{\perp *}N \otimes TN)$ definiert ist durch $g(II^*(X, \nu), Y) = g(II(X, Y), \nu)$ für alle $X, Y \in TN$ und $\nu \in T^{\perp}N$.

Beweis: Nach Proposition 2.1 gilt für die zweite Variation des Längenfunktionals:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2}L[c_s]_{|s=0} \quad = \quad & g(A(a), \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|}(a)) - g(A(b), \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|}(b)) \\ & - \int_a^b \frac{1}{|\dot{c}|}\Big(g(\frac{\nabla V}{dt}, \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|})^2 + g(\frac{\nabla V}{dt}, \frac{\nabla V}{dt}) + g(R_{V,\dot{c}}V, \dot{c})\Big)dt. \end{aligned}$$

Wegen $\frac{\partial c}{\partial s}(s, b) = 0$ für alle s gilt $V(b) = A(b) = 0$. Da außerdem c senkrecht auf N steht und $s \mapsto c(s, a)$ eine Kurve auf N ist, gilt nach der Gauß-Weingarten-Formel

$$\begin{aligned} g(A(a), \dot{c}(a)) \quad &= \quad g((\frac{\nabla^M}{\partial s}\frac{\partial c_s}{\partial s})(0, a), \dot{c}(a)) \\ &= \quad \underbrace{g((\frac{\nabla^N}{\partial s}\frac{\partial c_s}{\partial s})(0, a), \dot{c}(a))}_{0} + g(II(\frac{\partial c}{\partial s}(0, a), \frac{\partial c}{\partial s}(0, a)), \dot{c}(a)) \\ &= \quad g(II(V(a), V(a)), \dot{c}(a)) \\ &= \quad g(II^*(V(a), \dot{c}(a)), V(a)), \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2}L[c_s]_{|s=0} \quad = \quad & \frac{1}{|\dot{c}|}\Big\{g(II^*(V(a), \dot{c}(a)), V(a)) \\ & - \int_a^b g(\frac{\nabla V}{dt}, \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|})^2 + g(\frac{\nabla V}{dt}, \frac{\nabla V}{dt}) + g(R_{V,\dot{c}}V, \dot{c})dt\Big\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|\dot{c}|}\Big\{g(II^*(V(a),\dot{c}(a)),V(a)) - \int_a^b g(\frac{\nabla V^\perp}{dt},\frac{\nabla V^\perp}{dt}) + g(R_{V^\perp,\dot{c}}V^\perp,\dot{c})dt\Big\}.$$

Wie im Beweis von Proposition 2.3 integrieren wir partiell und beachten, das diesmal $V^\perp(a) = V(a)$ i.A. nicht verschwindet: setze $t_0 := a$ und $t_{k+1} := b$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(\frac{\nabla V^\perp}{dt},\frac{\nabla V^\perp}{dt})dt &= \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(\frac{\nabla V^\perp}{dt},\frac{\nabla V^\perp}{dt})dt \\
&= \sum_{i=0}^k [g(V^\perp,\frac{\nabla V^\perp}{dt})]_{t_i}^{t_{i+1}} - \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(V^\perp,\frac{\nabla^2 V^\perp}{dt^2})dt \\
&= -\sum_{i=1}^k g(V^\perp(t_i),\delta(\frac{\nabla V^\perp}{dt})(t_i)) - g(V^\perp(a),\frac{\nabla V^\perp}{dt}(a)) \\
&\quad - \int_a^b g(V^\perp,\frac{\nabla^2 V^\perp}{dt^2})dt,
\end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}L[c_s]_{|s=0} &= \frac{1}{|\dot{c}|}\Big\{g(II^*(V(a),\dot{c}(a)),V(a)) + g(V^\perp(a),\frac{\nabla V^\perp}{dt}(a)) \\
&\quad + \int_a^b g(\frac{\nabla^2 V^\perp}{dt^2} - R_{\dot{c},V^\perp}\dot{c},V^\perp)dt + \sum_{i=1}^k g(V^\perp(t_i),\delta(\frac{\nabla V^\perp}{dt})(t_i))\Big\},
\end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Definition 2.8 *Sei N eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit einer Lorentz-Mannigfaltigkeit (M^n,g) und $c:[a,b]\longrightarrow M^n$ eine zeitartige Geodätische mit $c(a)\in N$ und $\dot{c}(a)\in T^\perp_{c(a)}N$. Ein $r\in]a,b]$ heißt genau dann* Brennstelle *von N längs c, wenn ein nichttriviales Jacobi-Feld J längs c existiert mit $J(a)\in T_{c(a)}N$, $(\frac{\nabla^M J}{dt}(a))^T = -II^*(J(a),\dot{c}(a))$ und $J(r)=0$, wobei $(\frac{\nabla^M J}{dt}(a))^T$ das Bild von $\frac{\nabla^M J}{dt}(a)$ unter der Orthogonalprojektion $T_{c(a)}M\to T_{c(a)}N$ bezeichnet. Ggf. heißt $c(r)$* Brennpunkt *von N längs c.*

Genau wie bei Variationen mit festen Endpunkten leiten wir folgendes Korollar her:

Korollar 2.9 *Sei N eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit einer Lorentz-Mannigfaltigkeit (M^n,g) und $c:[a,b]\longrightarrow M^n$ eine zeitartige Geodätische mit $c(a)\in N$ und $\dot{c}(a)\in T^\perp_{c(a)}N$.*

1. *Hat N keine Brennpunkte längs c in $]a,b]$, so gilt $\frac{d^2}{ds^2}L[c_s]_{|s=0}<0$ für jede nichttriviale Variation in $\Omega_{N,c(b)}$. Insbesondere wird ein lokales Maximum des Längenfunktionals auf $\Omega_{N,c(b)}$ an der Stelle c erreicht.*

2. *Hat N keine Brennpunkte längs c in $]a,b[$, so gilt $\frac{d^2}{ds^2}L[c_s]_{|s=0}\le 0$ für jede Variation in $\Omega_{N,c(b)}$.*

3. *Hat N einen Brennpunkte längs c in $]a,b[$, so nimmt das Längenfunktional auf $\Omega_{N,c(b)}$ weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum an der Stelle c an.*

2.1.4 Kausalitätsbedingungen

Definition 2.10 *Eine Raumzeit (M^n, g) erfüllt genau dann die*

i) Kausalitätsbedingung, *wenn es keine geschlossenen zukunftsgerichteten bzw. vergangenheitsgerichteten kausalen Kurven in (M^n, g) gibt.*

ii) starke Kausalitätsbedingung, *wenn es keine "fast geschlossenen" zukunftsgerichteten bzw. vergangenheitsgerichteten kausalen Kurven in (M^n, g) gibt: für jedes $x \in M^n$ und jede offene Umgebung V von x in M^n existiert eine offene Umgebung U von x in M^n so, dass alle zukunftsgerichteten bzw. vergangenheitsgerichteten kausalen Kurven in M^n mit Endpunkten in U ganz in V verlaufen.*

Jede Raumzeit, die die starke Kausalitätsbedingung erfüllt, erfüllt die Kausalitätsbedingung, die andere Richtung ist aber falsch.

Definition 2.11 *Eine Raumzeit (M^n, g) heißt genau dann* globalhyperbolisch, *wenn sie die starke Kausalitätsbedingung erfüllt und alle Teilmengen der Form $J_+(x) \cap J_-(y)$ (mit $x, y \in M^n$) kompakt sind.*

2.2 Kurvendeformationen

Siehe z.B. [1, Abschn. 2.2] oder [13].

Proposition 2.12 *Sei (M^n, g) eine Raumzeit und $N \subset M^n$ eine raumartige Untermannigfaltigkeit (d.h., $g_{|N}$ ist riemannsch) von (M^n, g). Sei $c : [0, b] \longrightarrow M^n$ eine zukunftsgerichtete bzw. vergangenheitsgerichtete lichtartige Geodätische mit $c(0) = x \in N$ und $\dot{c}(0) \in T_x^\perp N$. Setze $y := c(b)$. Hat N eine Brennstelle in $]0, b[$ längs c, so gibt es beliebig nahe[2] an c eine zeitartige Kurve von N nach y.*

Beweis: Wir beweisen nur den Fall $J(0) = 0$[3], der andere Fall wurde in der Vorlesung erklärt, siehe z.B. [1, Prop. 2.2.8]. O.B.d.A. sei c zukunftsgerichtet. Sei $t_0 \in]0, b[$ die erste positive Brennstelle von N längs c (sie existiert, siehe z.B. [1, Lemma 2.2.9]). Nach Definition einer Brennstelle existiert dann ein nichttriviales Jacobi-Feld J längs c mit $J(0) \in T_x N$, $(\frac{\nabla^M J}{dt}(0))^T = -II^*(J(0), \dot{c}(0))$ und $J(t_0) = 0$. Wie im Beweis des Falles $J(0) \neq 0$ (siehe [1, Prop. 2.2.8]) konstruiere man, für ein $\delta > 0$ hinreichend klein, ein raumartiges Einheitsnormalenfeld U längs c und eine Funktion f s.d. $J = fU$ auf $[0, t_0 + \delta]$ mit $f_{|]0,t_0[} > 0$ und $f_{|]t_0,t_0+\delta[} < 0$. Insbesondere muss $f(0) = 0$ gelten. Der nächste Schritt besteht darin, Vektorfelder V und A längs c zu finden so, dass der Ausdruck

$$\frac{d}{dt}\Big(g(A, \dot{c}) + g(V, \frac{\nabla^M V}{dt})\Big) - g(\frac{(\nabla^M)^2 V}{dt^2} + R_{V,\dot{c}}\dot{c}, V)$$

negativ auf $[0, t_0 + \delta[$ ist. Tatsächlich ist dieser Ausdruck die zweite Ableitung $\frac{d^2}{ds^2} L[c_s]_{|s=0}$, wobei $(c_s)_s$ eine zum Geschwindigkeitsvektorfeld V und zum Beschleunigungsfeld A gehörige Variation der Kurve c ist, mit den Bedingungen $V(t_0 + \delta) = 0 = A(t_0 + \delta)$ (der Endpunkt soll fest bleiben) und $V(0) = 0 = A(0)$ (es soll $V(0) = J(0)$ und $A(0) = II(J(0), J(0))$ gelten). Da bereits $\frac{d}{ds} L[c_s]_{|s=0} = 0$ gilt, muss die Ungleichung

[2] in der C^0-Topologie

[3] Der in der Vorlesung angegebene Beweis (in diesem Fall) war falsch.

$\frac{d^2}{ds^2}L[c_s]_{|s=0} < 0$ auf *ganz* $[0, t_0 + \delta]$ gelten, damit die Kurven $t \mapsto c_s(t)$ zeitartig auf $[0, t_0 + \delta]$ sind für zumindest kleine s.
Wie im Beweis des Falles $J(0) \neq 0$ suche man V in der Form $V = J + hU = (f+h)U$ für eine Funktion h. Das Beschleunigungsfeld A suche man in der Form $A = (g(V, \frac{\nabla^M V}{dt}) + u) \cdot L$, wobei u eine Funktion und L ein paralleles Vektorfeld längs $c_{|[0,t_0+\delta]}$ ist mit $g(\dot{c}(0), L(0)) = -1$. Die zu respektierenden "Randbedingungen" lauten dann $h(0) = 0$, $h(t_0 + \delta) = -f(t_0+\delta)$ und $u(0) = 0 = u(t_0+\delta)$. Eine kurze Rechnung ergibt $g(A, \dot{c}) + g(V, \frac{\nabla^M V}{dt}) = -u$ sowie $g(\frac{(\nabla^M)^2 V}{dt^2} + R_{V,\dot{c}}\dot{c}, V) = (f+h)(h'' + h \cdot l)$, wobei $l := g(\frac{(\nabla^M)^2 U}{dt^2} + R_{U,\dot{c}}\dot{c}, U)$. Die Funktionen h und u müssen somit die Differentialungleichung

$$(f + h)(h'' + h \cdot l) + u' > 0 \tag{2.3}$$

auf $[0, t_0 + \delta]$ erfüllen. Dabei ist zu beachten, dass $\delta > 0$ eventuell kleiner gemacht werden muss, damit $h(t_0 + \delta) = -f(t_0 + \delta)$ gilt. Wie im Beweis des Falles $J(0) \neq 0$ suche man h in der Form $h := b(e^{at} - 1)$ mit $a, b > 0$. Für a hinreichend groß ist $h'' + h \cdot l > 0$ auf $[0, t_0 + \delta]$. Der Parameter b kann dann so gewählt werden, dass $f + h$ eine erste Nullstelle in $]t_0, t_0 + \delta]$ hat, die dann das neue $t_0 + \delta$ wird. Schließlich kann u so gewählt werden, dass (2.3) erfüllt ist: u muss in der C^1-Norm klein sein mit $u(0) = 0 = u(t_0 + \delta)$ sowie $u'(0) > 0$ und $u'(t_0 + \delta) > 0$. □

Der Hauptsatz dieses Abschnitts ist der

Satz 2.13 *Sei (M^n, g) eine Raumzeit, $N \subset M^n$ eine raumartige Untermannigfaltigkeit oder $N = \varnothing$. Sei $c : [0, b] \longrightarrow M^n$ eine zukunftsgerichtete kausale Kurve mit $c(0) \in N$ (bzw. ohne weitere Bedingungen an c falls $N = \varnothing$). Dann gibt es beliebig nahe an c eine zukunftsgerichtete zeitartige Kurve von N nach $c(b)$ (bzw. nach $c(b)$), es sei denn c ist bis auf Umparametrisierung eine lichtartige Geodätische mit $\dot{c}(0) \in T^{\perp}_{c(0)}N$ so, dass N keine Brennpunkte längs c in $]0, b[$ hat.*

2.3 Konvexe Teilmengen

Siehe z.B. [1, Abschn. 2.3] oder [12, Ch. 5].

Lemma 2.14 *Sei U eine nichtleere konvexe (offene) Teilmenge einer Lorentz-Mannigfaltigkeit (M^n, g). Wähle eine Zeitorientierung auf U. Dann gilt für den Zeitunterschied τ_U von $(U, g_{|U})$ und alle $p, q \in U$ mit $p \leq q$:*

$$\tau_U(p, q) = |g_p(\Delta(p, q), \Delta(p, q))|^{\frac{1}{2}},$$

wobei $\Delta(p, q) := \exp_p^{-1}(q) \in T_pU$.

Beweis: Bemerke erstens: jede konvexe Teilmenge ist zusammenziehbar, insbesondere einfach zusammenhängend, insbesondere zeitorientierbar. Zwischen je zwei Punkten einer konvexen Teilmenge existiert eine eindeutige Geodätische, insbesondere besitzt die Geodätische c von p nach q keine konjugierten Punkte[4]. Ist $q \in J_+^U(p) \setminus I_+^U(p)$, so folgt bereits aus Satz 2.13, dass eine lichtartige Geodätische ohne konjugierte Punkte zwischen p und q existiert, die durch zeitartige Kurven mit den selben Endpunkten nicht

[4]inklusive Endpunkte

approximiert werden kann. In diesem Fall muss per Definition $\tau_U(p,q)$ verschwinden, und wegen U konvex ist $\Delta(p,q) \in C_+(0)$, insbesondere $g_p(\Delta(p,q),\Delta(p,q)) = 0$, was zu zeigen war. Sei nun $q \in I_+^U(p)$. Aus Korollar 2.5 folgt, dass die Länge von c ein lokales Maximum des Längenfunktionals auf der Menge $\Omega_{p,q}$ der zukunftsgerichteten kausalen Kurven von p nach q ist. Dieses lokale Maximum muss sogar ein globales Maximum sein, denn: ist γ ein weiterer kritischer Punkt des Längenfunktionals auf $\Omega_{p,q}$, so muss nach der ersten Variationsformel (Proposition 2.1) die Kurve γ eine glatte Geodätische sein. Wegen der Eindeutigkeit gilt $\gamma = c$. Es bleibt, zu bemerken, dass die Länge von c genau $|g_p(\Delta(p,q),\Delta(p,q))|^{\frac{1}{2}}$ ist. $\square$

Kapitel 3

Globalhyperbolische Raumzeiten

Dieses Kapitel basiert auf [1, Abschn. 2.5-2.7], [12, Ch. 14] und [3, Ch. 4], unterscheidet sich aber darin, dass sogenannte Quasilimiten (die sich auf einen gewissen Konvergenzbegriff für Kurven beziehen, siehe z.B. [1, Abschn. 2.4] oder [12, Ch. 14]) weggelassen werden[1].

In den nächsten Abschnitten wird immer wieder auf vollständige riemannsche Metriken zurückgegriffen. Dabei sei daran erinnert, dass jede n-dimensionale Mannigfaltigkeit eine vollständige riemannsche Metrik besitzt. Dies kann z.B. aus folgendem Whitney'schem Einbettungssatz gefolgert werden: jede n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit lässt sich als *abgeschlossene* Untermannigfaltigkeit in den $\mathbb{R}^{2n+1}$ einbetten, siehe z.B. [6]; die vom $\mathbb{R}^{2n+1}$ induzierte riemannsche Metrik auf M^n ist dann notwendigerweise vollständig (*Übungsaufgabe*).

3.1 Cauchy-Hyperflächen

3.1.1 Achronale Teilmengen

Beispiel 3.1 Jede achronale raumartige glatte Hyperfläche A in einer Raumzeit (M^n, g) ist akausal. Denn: sei $c :]a, b[\to M^n$ zukunftsgerichtete kausale Kurve mit $c(t_0), c(t_1) \in A$ für $a < t_0 < t_1 < b$. Wegen A achronal gilt $p \not\ll c(t_1)$ für alle $p \in A$, d.h., $c(t_1) \in J_+(p) \setminus I_+(p)$ für alle $p \in A$. Da A raumartige Untermannigfaltigkeit von (M^n, g) ist, folgt aus Satz 2.13, dass $c_{|_{[t_0,t_1]}}$ eine auf A senkrecht stehende lichartige Geodätische ohne Brennstellen ist. Da aber A eine Hyperfläche ist, ist deren Normalenbündel $T^\perp A \to A$ zeitartig, Widerspruch.

Folgendes Lemma [12, Lemma 14.30] brauchen wir immer wieder:

Lemma 3.2 *Sei (M^n, g) eine zusammenhängende Raumzeit und $A \subset M^n$ eine abgeschlossene Teilmenge. Sei $c : [0, b[\longrightarrow M^n \setminus A$ eine bei b und in M^n nichterweiterbare zukunftsgerichtete kausale Kurve und $x := c(0) \in M^n \setminus A$. Dann gelten:*

i) Für alle $y \in I_-^{M\setminus A}(x)$ existiert eine bei b und in M^n nichterweiterbare zukunftsgerichtete zeitartige Kurve $\tilde{c} : [0, b[\to M^n \setminus A$ mit $\tilde{c}(0) = y$.

[1] Es gibt noch ein paar Lücken, u.a. im Abschnitt 3.3

ii) *Es gibt eine bei b und in M^n nichterweiterbare zukunftsgerichtete zeitartige Kurve $\tilde{c} : [0, b[\to M^n \setminus A$ mit $\tilde{c}(0) = x$, es sei denn c ist lichtartige Prägeodätische ohne konjugierte Punkte.*

Beweis: Fixiere einen Abstand d auf M^n, welcher die Topologie von M^n liefert (wähle z.B. den zu einer riemannschen Metrik gehörigen Abstand). Bis auf Umparametrisierung von c kann angenommen werden, dass $b = \infty$ gilt und dass die Folge $(c(m))_{m\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert. Sei $p_0 := y \in I_-^{M\setminus A}(x)$. Wegen $y \ll x \leq c(1)$ (in $M \setminus A$) gilt $y \ll c(1)$. Wähle einen Punkt p_1 auf einer zukunftsgerichteten zeitartigen Kurve von y nach $c(1)$ mit $0 < d(p_1, c(1)) < 1$. Konstruiere induktiv eine Folge $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $p_{m-1} \ll p_m \ll c(m)$ mit $0 < d(p_m, c(m)) < \frac{1}{m}$ (möglich wegen $p_{m-1} \ll c(m-1) \leq c(m)$), wobei $\ll$ wiederum in $M \setminus A$ zu verstehen ist. Verbinde sukzessiv p_m mit p_{m+1} durch eine zukunftsgerichtete zeitartige Kurve in $M\setminus A$ und erhalte eine zukunftsgerichtete zeitartige Kurve $\tilde{c}$ in $M\setminus A$, o.B.d.A. auf $[0, \infty[$ definiert, die von $p_0 = y$ startet, durch alle p_m's läuft und zukunftsnichterweiterbar ist, denn: würde $\lim\limits_{t\to\infty} \tilde{c}(t) = p_\infty \in M^n$ existieren, so würde insbesondere $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen p_∞ konvergieren, was wegen der Dreiecksungleichung

$$d(c(m), p_\infty) \leq d(c(m), p_m) + d(p_m, p_\infty) < \frac{1}{m} + d(p_m, p_\infty)$$

die Konvergenz von $(c(m))_{m\in\mathbb{N}}$ gegen p_∞ liefern würde, Widerspruch. Dies beweist *i*). Ist nun c keine lichtartige Prägeodätische ohne konjugierte Punkte, so gibt es ein $L \in]0, \infty[$ so, dass $c_{|_{[0,L[}}$ immer noch keine lichtartige Prägeodätische ohne konjugierte Punkte ist (denn: ist $c_{|_{[0,L[}}$ Prägeodätische ohne konjugierte Punkte für alle $T < \infty$, so ist c Prägeodätische ohne konjugierte Punkte). Nach Satz 2.13 existiert dann eine zukunftsgerichtete zeitartige Kurve $\hat{c} : [0, L] \to M \setminus A$ mit $\hat{c}(0) = c(0)$ und $\hat{c}(L) = c(L)$, insbesondere gilt $c(0) \in I_-^{M\setminus A}(c(L))$. Wendet man Teil *i*) auf $c_{|_{[L,\infty[}}$ mit $y := c(0)$ an, so bekommt man eine bei ∞ und in M^n nichterweiterbare zukunftsgerichtete zeitartige Kurve $\tilde{c} : [0, \infty[\to M \setminus A$ mit $\tilde{c}(0) = y$, was zu beweisen war. □

3.1.2 Cauchy-Hyperflächen

Definition 3.3 *Eine* Cauchy-Hyperfläche *in einer Raumzeit (M^n, g) ist eine Teilmenge Σ von M^n, die von jeder nichterweiterbaren zukunftsgerichteten zeitartigen Kurve in M^n genau einmal getroffen wird.*

Das Ziel dieses Abschnitts ist, möglichst schnell und schmerzfrei folgende Äquivalenz zu beweisen: eine Raumzeit (M^n, g) ist genau dann globalhyperbolisch, wenn sie eine Cauchy-Hyperfläche besitzt. Vorausgesetzt[2] werden folgende Ergebnisse: ist Σ eine Cauchy-Hyperfläche von (M^n, g), so gilt $M^n = I_+(\Sigma) \,\dot{\cup}\, \Sigma \,\dot{\cup}\, I_-(\Sigma)$, woraus folgt, dass $\Sigma = \partial I_+(\Sigma)$ als Rand einer Zukunftsmenge eine achronale abgeschlossene topologische Hyperfläche von M^n ist (dies braucht keine Quasilimiten und kann z.B. in [1, Abschn. 2.5] oder in [12, Ch. 14] gefunden werden). Der Beweis von Proposition 3.6 ist im Wesentlichen Olaf Müller, Miguel Sánchez und Stefan Suhr zu verdanken.

Als Erstes zeigen wir eine leicht geänderte Fassung von Lemma 3.2.

[2]und in der Vorlesung bewiesen

Lemma 3.4 *Sei (M^n, g) eine Raumzeit mit Cauchy-Hyperfläche Σ und c eine nichterweiterbare zukunftsgerichtete (bzw. vergangenheitsgerichtete) kausale Kurve in M^n. Dann ist $c^{-1}(\Sigma)$ ein nichtleeres kompaktes Intervall.*

Beweis: O.B.d.A. sei M^n zusammenhängend (ist Σ eine Cauchy-Hyperfläche von M^n, so ist $\Sigma \cap M_i^n$ eine Cauchy-Hyperfläche von M_i^n für jede Zusammenhangskomponente M_i^n von M^n). O.B.d.A. sei c zukunftsgerichtet und auf $\mathbb{R}$ definiert so, dass $(c(m))_{m\in\mathbb{Z}}$ nicht konvergiere. Setze $K := c^{-1}(\Sigma) \subset \mathbb{R}$. Dann ist K abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Außerdem ist K ein Intervall, denn: sind $t_1, t_2 \in K$ mit $t_1 < t_2$, so kann für jedes $s \in]t_1, t_2[$ der Punkt $c(s)$ weder in $I_+(\Sigma)$ (sonst wegen $c(t_2) \geq c(s)$ würde $c(t_2) \in I_+(\Sigma)$ gelten, Widerspruch) noch in $I_-(\Sigma)$ (sonst wegen $c(t_1) \leq c(s)$ würde $c(t_1) \in I_-(\Sigma)$ gelten, Widerspruch) liegen, somit muss $c(s) \in M \setminus (I_-(\Sigma) \cup I_+(\Sigma)) = \Sigma$ liegen, d.h., $s \in K$. Nun angenommen, K sei entweder leer oder nichtkompakt. O.B.d.A. (bis auf Umkehrung der Zeitorientierung und Umparametrisierung von c der Form $t \mapsto c(\pm t+k)$ mit $k \in \mathbb{Z}$) gelte entweder $c(\mathbb{R}) \subset I_-(\Sigma)$ oder $c^{-1}(\Sigma) = [a, \infty[$ für ein $a \in [0, \infty[$. Fixiere einen Abstand d auf M^n, der die Topologie von M^n induziert. Konstruiere eine Folge $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in M^n induktiv durch $p_0 \in I_-(c(0))$ und $p_{m+1} \in I_+(p_m) \cap I_-(c(m+1))$ mit $d(p_{m+1}, c(m+1)) < \frac{1}{m+1}$ (beachte, dass dies immer möglich ist wegen $p_m \ll c(m) \leq c(m+1)$). Konstruiere dann eine zukunftsgerichtete zeitartige Kurve $\gamma : [0, \infty[\longrightarrow M^n$ mit $\gamma(m) = p_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Beachte, dass notwendigerweise γ in $I_-(\Sigma)$ verläuft: würde $\gamma(t) \in J_+(\Sigma) = \Sigma \cup I_+(\Sigma)$ für ein $t \geq 0$ gelten, so würde $c(m) \in I_+(\Sigma)$ liegen für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m > t$, Widerspruch. Die Kurve γ ist auch zukunftsnichterweiterbar, sonst würde $\gamma(t)$ gegen einen Punkt $p \in M^n$ für $t \to \infty$ konvergieren, insbesondere würde $p_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} p$ gelten, was mit der Dreiecksungleichung

$$d(c(m), p) \leq d(c(m), p_m) + d(p_m, p) < \frac{1}{m} + d(p_m, p)$$

die Konvergenz $c(m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} p$ implizieren würde, Widerspruch. Erweitere γ zu einer nichterweiterbaren zukunftsgerichteten zeitartigen Kurve $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M^n$ (auch immer möglich). Wegen $\gamma(t) \ll \gamma(0) \in I_-(\Sigma)$ für alle $t < 0$ gilt dann $\gamma(\mathbb{R}) \subset I_-(\Sigma)$, insbesondere $\gamma(\mathbb{R}) \cap \Sigma = \varnothing$. Dies liefert den gewünschten Widerspruch und zeigt, dass K ein nichtleeres kompaktes Intervall ist. $\square$

Zum Beweis von Proposition 3.6 brauchen wir ein Konvergenzergebnis für kausale Kurven [3, Lemma 14.2]. Bemerke, dass auf einer vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit (M^n, h) stets gilt: eine nach h-Bogenlänge parametrisierte Kurve γ (d.h., $h(\dot\gamma, \dot\gamma) = 1$) ist genau dann nichterweiterbar, wenn ihr Definitionsbereich $\mathbb{R}$ ist (denn für den zu h gehörigen Abstand d_h gilt $d_h(\gamma(t), \gamma(s)) \leq |t - s|$ für alle t, s).

Lemma 3.5 (Grenzkurvenlemma) *Sei (M^n, g) eine Raumzeit, h eine vollständige riemannsche Metrik mit zugehöriger Abstandsfunktion d_h auf M^n und $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nach h-Bogenlänge parametrisierten (notw. nichterweiterbaren) zukunftsgerichteten kausalen Kurven $c_m : \mathbb{R} \longrightarrow M^n$. Angenommen, die Folge $(c_m(0))_{m\in\mathbb{N}}$ besitze einen Häufungspunkt $x \in M^n$.*
Dann existiert eine nichterweiterbare zukunftsgerichtete kausale Kurve $c : \mathbb{R} \longrightarrow M^n$ mit $c(0) = x$ und eine Teilfolge von $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$, die auf jedem Kompaktum von $\mathbb{R}$ gleichmäßig bezüglich d_h gegen c konvergiert.

Beweis: Die Existenz einer Teilfolge und einer stetigen Grenzkurve c, gegen die diese Teilfolge auf jedem Kompaktum gleichmäßig konvergiert, folgt unmittelbar aus dem Satz von

Arzelà-Ascoli (benutze lediglich die Parametrisierung nach h-Bogenlänge der c_m's und die d_h-Beschränktheit einer Teilfolge von $(c_m(0))_{m\in\mathbb{N}}$). Beachte, dass dann c bezüglich d_h 1-Lipschitz ist. Es bleibt, zu zeigen, dass c zukunftsgerichtet kausal und nichterweiterbar ist. Der Einfachheit halber bezeichnen wir die konvergente Teilfolge von $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ weiterhin mit $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Fixiere ein $t_0 \in \mathbb{R}$ und wähle eine konvexe offene Umgebung U von $c(t_0)$. Für $\eta > 0$ hinreichend klein bekomme $c_m([t_0, t_0+\eta]), c([t_0, t_0+\eta]) \subset U$[3] für alle $m \in \mathbb{N}$ hinreichend groß. Wegen U konvex existiert eine eindeutige kausale Geodätische γ_m zwischen $c_m(t_0)$ und $c_m(t_0+\eta)$. Die Folge $(\gamma_m)_{m\in\mathbb{N}}$ muss dann auch gleichmäßig konvergieren, und die Grenzkurve muss eine kausale Kurve sein[4]. Die Nichterweiterbarkeit wird in [3, p.75 ff] bewiesen[5]. □

Proposition 3.6 *Sei (M^n, g) eine Raumzeit. Angenommen, es existiere eine Cauchy-Hyperfläche $\Sigma \subset M$. Dann erfüllt (M^n, g) die Kausalitätsbedingung und $J_+(x) \cap J_-(y)$ ist kompakt für alle $x, y \in M^n$.*

Beweis: Nach Lemma 3.4 ist die Kausalitätsbedingung trivialerweise erfüllt.
Fixiere eine vollständige riemannsche Metrik h mit zugehöriger Abstandsfunktion d_h auf M^n. Seien $x, y \in M$ und $(p_m)_m$ eine beliebige Folge von $J_+(x) \cap J_-(y)$. Sei $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von zukunftsgerichteten (stetigen und stückweise glatten) kausalen Kurven von x nach y mit p_m auf c_m. O.B.d.A. sei c_m nach h-Bogenlänge parametrisiert und $c_m(0) = x$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ erweitere c_m zu einer nach h-Bogenlänge parametrisierten nichterweiterbaren zukunftsgerichteten kausalen Kurve in M (immer möglich). Diese Kurve bezeichnen wir weiterhin mit c_m. Wie oben bemerke man, dass c_m dann notwendigerweise auf $\mathbb{R}$ definiert ist. Definiere die reellen Folgen $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(\hat{t}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ durch $c_m(t_m) = p_m$ und $c_m(\hat{t}_m) = y$ für alle m. Diese Folgen sind wohldefiniert, weil (M^n, g) die Kausalitätsbedingung erfüllt. Per Definition der Folge $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gilt $0 \leq t_m \leq \hat{t}_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Nach dem Grenzkurvenlemma 3.5 existiert dann eine nichterweiterbare zukunftsgerichtete kausale Kurve $c : \mathbb{R} \longrightarrow M$ mit $c(0) = x$ und eine Teilfolge $(c_{\varphi(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ von $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ so, dass $(c_{\varphi(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ d_h-gleichmäßig gegen c auf jedem Kompaktum von $\mathbb{R}$ konvergiert. Der Einfachheit halber bezeichnen wir $(c_{\varphi(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ mit $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Sei $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ die durch $s_m := \max(c_m^{-1}(\Sigma))$ definierte reelle Folge.
Behauptung 1: *Die Folge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.*
Beweis der Behauptung 1: Angenommen, $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ wäre nicht beschränkt. Da entweder stets $s_m \geq 0$ (im Falle $x \in J_-(\Sigma)$) oder stets $s_m \leq 0$ (im Falle $x \in J_+(\Sigma)$) gilt, kann o.B.d.A. angenommen werden, dass $s_{\psi(m)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ gilt für eine Teilfolge $(s_{\psi(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ von $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Der Einfachheit halber bezeichnen wir $(s_{\psi(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ mit $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Wähle $t' \in]\max(c^{-1}(\Sigma)), \infty[$. Dann gilt $c(t') \in I_+(\Sigma)$ per Definition von t' und wegen der Achronalität von Σ. Da $I_+(\Sigma)$ offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(c(t')) \subset I_+(\Sigma)$, wobei $B_r(p)$ der offene Ball von Radius r um p bezüglich d_h bezeichnet. Nun wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $s_N \geq t'$ sowie $d_h(c_N(t'), c(t')) < \varepsilon$ gelten. Dann gilt $c_N(s_N) \geq c_N(t') \in B_\varepsilon(c(t')) \subset I_+(\Sigma)$, somit $c_N(s_N) \in I_+(\Sigma)$, Widerspruch zur Konstruktion von s_N. Daraus folgt, dass $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. ✓
Behauptung 2: *Die Folge $(\hat{t}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.*
Beweis der Behauptung 2: Wir betrachten drei Fälle (die wegen $M^n = I_+(\Sigma) \dot\cup \Sigma \dot\cup I_-(\Sigma)$

[3]begründe
[4]begründe
[5]schreibe ausführlich

und $J_\pm(\Sigma) = I_\pm(\Sigma) \cup \Sigma$ alle Möglichkeiten überdecken).
1. Fall: $y \in J_-(\Sigma)$. Dann ist wegen $0 \le \hat{t}_m \le s_m$ und der Behauptung 1 die Folge $(\hat{t}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ trivialerweise beschränkt.
2. Fall: $x \in J_+(\Sigma)$. Dieser Fall ist analog zum ersten Fall (kehre die Zeitorientierung um und vertausche x mit y).
3. Fall: $x \in J_-(\Sigma)$ und $y \in J_+(\Sigma)$: aus der Behauptung 1 folgt, dass sowohl $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ als $(\hat{t}_m - s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ beschränkt sind (für die zweite Folge soll die Zeitorientierung umgekehrt und y mit x vertauscht werden), somit ist $(\hat{t}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ beschränkt. $\surd$
Aus der Behauptung 2 folgt die Existenz einer Teilfolge $(\hat{t}_{\phi(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ der Folge $(\hat{t}_m)_{m\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $t' \in \mathbb{R}$ konvergiert. Da $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[0, t'+1]$ konvergiert, gilt $c(t') = \lim_{m\to\infty} c_{\phi(m)}(\hat{t}_{\phi(m)}) = y$. Außerdem ist $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ auch beschränkt, somit existiert eine Teilfolge von $(t_{\phi(m)})_{m\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $t \in [0, t']$ konvergiert. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen c auf $[0, t'+1]$ existiert also eine Teilfolge von $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $c(t) \in J_+(c(0)) \cap J_-(c(t')) = J_+(x) \cap J_-(y)$ konvergiert. Dies beweist die Kompaktheit von $J_+(x) \cap J_-(y)$. $\square$

Nun zeigen wir, dass (M^n, g) die starke Kausalitätsbedingung erfüllt, sobald (M^n, g) die Kausalitätsbedingung erfüllt und $J_+(x) \cap J_-(y)$ kompakt ist für alle $x, y \in M^n$. Eine gute Referenz für die nächsten Lemmata ist [9].

Lemma 3.7 *In einer Raumzeit (M^n, g) seien alle Teilmengen der Form $J_+(x) \cap J_-(y)$ kompakt. Dann sind alle Teilmengen der Form $J_\pm(x)$ abgeschlossen.*

Beweis: *[22. Aufgabe im 6. Übungsblatt]* Sei $x \in M^n$ und $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $J_+(x)$, die gegen ein $y \in M^n$ konvergiert. Für $z \in I_+(y)$ ist $y \in I_-(z)$, und wegen $I_-(z)$ offen existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $y_m \in I_-(z)$ für alle $m \ge N$, insbesondere $y_m \in J_+(x) \cap J_-(z)$. Aus der Kompaktheit von $J_+(x) \cap J_-(z)$ folgt die Existenz einer Teilfolge von $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $p \in J_+(x) \cap J_-(z)$ konvergiert. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwerts gilt dann $y \in J_+(x) \cap J_-(z)$, insbesondere $y \in J_+(x)$. $\square$

Lemma 3.8 *Sei (M^n, g) eine Raumzeit, welche die Kausalitätsbedingung erfüllt und in der alle $J_\pm(x)$ abgeschlossen sind. Dann sind die Abbildungen $I_+, I_- : M \longrightarrow \mathcal{P}(M)$ injektiv und "stetig" im folgenden Sinne:*

1. *Für jedes $x \in M^n$ und jedes Kompaktum $K \subset I_+(x)$ (bzw. $K \subset I_-(x)$) existiert eine offene Umgebung U von x so, dass $K \subset I_+(y)$ (bzw. $K \subset I_-(y)$) für alle $y \in U$ gilt.*

2. *Für jedes $x \in M^n$ und jedes Kompaktum $K \subset M \setminus \overline{I_+(x)}$ (bzw. $K \subset M \setminus \overline{I_-(x)}$) existiert eine offene Umgebung U' von x so, dass $K \subset M \setminus \overline{I_+(y)}$ (bzw. $K \subset M \setminus \overline{I_-(y)}$) für alle $y \in U'$ gilt.*

Beweis: Bemerke erstens, dass wegen $J_\pm(x)$ abgeschlossen $J_\pm(x) = \overline{I_\pm(x)}$ gilt für alle $x \in M^n$. Seien $x, y \in M^n$ mit $I_+(x) = I_+(y)$, dann ist wegen $x \in \overline{I_+(x)}$ der Punkt x in $\overline{I_+(y)} = J_+(y)$, und analog ist $y \in J_+(x)$. Insbesondere gilt $x \le y \le x$, was mit der Kausalitätsbedingung $x = y$ impliziert. Analog ist I_- injektiv.
Behauptung: *Die erste Stetigkeitsbedingung ist auf jeder Raumzeit erfüllt.*
Beweis der Behauptung: *[23. Aufgabe im 6. Übungsblatt]* Sei $x \in M^n$ und $K \subset M^n$ kompakt mit $K \subset I_+(x)$. Da insbesondere $K \subset \bigcup_{y \in I_+(x)} I_+(y)$ und $I_+(y)$ offen ist, existieren

$y_1, \ldots, y_k \in I_+(x)$ mit $K \subset \cup_{i=1}^k I_+(y_i)$. Setze $U := \cap_{i=1}^k I_-(y_i)$, dann ist U eine offene Umgebung von x und für alle $y \in U$ gilt $y_i \in I_+(y)$, insbesondere $I_+(y_i) \subset I_+(y)$, woraus $K \subset \cup_{i=1}^k I_+(y_i) \subset I_+(y)$ folgt. $\checkmark$

Sei nun $x \in M^n$ und betrachte ein Kompaktum $K \subset M \setminus \overline{I_+(x)} = M \setminus J_+(x)$. Dann gilt $x \notin J_-(K)$.

Behauptung: *Sind alle $J_\pm(x)$ abgeschlossen in M^n, so sind $J_\pm(K)$ auch abgeschlossen für alle Kompakta $K \subset M^n$.*

Beweis der Behauptung: *[19. Aufgabe im 5. Übungsblatt]* Man beweise zuerst die Identität $J_+(x) = \bigcap\limits_{y \ll x} J_+(y)$. Die Inklusion "$\subset$" ist trivial. Ist $z \in \bigcap\limits_{y \ll x} J_+(y)$, so ist $y \in J_-(z)$ für jedes $y \in I_-(x)$. Da $J_-(z)$ abgeschlossen ist, gilt dann $x \in J_-(z)$ (dafür wähle z.B. zukunftsgerichtete zeitartige Kurve von einem $y \in I_-(x)$ nach x), d.h., $z \in J_+(x)$. Dies zeigt die andere Inklusion. Ist jetzt $(q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $J_+(K)$, die gegen ein $q \in M^n$ konvergiert, so existiert eine Folge $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ aus K mit $p_m \leq q_m$ für alle m. Wegen K kompakt konvergiert eine Teilfolge $(p_{\varphi(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ von $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen ein $p \in K$. Für jedes $p' \ll p$ ist $I_+(p')$ eine offene Umgebung von p, somit existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $q_{\varphi(m)} \in I_+(p') \subset J_+(p')$ für alle $m \geq N$. Wegen $J_+(p')$ abgeschlossen gilt dann $q \in J_+(p')$. Insbesondere liegt $q \in \bigcap\limits_{p' \ll p} J_+(p') = J_+(p) \subset J_+(K)$. $\checkmark$

Sei U' eine offene Umgebung von x mit $U' \cap \underline{J_-(K)} = \emptyset$, dann ist für alle $y \in U'$ der Durchschnitt $J_+(y) \cap K$ leer, d.h., es gilt $K \subset M \setminus \overline{I_+(y)}$ für alle $y \in U'$. Analog geht es für I_-. $\square$

Für das weitere Verfahren brauchen wir die Begriffe von zulässigem Maß und von Zeitfunktion.

Definition 3.9 *Ein* zulässiges Maß *auf einer Raumzeit (M^n, g) ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf der Borel-σ-Algebra von M^n, welches erfüllt:*

- *$\mu(U) > 0$ für jede nichtleere offene Teilmenge U von M^n und*
- *$\mu(\partial I_\pm(x)) = 0$ für alle $x \in M^n$.*

Definition 3.10 *Eine* Zeitfunktion *auf einer Raumzeit (M^n, g) ist eine stetige Abbildung $t : M \longrightarrow \mathbb{R}$, die entlang jeder zukunftsgerichteten kausalen Kurve streng monoton wachsend ist, d.h., für jede zukunftsgerichtete kausale Kurve $c : \mathcal{I} \longrightarrow M^n$ und alle $s_1, s_2 \in \mathcal{I}$ mit $s_1 < s_2$ gilt $t(c(s_1)) < t(c(s_2))$.*

Lemma 3.11 *Jede Raumzeit (M^n, g) besitzt ein zulässiges Maß.*

Beweis: Betrachte die zur Lorentz-Metrik assoziierte Dichte $d\mu_g \in \Gamma(|\Lambda|^1 TM)$. Beachte, dass $\mathrm{Vol}_g(U) := \int_U d\mu_g > 0$ für jede nichtleere offene Teilmenge $U \subset M^n$. Wähle eine offene Überdeckung $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von M^n mit $\mathrm{Vol}_g(U_m) < 1$ für alle m. Sei $(\chi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ zugehörige Teilung der Eins. Für eine Borelmenge Ω von M^n setze man

$$\mu(\Omega) := \frac{1}{\mu_{\mathrm{tot}}} \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \int_\Omega \chi_m d\mu_g,$$

wobei $\mu_{\mathrm{tot}} := \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \int_M \chi_m d\mu_g$. Beachte, dass $\mu_{\mathrm{tot}} \in]0, \infty[$. Man überprüfe leicht, dass μ ein Maß ist, welches auf jeder nichtleeren offenen Teilmenge von M^n nicht verschwindet. Da der Rand einer Zukunftsmenge eine topologische Hyperfläche ist, die lokal der

Graph einer Lipschitz-Funktion ist[6], gilt $\int_{\partial I_\pm(x)} d\mu_g = 0$ und somit $\mu(\partial I_\pm(x)) = 0$ für alle $x \in M^n$. □

Lemma 3.12 *Sei (M^n, g) eine Raumzeit und μ ein zulässiges Maß auf (M^n, g). Man betrachte die Abbildungen $t_\pm : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \mp\mu(I_\pm(x))$.*

i) Ist die Abbildung $I_+ : M \longrightarrow \mathcal{P}(M)$ (bzw. I_-) stetig im Sinne von Lemma 3.8, *so ist t_+ (bzw. t_-) stetig auf M^n.*

ii) Ist die Abbildung $I_+ : M \longrightarrow \mathcal{P}(M)$ (bzw. I_-) injektiv, so ist t_+ (bzw. t_-) streng monoton wachsend entlang jeder zukunftsgerichteten kausalen Kurve in (M^n, g).

Insbesondere sind $t_\pm$ Zeitfunktionen, sobald $I_\pm$ stetig und injektiv sind.

Beweis: Betrachte t_+ (analog für t_-).
Ad *i)*: Sei $x \in M^n$ und $\varepsilon > 0$. Da $I_+(x)$ die wachsende Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Teilmengen ist (jede Mannigfaltigkeit besitzt sogar eine Ausschöpfung durch kompakte Teilmengen) und μ ein endliches Maß ist, existiert ein Kompaktum $K \subset I_+(x)$ mit $\mu(K) > \mu(I_+(x)) - \varepsilon$. Aus der ersten Stetigkeitsbedingung an I_+ folgt die Existenz einer offenen Umgebung U von x so, dass $K \subset I_+(y)$ gilt für alle $y \in U$. Für jedes solche y gilt dann $\mu(I_+(y)) \geq \mu(K) > \mu(I_+(x)) - \varepsilon$, somit $t_+(x) - t_+(y) > -\varepsilon$. Analog existiert ein Kompaktum $K' \subset M \setminus \overline{I_+(x)}$ mit $\mu(K') > \mu(M \setminus \overline{I_+(x)}) - \varepsilon$. Aus der zweiten Stetigkeitsbedingung an I_+ folgt die Existenz einer offenen Umgebung U' von x so, dass $K' \subset M \setminus \overline{I_+(y)}$ gilt für alle $y \in U$. Für jedes solche y gilt dann $\mu(M \setminus \overline{I_+(y)}) \geq \mu(K') > \mu(M \setminus \overline{I_+(x)}) - \varepsilon$, somit (wegen $\mu(\partial I_+(x)) = 0$ und μ endlich) $t_+(x) - t_+(y) < \varepsilon$. Insgesamt bekommt man für alle $y \in U \cap U'$: $|t_+(x) - t_+(y)| < \varepsilon$, QED.
Ad *ii)*: Sei $c : \mathcal{I} \longrightarrow M^n$ eine zukunftsgerichtete kausale Kurve in (M^n, g) und $s_1, s_2 \in \mathcal{I}$ mit $s_1 < s_2$. Wegen $c(s_1) < c(s_2)$ gilt $I_+(c(s_2)) \subset I_+(c(s_1))$. Es bleibt, zu bemerken, dass $I_+(c(s_1)) \setminus I_+(c(s_2))$ positives Maß hat. Sei $y \in I_+(c(s_2))$ und $\gamma : [0, 1] \longrightarrow M^n$ eine zukunftsgerichtete zeitartige Kurve mit $\gamma(0) = c(s_1)$ und $\gamma(1) = y$ (diese Kurve existiert wegen $c(s_1) < c(s_2) \ll y$).
Behauptung: *Es gibt ein $t_0 \in]0, 1[$ mit $\gamma(]0, t_0]) \subset I_+(c(s_1)) \setminus \overline{I_+(c(s_2))}$.*
Beweis der Behauptung: Wäre es nicht der Fall, so wäre $c(s_1) \in \overline{I_+(c(s_2))}$. Dies aber würde $I_+(c(s_1)) \subset I_+(c(s_2))$ implizieren, denn: sei $\lambda : [0, 1] \longrightarrow M^n$ eine zukunftsgerichtete zeitartige Kurve mit $\lambda(0) = c(s_1)$, dann ist für jedes $t > 0$ der Punkt $\lambda(t) \in I_+(c(s_2))$, sonst würde die offene Umgebung $I_-(\lambda(t))$ von $c(s_1)$ die Teilmenge $I_+(c(s_2))$ nicht treffen, Widerspruch zu $c(s_1) \in \overline{I_+(c(s_2))}$. Die Inklusion $I_+(c(s_1)) \subset I_+(c(s_2))$ würde mit $I_+(c(s_2)) \subset I_+(c(s_1))$ die Gleichheit $I_+(c(s_2)) = I_+(c(s_1))$ liefern, und weil I_+ injektiv ist, müsste $c(s_1) = c(s_2)$ gelten. Insbesondere wäre c geschlossen, was für jedes $s \in]s_1, s_2[$ auch $I_+(c(s)) = I_+(c(s_1))$ liefern würde, und die Injektivität von I_+ würde wiederum $c(s) = c(s_1)$ implizieren, insbesondere wäre $c_{|_{[s_1,s_2]}}$ konstant, Widerspruch. $\surd$
Für das t_0 aus der Behauptung ist $I_+(c(s_1)) \cap I_-(\gamma(t_0))$ eine offene und nichtleere Teilmenge in $I_+(c(s_1)) \setminus \overline{I_+(c(s_2))}$, somit folgt aus der Positivität von μ auf nichtleeren offenen Teilmengen $\mu(I_+(c(s_2))) < \mu(I_+(c(s_1)))$. □

Lemma 3.13 *Besitzt eine Raumzeit eine Zeitfunktion, so erfüllt sie die starke Kausalitätsbedingung.*

[6]erkläre

Beweis: Sei $t : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Zeitfunktion auf M^n. Sei $x \in M^n$ und V eine Umgebung von x in M^n. Bis auf Verschiebung von t um eine reelle Konstante kann $t(x) = 0$ angenommen werden. Wähle konvexe offene Umgebungen U_1, U_2 von x mit $U_1 \subset\subset U_2 \subset V$ (Erinnerung: jede Umgebung eines Punktes x enthält eine konvexe offene Umgebung von x), wobei $U_1 \subset\subset U_2$ bedeutet, dass $\overline{U_1}$ (in M^n) kompakt und enthalten in U_2 ist. Betrachte die Abbildung $\delta_+ : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, $y \longmapsto \min\limits_{J_+^{U_2}(y)\cap\partial U_1}(t)$. Wegen t stetig und $J_+^{U_2}(y) \cap \partial U_1$ nichtleer (wegen U_2 konvex und U_1 relativ kompakt in U_2) und kompakt (die Relation "$\leq$" ist in konvexen Teilmengen abgeschlossen) ist δ_+ wohldefiniert.

Behauptung: *Die Abbildung δ_+ ist unterhalbstetig auf U_1.*[7]

Beweis der Behauptung: Sei $y \in U_1$ und setze $K := J_+^{U_2}(y) \cap \partial U_1$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zu jedem $z \in K$ existiert eine relativ kompakte Umgebung V_z von z in ∂U_1 mit $t(w) \geq t(z) - \varepsilon$ für alle $w \in \overline{V_z}$ (Stetigkeit von t). Die Überdeckung $(V_z)_{z\in K}$ von K besitzt eine endliche Teilüberdeckung $(V_{z_i})_{1\leq i\leq N}$. Setze $K_\varepsilon := \cup_{i=1}^N \overline{V_{z_i}} \subset \partial U_1$. Dann ist K_ε eine kompakte Teilmenge von ∂U_1 mit $K \subset \overset{\circ}{K_\varepsilon}$ (in ∂U_1) und $t(w) \geq \min\limits_K (t) - \varepsilon$ für alle $w \in K_\varepsilon$, insbesondere $\min\limits_{K_\varepsilon} (t) \geq \delta_+(y) - \varepsilon$. Sei $c : [0,1] \longrightarrow M^n$ eine zukunftsgerichtete zeitartige Kurve in U_1 mit $c(1) = y$. Wir zeigen, dass ein $\eta > 0$ so existiert, dass $J_+^{U_2}(c(1-\eta)) \cap \partial U_1 \subset K_\varepsilon$ gilt. Für dieses η wird nämlich $J_+^{U_2}(z) \cap \partial U_1 \subset K_\varepsilon$ für alle z in der offenen Umgebung $I_+^{U_1}(c(1-\eta))$ von y folgen, insbesondere $\delta_+(z) \geq \delta_+(y) - \varepsilon$, was zu beweisen ist. Angenommen, es gäbe kein solches η. Dann existieren Folgen $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $[0,1]$ mit $s_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 1$ und $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $p_m \in J_+^{U_2}(c(s_m)) \cap \partial U_1 \cap K_\varepsilon^c$. Wegen der Kompaktheit von $\partial U_1 \cap (K_\varepsilon^\circ)^c$ existiert eine Teilfolge von $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $p \in \partial U_1 \cap (K_\varepsilon^\circ)^c$ konvergiert. Da die Relation "$\leq$" in U_2 abgeschlossen ist, muss $p \in J_+^{U_2}(y) \cap \partial U_1 \cap (K_\varepsilon^\circ)^c = K \cap (K_\varepsilon^\circ)^c = \varnothing$ liegen, Widerspruch. $\surd$

Wegen U_1 offen und der strengen Monotonie von t entlang zukunftsgerichteten kausalen Kurven gilt $\delta_+(y) > t(y)$ für alle $y \in U_1$, insbesondere ist $\delta_+(x) > 0$. Da δ_+ unterhalbstetig ist, existiert für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ eine relativ kompakte offene Umgebung W von x in U_1 mit $\delta_+(y) \geq \varepsilon$ für alle $y \in \overline{W} \subset U_1$. Betrachte nun die offene Umgebung $U := W \cap t^{-1}(]-\varepsilon, \varepsilon[)$ von x in U_1. Dann liefert U das Gewünschte. Ist nämlich $\gamma : [0,1] \longrightarrow M^n$ eine zukunftsgerichtete kausale Kurve mit $\gamma(0), \gamma(1) \in U$, dann verläuft γ offensichtlich in $t^{-1}(]-\varepsilon, \varepsilon[)$ (Monotonie von t) und in U_1: wäre ein $\gamma(s) \in U_1^c$ für ein $s > 0$, so könnte man s mit $\gamma(s) \in \partial U_1 \subset U_2$ wählen, und wegen $\gamma(s) > \gamma(0)$ würde die Ungleichung $t(\gamma(s)) \geq \delta_+(\gamma(0)) \geq \varepsilon$ den Widerspruch $t(\gamma(1)) \geq \varepsilon$ liefern. Insbesondere verläuft γ in V. $\square$

Als unmittelbare Folgerung ergibt sich das

Korollar 3.14 *Besitzt eine Raumzeit eine Cauchy-Hyperfläche, so ist sie globalhyperbolisch.*

Im Vergleich folgt die Existenz einer Cauchy-Hyperfläche relativ einfach aus der Globalhyperbolizität. Der Beweis, den wir hier angeben, wird von [10] stark inspiriert. Als Erstes zeigen wir, dass jede nichterweiterbare zukunftsgerichtete kausale Kurve in einer Raumzeit, welche die starke Kausalitätsbedingung erfüllt, jedes Kompaktum verlässt:

[7] Sie ist sogar stetig auf U_1 (etwas antrengender zu zeigen).

Lemma 3.15 *Erfüllt eine Raumzeit (M^n, g) die starke Kausalitätsbedingung, so ist jede nichterweiterbare zukunftsgerichtete kausale Kurve γ in (M^n, g) eigentlich, d.h., $\gamma^{-1}(K)$ ist kompakt für alle Kompakta $K \subset M^n$.*

Beweis: *[31. Aufgabe im 8. Übungsblatt]* Sei $K \subset M^n$ eine kompakte Teilmenge und $\gamma :]a, b[\longrightarrow M^n$ eine nichterweiterbare zukunftsgerichtete kausale Kurve in (M^n, g). Zu zeigen ist die Existenz von $a', b' \in]a, b[$ mit $a' < b'$ und $\gamma^{-1}(K) \subset [a', b']$. Angenommen, es wäre nicht der Fall, o.B.d.A. gäbe es dann eine Folge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von $]a, b[$ mit $s_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} b$ und $\gamma(s_m) \in K$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wegen K kompakt existieren eine Teilfolge $(s_{\varphi(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ von $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und ein $p \in K$ mit $\gamma(s_{\varphi(m)}) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} p$. Ist q ein weiterer Häufungspunkt von γ bei b, so lässt sich eine monoton wachsende Folge $(\tilde{s}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ aus $]a, b[$ konstruieren mit $\tilde{s}_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} b$ und $\gamma(\tilde{s}_{2m}) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} p$, $\gamma(\tilde{s}_{2m+1}) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} q$. Insbesondere gilt $\gamma(\tilde{s}_{2m-1}) \le \gamma(\tilde{s}_{2m}) \le \gamma(\tilde{s}_{2m+1})$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Sei nun V eine beliebige Umgebung von q in M^n. Da (M^n, g) die starke Kausalitätsbedingung erfüllt, existiert eine offene Umgebung U von q in M^n so, dass jede zukunftsgerichtete kausale Kurve in M^n mit Endpunkten in U ganz in V verläuft. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\gamma(\tilde{s}_{2m-1}) \in U$ für alle $m \ge N$. Da $\gamma_{|[\tilde{s}_{2m-1}, \tilde{s}_{2m+1}]}$ zukunftsgerichtete kausale Kurve in M^n mit Endpunkten in U ist, gilt $\gamma([\tilde{s}_{2m-1}, \tilde{s}_{2m+1}]) \subset V$, insbesondere $\gamma(\tilde{s}_{2m}) \in V$ für alle $m \ge N$. Daraus folgt $p \in \overline{V}$ (in M^n), und da V beliebig gewählt werden konnte (und wegen M^n Hausdorff) gilt schließlich $p = q$. Dies beweist die Eindeutigkeit des Häufungspunktes von γ bei b, somit gilt $\gamma(t) \underset{s\to b}{\longrightarrow} p \in K$, insbesondere ist γ erweiterbar nach b, Widerspruch. $\square$

Proposition 3.16 (R. Geroch [8]) *Ist eine Raumzeit (M^n, g) globalhyperbolisch, so existiert eine Zeitfunktion auf (M^n, g), die entlang jeder nichterweiterbaren zukunftsgerichteten kausalen Kurve surjektiv auf $\mathbb{R}$ ist. Insbesondere besitzt (M^n, g) eine Cauchy-Hyperfläche.*[8]

Beweis: Für ein zulässiges Maß μ auf (M^n, g) definiere wie im letzten Abschnitt $t_\pm(x) := \mp\mu(I_\pm(x))$ für alle $x \in M^n$. Da alle $J_+(x) \cap J_-(y)$ kompakt sind, sind nach Lemma 3.7 alle $J_\pm(x)$ abgeschlossen, und weil (M^n, g) außerdem die Kausalitätsbedingung erfüllt, müssen die Abbildungen $I_\pm$ injektiv und stetig sein (Lemma 3.8). Aus Lemma 3.12 folgt, dass $t_\pm$ Zeitfunktionen auf (M^n, g) sind. Betrachte

$$\begin{aligned} t : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln\left(-\frac{t_-(x)}{t_+(x)}\right). \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass t eine Zeitfunktion auf (M^n, g) ist, die entlang jeder nichterweiterbaren zukunftsgerichteten kausalen Kurve ganz $\mathbb{R}$ durchläuft. Die Stetigkeit von t und ihre strenge Monotonie entlang zukunftsgerichteten kausalen Kurven folgt aus den entsprechenden Eigenschaften für $t_\pm$ (beachte das Vorzeichen vor t_+). Sei nun $c :]a, b[\longrightarrow M^n$ eine nichterweiterbare zukunftsgerichtete kausale Kurve in (M^n, g). Wir wollen $t_+(c(s)) \underset{s\to b}{\longrightarrow} 0$ beweisen, was $t(c(s)) \underset{s\to b}{\longrightarrow} \infty$ impliziert und, mit einem analogen Argument für t_- bei a, auch $t(c(s)) \underset{s\to a}{\longrightarrow} -\infty$ und die Proposition liefert. Sei dafür $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus

[8] Z.B. $\Sigma := t^{-1}(\{0\})$ ist dann eine Cauchy-Hyperfläche in (M^n, g).

$]a,b[$ mit $s_m < s_{m+1}$ und $s_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} b$. Da die Folge $(I_+(c(s_m)))_{m\in\mathbb{N}}$ monoton fallend (denn $c(s_m) < c(s_{m+1})$ für alle m) und μ ein endliches Maß ist, gilt

$$\lim_{m\to\infty} \mu(I_+(c(s_m))) = \mu(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} I_+(c(s_m))).$$

Es reicht also, $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} I_+(c(s_m)) = \varnothing$ zu beweisen. Angenommen, es gäbe ein $y \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} I_+(c(s_m))$, dann würde für alle $s \in]s_0, b[$ wegen $c(s_0) < c(s) < c(s_m)$ für ein $m \in \mathbb{N}$ hinreichend groß der Punkt $c(s)$ in $J_+(c(s_0)) \cap J_-(y)$ liegen. Da nach Voraussetzung $J_+(c(s_0)) \cap J_-(y)$ kompakt ist, bekommen wir mit dem Lemma 3.15 einen Widerspruch. Daraus folgt $\lim_{s\to b} t_+(c(s)) = 0$. □

Bemerkungen 3.17

1. Proposition 3.16 beweist sogar, dass eine globalhyperbolische Raumzeit die disjunkte Vereinigung von *akausalen* Cauchy-Hyperflächen ist.

2. Mit erheblich mehr Aufwand kann die Existenz einer *glatten* Zeitfunktion t auf (M^n, g) mit $g(\mathrm{grad}(t), \mathrm{grad}(t)) = -1$ bewiesen werden so, dass jede Niveaumenge von t eine glatte raumartige Cauchy-Hyperfläche in (M^n, g) ist [4][9], siehe auch [11, Sec. 4] für einen relativ kurzen Beweis.

Wir fassen zusammen:

Satz 3.18 *Eine Raumzeit ist genau dann globalhyperbolisch, wenn sie eine Cauchy-Hyperfläche besitzt.*

3.2 Der Zeitunterschied einer globalhyperbolischen Raumzeit

Für die Untersuchung des Zeitunterschieds auf globalhyperbolischen Raumzeiten brauchen wir eine leicht stärkere Variante des Grenzkurvenlemmas sowie die Oberhalbstetigkeit des Kurvenlängenfunktionals:

Lemma 3.19 *Sei (M^n, g) eine globalhyperbolische Raumzeit und h eine vollständige riemannsche Metrik auf M^n.*

1. *Sei $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nach h-Bogenlänge parametrisierten nichterweiterbaren zukunftsgerichteten kausalen Kurven in M^n. Es gebe Punkte $p, q \in M^n$ und eine Folge $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ aus $[0,\infty[$ mit $c_m(0) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} p$ sowie $c_m(t_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} q$. Dann existiert ein $T \in [0,\infty[$, eine zukunftsgerichtete kausale Kurve $c : \mathbb{R} \longrightarrow M^n$ mit $c(0) = p$, $c(T) = q$ und eine Teilfolge von $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$, die auf jedem Kompaktum von $\mathbb{R}$ gleichmäßig (bzgl. d_h) gegen c konvergiert.*

2. *Konvergiert eine Folge $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von nach h-Bogenlänge parametrisierten zukunftsgerichteten kausalen Kurven gleichmäßig auf $[0,T]$ gegen eine zukunftsgerichtete kausale Kurve c, so gilt $\overline{\lim_{m\to\infty}} L[c_{m|_{[0,T]}}] \leq L[c_{|_{[0,T]}}]$.*

[9]Dieses Ergebnis wird üblicherweise als Satz von Bernal und Sánchez genannt.

Beweisskizze: Setze $p_m := c_m(0)$ und $q_m := c_m(t_m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Sei Σ eine Cauchy-Hyperfläche von (M^n, g) mit $q \in I_-(\Sigma)$ (Proposition 3.16 impliziert die Existenz einer Cauchy-Hyperfläche von (M^n, g) durch jeden Punkt, insbesondere durch einen Punkt $r \in I_+(q)$). Da $\leq$ auf globalhyperbolischen Raumzeiten abgeschlossen ist (Lemma 3.7), gilt $p \leq q$, insbesondere $p \in I_-(\Sigma)$ und somit $p_m, q_m \in I_-(\Sigma)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ hinreichend groß. Nach dem Grenzkurvenlemma 3.5 existiert eine nichterweiterbare zukunftsgerichtete kausale Kurve $c : \mathbb{R} \longrightarrow M^n$ mit $c(0) = p$ und eine Teilfolge von $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$, die auf jedem Kompaktum von $\mathbb{R}$ gleichmäßig (bzgl. d_h) gegen c konvergiert. Wir bezeichnen diese Teilfolge weiterhin mit $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Wie bei der Behauptung 1 im Beweis von Proposition 3.6 zeigt man, dass die Folge $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist (die Folge $(s_m := \max(c_m^{-1}(\Sigma)))_{m\in\mathbb{N}}$ ist wie im Beweis von Proposition 3.6 beschränkt und es gilt $0 \leq t_m \leq s_m$ für m groß genug), somit besitzt sie eine Teilfolge, die gegen ein $T \in [0, \infty[$ konvergiert. Insgesamt konvergiert eine Teilfolge von $(c_m(t_m) = q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen $c(T)$, insbesondere $c(T) = q$. Bemerke, dass $L[c_{|[0,T]}] < \infty$ gilt. Dies beweist *i*).
Ad *ii*): als Erstes zeige man, dass die Länge einer kausalen Kurve c dem Infimum der Längen der "in c" eingeschriebenen kausalen geodätischen Polygonzüge gleicht (dies ist ein Infimum wegen der inversen Dreiecksungleichung für den Zeitunterschied τ). Dies geht im Wesentlichen wie bei der Approximation von Kurven mit geodätischen Polygonzügen auf riemannschen Mannigfaltigkeiten, siehe [10]. Für $L := L[c_{|[0,T]}]$ und $\varepsilon > 0$ existiert somit ein kausaler geodätischer Polygonzug $\hat{\gamma}$ mit $L[\hat{\gamma}] < L + \varepsilon$. Dieser Polygonzug $\hat{\gamma}$ kann so gewählt werden, dass jedes geodätische Kurvenstück $\hat{\gamma}_{|[s_i,s_{i+1}]}$ von $\hat{\gamma}$ sowie das entsprechende Kurvenstück $c_{|[s_i,s_{i+1}]}$ von c in einer konvexen Teilmenge U_i von (M^n, g) enthalten sind. Diese konvexen Teilmengen können sogar so gewählt werden, dass alle Durchschnitte der Form $J_+^M(x) \cap J_-^M(y)$ für Punkte x, y aus dieser Teilmenge in der Teilmenge enthalten sind (siehe z.B. nächsten Abschnitt). Beachte, dass dies eben möglich ist, weil (M^n, g) die starke Kausalitätsbedingung erfüllt. Die letzte Bedingung stellt sicher, dass die Einschränkung des Zeitunterschieds von M^n auf eine solche konvexe Teilmenge mit dem Zeitunterschied dieser Teilmenge übereinstimmt. Da aber der Zeitunterschied in konvexen Teilmengen endlich und stetig ist, können jeweils Umgebungen der Endpunkte der geodätischen Kurvenstücke gefunden werden so, dass τ "sehr nahe" an der Länge des geodätischen Kurvenstücks bleibt (die d_h-Differenz soll höchstens $\frac{\varepsilon}{k}$ betragen, wobei k die Anzahl der geodätischen Kurvenstücke ist). Nun kann die Länge aller zukunftsgerichteten kausalen Kurven von p nach q, die durch diese Umgebungen laufen, $L[\hat{\gamma}] + \varepsilon$ nicht überschreiten. Für die Details siehe [13]. $\square$

Proposition 3.20 *Sei (M^n, g) eine globalhyperbolische Raumzeit. Dann ist der Zeitunterschied $\tau : M^n \times M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (endlich und) stetig. Außerdem gibt es, für alle $p, q \in M^n$ mit $p \leq q$, eine zukunftsgerichtete Geodätische von p nach q der Länge $\tau(p, q)$.*

Beweisskizze: Seien $p, q \in M^n$. Gilt $p \not\leq q$, so gilt wegen $\leq$ abgeschlossen $p' \not\leq q'$ für alle p', q' nahe genug an p, q, somit $\tau(p', q') = 0 = \tau(p, q)$ für alle solchen p', q'. Sei nun $p \leq q$. Wähle eine vollständige riemannsche Metrik h auf M^n. Sei $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nach h-Bogenlänge parametrisierten (nichterweiterbaren) zukunftsgerichteten kausalen Kurven $c_m : \mathbb{R} \longrightarrow M^n$ mit $c_m(0) = p$, $c_m(t_m) = q$ für ein $t_m \geq 0$ und $L[c_{m|[0,t_m]}] \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \tau(p, q)$. Dann existiert nach Lemma 3.19 ein $T \in [0, \infty[$, eine zukunftsgerichtete kausale Kurve $c : \mathbb{R} \longrightarrow M^n$ mit $c(0) = p$, $c(T) = q$ und eine Teilfolge von $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$, die auf jedem

[10] Referenz

Kompaktum von $\mathbb{R}$ gleichmäßig (bzgl. d_h) gegen c konvergiert. Wir bezeichnen diese Teilfolge weiterhin mit $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Da $(c_{m|_{[0,T']}})_{m\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $c_{|_{[0,T']}}$ konvergiert für alle $T < T' < \infty$, gilt $\tau(p,q) = \overline{\lim_{m\to\infty}} L[c_{m|_{[0,t_m]}}] \leq \overline{\lim_{m\to\infty}} L[c_{m|_{[0,T']}}] \leq L[c_{|_{[0,T']}}]$; dies gilt für alle $T' > T$, insbesondere $\tau(p,q) \leq L[c_{|_{[0,T]}}] \leq \tau(p,q)$, was $\tau(p,q) = L[c_{|_{[0,T]}}] < \infty$ liefert.

Behauptung: *Hat eine zukunftsgerichtete kausale Kurve $\gamma : [0,T] \to M^n$ maximale Länge unter allen zukunftsgerichteten kausalen Kurven von $\gamma(0)$ nach $\gamma(T)$, so ist sie eine glatte Geodätische.*

Beweis der Behauptung: Jedes glatte Segment von γ muss offensichtlich maximale Länge haben. Daher muss jedes lichtartige Segment von γ wegen Satz 2.13 eine lichtartige Geodätische sein (sonst könnte zwischen denselben Endpunkten und beliebig nahe an γ eine zeitartige Kurve gefunden werden, und die wäre länger). Jedes zeitartige Segment von γ muss nach Korollar 2.2 eine glatte zeitartige Geodätische sein. Außerdem kann nach Korollar 2.2 die Kurve γ keine unstetige Stelle besitzen, sonst wäre sie kein kritischer Punkt des Längenfunktionals. $\checkmark$

Nach der Behauptung muss also $c_{|_{[0,T]}}$ eine glatte zukunftsgerichtete kausale Geodätische von p nach q sein. Es bleibt, die Oberhalbstetigkeit von τ zu zeigen. Angenommen, τ sei nicht oberhalbstetig auf M^n, dann existieren $p, q \in M^n$, $\delta \in]0,\infty[$ und Folgen $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $(q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ aus M^n so, dass $p_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} p$, $q_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} q$ und $\tau(p_m,q_m) > \tau(p,q) + \delta$ für alle m. Per Definition von τ existieren zukunftsgerichtete kausale Kurven c_m von p_m nach q_m mit $L[c_m] \geq \tau(p_m,q_m) - \frac{\delta}{2} > \tau(p,q) + \frac{\delta}{2}$ für alle m. Nach Lemma 3.19 konvergiert eine Teilfolge von $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf einem $[0,T]$ gegen eine zukunftsgerichtete kausale Kurve $c : [0,T] \longrightarrow M^n$ von p nach q. Wiederum nach Lemma 3.19 gilt - bis auf Übergang zu einer Teilfolge - $L[c] \geq \sup_{m\in\mathbb{N}} L[c_m] > \tau(p,q)$, Widerspruch. Somit ist τ unter- und oberhalbstetig auf $M^n \times M^n$. $\square$

3.3 Cauchy-Entwicklungen und Cauchy-Horizonte

In diesem Abschnitt[11] wollen wir die "maximale" Teilmenge definieren und untersuchen, in der eine vorgegebene achronale Teilmenge eine Cauchy-Hyperfläche ist.

Definition 3.21 *Sei A eine achronale Teilmenge einer Raumzeit (M^n, g).*

i) Die Zukunfts-Cauchy-Entwicklung *von A in (M^n,g) wird definiert als*

$$D_+(A) := \{x \in M^n \,|\, \text{jede vergangenheitsnichterw. kausale Kurve durch } x \text{ trifft } A\}.$$

ii) Die Vergangenheits-Cauchy-Entwicklung *von A in (M^n,g) wird definiert als*

$$D_-(A) := \{x \in M^n \,|\, \text{jede zukunftsnichterw. kausale Kurve durch } x \text{ trifft } A\}.$$

iii) Die Cauchy-Entwicklung *von A in (M^n,g) wird definiert als $D(A) := D_+(A) \cup D_-(A)$.*

Von hier aus steht "zukunftsnichterweiterbar" (bzw. "vergangenheitsnichterweiterbar") stets für "zukunftsgerichtet zukunftsnichterweiterbar" (bzw. "vergangenheitsgerichtet vergangenheitsnichterweiterbar").

[11] Dieser Abschnitt wurde suboptimal aufgeschrieben. Eine ernsthafte Lücke könnte beim Beweis von Proposition 3.24 noch bestehen.

Bemerkungen 3.22 Es gilt stets:

1. $A \subset D_\pm(A) \subset A \cup I_\pm(A) \subset J_\pm(A)$.

2. $D_+(A) \cap I_-(A) = \varnothing$ wegen A achronal.

3. $D_+(A) \cap D_-(A) = A$.

4. $D(A) \cap I_\pm(A) = D_\pm(A) \setminus A$.

Beispiele 3.23

1. Sei Σ eine Cauchy-Hyperfläche von (M^n, g), dann ist $D_\pm(\Sigma) = \Sigma \cup I_\pm(\Sigma) = J_\pm(\Sigma)$.

2. Für $A := \{0\} \times B$ in $(\mathbb{R}^n, \langle\!\langle \cdot\,, \cdot \rangle\!\rangle)$, wobei $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$, ist $D(A)$ der Doppelkegel über A.

3. Die Cauchy-Entwicklung braucht aber i.A. nicht abgeschlossen zu sein. Betrachte z.B. $(\overline{M}^2, g) := (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, -dt^2 \oplus ds^2)$ und die offene Teilmenge $M^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \setminus \{(1,1)\} \subset \overline{M}^2$ mit der von $\overline{M}^2$ induzierten Metrik und Zeitorientierung. Für $A := \{0\} \times \mathbb{S}^1 \subset M^2$ ist in (M^2, g) die Zukunfts-Cauchy-Entwicklung von A gegeben durch $D_+(A) = J_+^M(A) \setminus J_+^M((1,1))$, was nicht abgeschlossen ist.

Proposition 3.24 *Sei A eine achronale Teilmenge einer Raumzeit (M^n, g). Dann ist (falls nichtleer) $\overset{\circ}{D}(A)$ globalhyperbolisch.*

Beweis: Wir nehmen an, dass $\overset{\circ}{D}(A)$ nichtleer ist und zeigen, dass $A\cap \overset{\circ}{D}(A)$ eine Cauchy-Hyperfläche von $\overset{\circ}{D}(A)$ ist; aus Satz 3.18 folgt dann die Globalhyperbolizität von $\overset{\circ}{D}(A)$.
Sei $c : \mathcal{I} \to \overset{\circ}{D}(A)$ eine in $\overset{\circ}{D}(A)$ nichterweiterbare zukunftsgerichtete zeitartige Kurve und $x \in \overset{\circ}{D}(A)$ ein Punkt auf dieser Kurve. Wir wollen zeigen, dass c die Teilmenge $A\cap \overset{\circ}{D}(A)$ trifft (ggf. in genau einem Punkt wegen A achronal). Ist $x \in A$, so trifft c die Teilmenge $A\cap \overset{\circ}{D}(A)$ in x. O.B.d.A. sei also $0 \in \mathcal{I}$, $x \in D_-(A) \setminus A$ (der Fall $x \in D_+(A) \setminus A$ ist analog) und $c(0) = x$. Erweitere c zu einer zukunftsnichterweiterbaren kausalen Kurve $\tilde{c} : \tilde{\mathcal{I}} \to M^n$ mit $\tilde{c}$ zeitartig auf $\tilde{\mathcal{I}} \setminus \overline{\mathcal{I}}$[12]. Per Definition von $D_-(A)$ muss $\tilde{c}$ die Teilmenge A in genau einem Punkt $\tilde{c}(t_0)$ mit $t_0 \geq 0$ treffen. Ist c bereits in M^n zukunftsnichterweiterbar (als Kurve), so ist $\tilde{c} = c$ und die Aussage ist bewiesen. Ist c zukunftserweiterbar in M^n, so besitzt c einen Grenzwert bei $\sup(\mathcal{I})$. Bis auf Umparametrisierung sei also $\mathcal{I} =]a, T[$ mit $a \leq 0 < T < \infty$ und betrachte $\tilde{c}(T) = \lim_{t \to T} c(t) \in \partial(\overset{\circ}{D}(A))$.
Behauptung 1: *Für $x \in D_-(A)$ gilt $I_+^M(x) \cap J_-^M(A) \subset D_-(A)$.*
Beweis der Behauptung 1: Sei $y \in I_+^M(x) \cap J_-^M(A)$ und $d : [0, \infty[\to M^n$ eine in M^n zukunftsnichterweiterbare kausale Kurve mit $d(0) = y$. Dann kann d mit einer zukunftsgerichteten zeitartigen Kurve von x nach y zusammengesetzt werden zu einer zukunftsgerichteten kausalen Kurve $\hat{d} : [-1, \infty[\to M^n$ mit $\hat{d}(-1) = x$ und $\hat{d}_{|[0,\infty[} = d$. Diese Kurve ist notwendigerweise zukunftsnichterweiterbar in M^n und somit trifft sie A. Gilt $\hat{d}([-1, 0[) \cap A \neq \varnothing$, so gilt $y = d(0) \in I_+^M(A)$, was mit $y \in J_-^M(A)$ einen Widerspruch zur

[12] immer möglich, denn: ist eine kausale Kurve γ nach $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ erweiterbar (als Kurve), so existiert auch $\lim_{s \to b} \dot{\gamma}(s)$ - und ist kausal.

Achronalität von A liefert. Daraus folgt $d([0,\infty[) \cap A \neq \varnothing$, was $y \in D_-(A)$ impliziert. $\surd$
Wäre $T < t_0$, so würde der Punkt $c(T)$ in $I_+^M(x) \cap I_-^M(\tilde{c}(t_0))$ liegen und die Behauptung 1 würde $c(T) \in \overset{\circ}{D}(A)$ liefern (Erinnerung: $\ll$ ist offen), Widerspruch zu $\tilde{c}(T) \in \partial(\overset{\circ}{D}(A))$. Daher ist $T \geq t_0$. Es bleibt, $T = t_0$ auszuschließen.

Behauptung 2: *Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $\tilde{c}(t_0 + \varepsilon) \in D_+(A)$. Insbesondere ist $\tilde{c}(t_0) \in \overset{\circ}{D}(A)$.*
Beweis der Behauptung 2: Die Existenz eines solchen $\varepsilon > 0$ soll mit dem Grenzkurvenlemma 3.5 erfolgen[13].
Für ein solches $\varepsilon > 0$ ist $I_+^M(x) \cap I_-^M(\tilde{c}(t_0+\varepsilon))$ eine offene Umgebung von $\tilde{c}(t_0)$ und liegt in $D(A)$, denn: sei $y \in I_+^M(x) \cap I_-^M(\tilde{c}(t_0+\varepsilon))$ und d eine zukunftsgerichtete zeitartige Kurve durch x, y und $\tilde{c}(t_0+\varepsilon)$. Erweitere d zu einer nichterweiterbaren kausalen Kurve $\tilde{d}$ in M^n; wegen der Achronalität von A kann $\tilde{d}$ die Teilmenge A weder vor $x \in I_-^M(A)$ noch nach $\tilde{c}(t_0 + \varepsilon) \in I_+^M(A)$ treffen. Somit müssen die Treffpunkte von $\tilde{d}$ mit A zwischen x und $\tilde{c}(t_0+\varepsilon)$ liegen, insbesondere auf d. Deswegen muss y entweder in A oder in $I_\pm(A)$ liegen. Nun folgt aus der Behauptung 1, dass sowohl $I_+^M(x) \cap I_-^M(A)$ als $I_-^M(\tilde{c}(t_0 + \varepsilon)) \cap I_+^M(A)$ in $\overset{\circ}{D}(A)$ enthalten sind. $\surd$
Die Behauptung 2 liefert $T > t_0$ und die Proposition. $\square$

Proposition 3.25 *Sei A eine akausale topologische Hyperfläche in einer Raumzeit (M^n, g). Dann ist $D(A)$ offen und (falls nichtleer) globalhyperbolisch.*

Beweis: Wegen Proposition 3.24 ist lediglich zu zeigen, dass $D(A)$ offen ist.
Behauptung A: *Die Teilmenge $I(A) := I_-(A) \cup A \cup I_+(A)$ ist offen in M^n.*

Beweis der Behauptung A: Es ist nur zu beweisen, dass $A \subset \overset{\circ}{I}(A)$ gilt. Sei $x \in A$, dann ist wegen $A \cap \mathrm{Kante}(A) = \varnothing$ der Punkt $x \notin \mathrm{Kante}(A)$, insbesondere existiert eine offene Umgebung U von x in M^n so, dass jede zukunftsgerichtete zeitartige Kurve von $I_-^U(x)$ nach $I_+^U(x)$ die Teilmenge A trifft. Konstruiere nun eine Art Produktumgebung um x in U wie folgt: wähle eine konvexe Umgebung V von x in U so, dass das Koordinatenvektorfeld $\frac{\partial}{\partial x_0}$ bzgl. $\exp_x$ zukunftsgerichtet zeitartig auf V ist. Wähle eine Unterumgebung der Form $]-l, l[\times B_r^{n-1}(0)$ mit $r, l > 0$ so, dass $\{\pm l\} \times B_r^{n-1}(0)$ in $I_\pm(0)$ enthalten sind. Hierbei bezeichne wie üblich $B_r^{n-1}(0)$ der offene euklidische Ball von Radius r um 0 in $(\mathbb{R}^{n-1}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$. Nun ist $W := \exp_x(]-l, l[\times B_r^{n-1}(0))$ eine offene Umgebung von x, die in $I(A)$ enthalten ist (denn jede Kurve der Form $s \mapsto \exp_x((s, y))$, $]-l, l[\longrightarrow M^n$, geht von $I_-^U(x)$ nach $I_+^U(x)$, somit muss sie A treffen). $\surd$

Behauptung B: *Es gilt $A \subset \overset{\circ}{D}(A)$.*

Beweis der Behauptung B: Angenommen, es gäbe einen Punkt $x \in A \setminus \overset{\circ}{D}(A)$. Betrachte eine relativ kompakte offene Umgebung U von x so, dass $\overline{U}$ in einer konvexen Teilmenge V enthalten ist mit $V \subset I(A)$ (möglich nach der Behauptung A). Nach Voraussetzung an x existiert eine Folge $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ aus $M^n \setminus D(A)$ mit $p_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x$. Bis auf Übergang zu einer Teilfolge und eventuelle Zeitorientierungsumkehrung von (M^n, g) seien alle p_m aus $I_-(A) \cap U$. Da insbesondere $p_m \notin D_-(A)$ existiert eine zukunftsnichterweiterbare kausale Kurve $c_m : [0, \infty[\longrightarrow M^n$ mit $c_m(0) = p_m$, die A nicht trifft. Da $\overline{U}$ kompakt in der konvexen Teilmenge V enthalten ist und konvexe Teilmengen die starke Kausalitätsbedingung erfüllen, existiert nach Lemma 3.15 für jedes m ein erstes $s_m > 0$ mit

[13] Ist $A \cap \overset{\circ}{D}(A)$ immer nichtleer? Noch zu klären. Falls dies nicht der Fall wäre, müsste die Globalhyperbolizität direkt bewiesen werden.

$q_m := c_m(s_m) \in \partial U$. Wegen ∂U kompakt kann bis auf Übergang zu Teilfolge angenommen werden, dass $(q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen ein $q \in \partial U \subset V$ konvergiert. Da $\leq$ auf V abgeschlossen ist, gilt außerdem $x \leq q$ und sogar $x < q$ wegen $x \in U$. Nun liefert $q \in I(A)$ einen Widerspruch, denn: gilt $q \in I_-(A)$, so existiert ein $z \in A$ mit $q \ll z$ und daher $x \ll z$, Widerspruch zu A akausal. Gilt $q \in A$, so erhalte wegen $x < q$ auch einen Widerspruch zu A akausal. Gilt $q \in I_+(A)$, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $q_m \in I_+(A)$; wegen $c_m([0, s_m]) \subset \overline{U} \subset I(A)$ und $p_m \in I_-(A)$ muss ein $\hat{s}_m \in]0, s_m[$ existieren mit $c_m(\hat{s}_m) \in A$, Widerspruch zur Konstruktion der Folge $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$. $\checkmark$

Behauptung C: *Ist A abgeschlossen in M^n, so ist $D(A)$ offen.*

Beweis der Behauptung C: Wir zeigen, dass $D_-(A)\setminus A$ offen ist, denn analog ist $D_+(A)\setminus A$ offen und wegen

$$\begin{aligned} D(A) &= (D_-(A) \setminus A) \cup A \cup (D_+(A) \setminus A) \\ &\subset (D_-(A) \setminus A) \cup \overset{\circ}{D(A)} \cup (D_+(A) \setminus A) \\ &\subset D(A) \end{aligned}$$

muss dann $D(A)$ offen sein. Angenommen, es wäre falsch, dann gäbe es einen Punkt $x \in D_-(A) \setminus A$, welcher nicht im Inneren von $D_-(A) \setminus A$ liegen würde. Dann würde eine Folge $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ aus $M^n \setminus (D_-(A) \setminus A)$ existieren mit $p_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x$. Fixiere eine vollständige riemannsche Metrik h auf M^n. Wegen $p_m \notin D_-(A) \setminus A$ existiert eine nach h-Bogenlänge parametrisierte zukunftsgerichtete kausale Kurve $c_m : [0, \infty[\longrightarrow M^n$ mit $c_m(0) = p_m$ und $c_m(]0, \infty[) \cap A = \emptyset$ (der Punkt p_m kann eventuell in A liegen). Nach dem Grenzkurvenlemma 3.5 existiert eine zukunftsnichterweiterbare kausale Kurve $c : [0, \infty[\longrightarrow M^n$ mit $c(0) = x$ und eine Teilfolge von $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ (die man mit $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ebenfalls bezeichnet), die auf jedem Kompaktum von $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen c konvergiert. Die Voraussetzung $x \in D_-(A)\setminus A$ impliziert die Existenz eines (wegen A akausal notw. eindeutigen) $t_0 \in]0, \infty[$ mit $c(t_0) \in A$. Da $c(t_0) \notin \mathrm{Kante}(A)$ existiert eine offene Umgebung U von $c(t_0)$ so, dass jede zukunftsgerichtete zeitartige Kurve von $I_-^U(c(t_0))$ nach $I_+^U(c(t_0))$ die Teilmenge A trifft. O.B.d.A. sei $U \subset I(A)$. Dann existiert ein $\eta \in]0, t_0[$ mit $c([t_0 - \eta, t_0 + \eta]) \subset U$. Bemerke, dass wegen $U \subset I(A)$ die Punkte $c(t_0 \pm \eta) \in I_\pm(c(t_0))$ liegen. Die gleichmäßige Konvergenz von $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen c auf dem kompakten Intervall $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$ liefert den gewünschten Widerspruch: es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $c_m([t_0 - \eta, t_0 + \eta]) \subset U$ und $c_m(t_0 \pm \eta) \in I_\pm^U(c(t_0))$, insbesondere muss $c_{m|_{]t_0-\eta,t_0+\eta[}}$ die Teilmenge A treffen. $\checkmark$

Ist A nicht abgeschlossen, so betrachte A als Teilmenge der Raumzeit $I(A)$ von M^n (die Teilmenge $I(A)$ ist offen in M^n nach der Behauptung A). In $I(A)$ ist nämlich A abgeschlossen, somit ist $D^{I(A)}(A)$ (die Cauchy-Entwicklung von A in $I(A)$) offen in $I(A)$ nach der Behauptung C, somit auch offen in M^n. Da aber $D(A) \subset I(A)$ gilt $D^{I(A)}(A) = D(A)$, was die Proposition liefert. $\square$

Bemerkung 3.26 Wird in der Proposition "akausal" durch "achronal" ersetzt, so wird die Aussage falsch. Wähle z.B. $A := \mathbb{R} \cdot (e_0 + e_1) \subset M^2 := \mathbb{R}^2$, wobei M^2 die Minkowski-Metrik g trägt. Dann ist A wohl achronal, akausal aber nicht (A ist die Spur einer lichtartigen Kurve in (M^2, g)). Andererseits gilt $D(A) = A$ (es gibt durch jeden Punkt aus $M^2 \setminus A$ eine nichterweiterbare zeitartige Kurve, die A nicht trifft), und $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.

Lemma 3.27 *Sei A eine abgeschlossene achronale Teilmenge einer Raumzeit (M^n, g). Dann ist*

$$\overline{D_-(A)} = \{x \in M^n \,|\, \text{jede zukunftsnichterweiterbare zeitartige Kurve durch } x \text{ trifft } A\}.$$

Beweis: Sei $\mathcal{D}_-(A)$ die Menge auf der rechten Seite. Ist $x \in \mathcal{D}_-(A)$, so ist insbesondere entweder $x \in A$ oder $x \in I_-(A)$. Im zweiten Fall betrachte eine zukunftsnichterweiterbare zeitartige Kurve $c : [0, \infty[\to M^n$ mit $c(0) = x$. Wegen $I_-(A)$ offen existiert ein $\eta > 0$ mit $c([0, \eta]) \subset I_-(A)$. Für jedes $t_0 \in]0, \eta]$ und jede zukunftsnichterweiterbare kausale Kurve d_{t_0} von $c(t_0)$ muss d_{t_0} die Teilmenge A treffen, sonst könnte man nach Lemma 3.2 (anwendbar wegen A abgeschlossen) eine zukunftsnichterweiterbare zeitartige Kurve von x so konstruieren, dass sie A nicht trifft, Widerspruch zur Definition von $\mathcal{D}_-(A)$. Insbesondere gilt $c(t_0) \in D_-(A)$ und daher $x \in \overline{D_-(A)}$.
Sei umgekehrt $x \in \overline{D_-(A)}$. Angenommen, es gäbe eine zukunftsnichterweiterbare zeitartige Kurve $c : [0, \infty[\to M^n$ mit $c(0) = x$ und $c([0, \infty[) \cap A = \emptyset$. Da insbesondere $x \notin A$ existiert eine offene Umgebung U von x mit $U \cap A = \emptyset$. Wegen c stetig existiert ein $\eta > 0$ mit $c([0, \eta]) \subset U$. Für $y := c(\eta)$ gilt dann $I_-^U(y) \cap D_-(A) = \emptyset$ (ist $z \in I_-^U(y)$, so existiert mindestens eine zukunftsnichterweiterbare zeitartige Kurve von z, die A nicht trifft). Da aber $I_-^U(y)$ eine offene Umgebung von x (in U und somit in M^n) ist, bekommen wir einen Widerspruch zu $x \in \overline{D_-(A)}$. □

Lemma 3.28 *Sei A eine achronale Teilmenge einer Raumzeit (M^n, g) und $x \in \overset{\circ}{D(A)}$. Dann ist $J_+^M(x) \cap D_-(A)$ kompakt.*

Beweis: O.B.d.A. sei $x \in D_-(A)$ (sonst ist $J_+^M(x) \cap D_-(A)$ leer).

Behauptung: *Es gilt $J_+^M(x) \cap D_-(A) = J_+^{\overset{\circ}{D(A)}}(x) \cap J_-^{\overset{\circ}{D(A)}}(A \cap \overset{\circ}{D(A)})$.*
Beweis der Behauptung: Per Definition von $D_-(A)$ gilt $J_+^M(x) \cap D_-(A) \subset J_+^M(x) \cap J_-^M(A)$. Wegen $x \in \overset{\circ}{D(A)}$ existiert ein $x' \in I_-^M(x)$ mit $x' \in D(A)$, insbesondere $x' \in D_-(A)$ und $J_+^M(x) \cap J_-^M(A) \subset I_+^M(x') \cap J_-^M(A)$. Nach der Behauptung 1 im Beweis von Proposition 3.24 gilt $I_+^M(x') \cap J_-^M(A) \subset D_-(A)$, was $I_+^M(x') \cap J_-^M(A) = I_+^M(x') \cap D_-(A)$ liefert. Nach der Behauptung 2 im Beweis von Proposition 3.24 ist $I_-^M(x') \cap A \subset \overset{\circ}{D(A)}$, somit wieder mit derselben Behauptung 1

$$I_+^M(x') \cap D_-(A) \subset (I_+^M(x') \cap A) \cup (I_+^M(x') \cap I_-(A)) \subset \overset{\circ}{D(A)},$$

woraus $J_+^M(x) \cap D_-(A) \subset J_+^M(x) \cap J_-^M(A) \subset J_+^M(x) \cap J_-^M(A) \cap \overset{\circ}{D(A)} \subset J_+^M(x) \cap D_-(A)$ folgt, insbesondere $J_+^M(x) \cap D_-(A) = J_+^M(x) \cap J_-^M(A) \subset \overset{\circ}{D(A)}$. Wegen $I_+^M(p) \cap I_-^M(q) \subset D(A)$ für alle $p, q \in D(A)$ gelten $J_+^M(x) \cap \overset{\circ}{D(A)} = J_+^{\overset{\circ}{D(A)}}(x)$ (*Übungsaufgabe*) und $J_-^M(A) \cap \overset{\circ}{D(A)} = J_-^{\overset{\circ}{D(A)}}(A \cap \overset{\circ}{D(A)})$ (*Übungsaufgabe, benutze Behauptung 1*). Insgesamt bekommen wir $J_+^M(x) \cap D_-(A) \subset J_+^{\overset{\circ}{D(A)}}(x) \cap J_-^{\overset{\circ}{D(A)}}(A \cap \overset{\circ}{D(A)})$. Die andere Inklusion ist trivial. $\surd$
Im Beweis von Proposition 3.24 wurde gezeigt, dass $A \cap \overset{\circ}{D(A)}$ eine Cauchy-Hyperfläche von $\overset{\circ}{D(A)}$ ist.
Behauptung: *Ist Σ eine Cauchy-Hyperfläche einer Raumzeit (M^n, g), so ist für jedes $y \in M^n$ die Teilmenge $J_+^M(y) \cap J_-^M(\Sigma)$ kompakt.*
Beweis der Behauptung: Sei $K := J_+^M(y) \cap \Sigma$, dann ist nach der 36. Aufgabe im 10. Übungsblatt K kompakt. Wegen $J_+^M(y) \cap J_-^M(\Sigma) = J_+^M(y) \cap J_-^M(K)$ und der 38. Aufgabe im 11. Übungsblatt ist $J_+^M(y) \cap J_-^M(\Sigma)$ kompakt. $\surd$
Das Lemma 3.28 wird damit bewiesen. □

Bemerkung 3.29 Wird die Voraussetzung im Lemma 3.28 zu $x \in D(A)$ abgeschwächt, so wird die entsprechende Behauptung falsch. Wähle z.B. das Paar (A, M) aus der Bemerkung 3.26, dann ist für $x := 0 \in A$ der Durchschnitt $J_+^M(x) \cap D_-(A) = \mathbb{R}_+ \cdot (e_0 + e_1)$ nicht kompakt.

Definition 3.30 *Sei A eine achronale Teilmenge einer Raumzeit (M^n, g) mit Zeitunterschied τ und $x \in M^n$ ein Punkt.*

i) Der Zeitunterschied zwischen x und A *wird definiert als* $\tau(x, A) := \sup_{a \in A} \tau(x, a) \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

ii) Der Zeitunterschied zwischen A und x *wird definiert als* $\tau(A, x) := \sup_{a \in A} \tau(a, x) \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Proposition 3.31 *Sei A eine abgeschlossene achronale raumartige glatte Hyperfläche einer Raumzeit (M^n, g) mit Zeitunterschied τ und $x \in D_-(A)$ ein Punkt. Dann existiert eine Geodätische von x nach A der Länge $\tau(x, A)$. Diese Geodätische steht senkrecht auf A, hat keinen Brennpunkt zwischen x und A und ist zeitartig, es sei denn $x \in A$.*

Beweis: Da A achronale raumartige glatte Hyperfläche ist, muss A akausal sein (Beispiel 3.1). Nach Proposition 3.25 ist dann $D(A)$ offen und globalhyperbolisch. Insbesondere liegt $x \in \overset{\circ}{D}(A)$. Nach Lemma 3.28 ist $J_+^M(x) \cap D_-(A)$ kompakt. Insbesondere ist $J_+^M(x) \cap A = J_+^M(x) \cap D_-(A) \cap A$ als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten topologischen Raumes selber kompakt. Wegen $J_+^M(x) \cap A \subset D(A)$ gilt $\tau(x, a) = \tau_{D(A)}(x, a)$ für alle $a \in A$, wobei $\tau_{D(A)}$ den Zeitunterschied der globalhyperbolischen Raumzeit $D(A)$ bezeichnet. Nach Proposition 3.20 ist aber $\tau_{D(A)}$ endlich und stetig, insbesondere ist die Abbildung $J_+^M(x) \cap A \to \mathbb{R}_+$, $a \mapsto \tau(x, a)$ stetig auf dem Kompaktum $J_+^M(x) \cap A$, daher erreicht sie ihr Maximum in einem $p \in J_+^M(x) \cap A$. Wiederum nach Proposition 3.20 existiert eine zukunftsgerichtete kausale glatte Geodätische c von x nach a der Länge $\tau(x, p)$. Gilt $\tau(x, p) = 0$, so ist nach Satz 2.13 die Kurve c eine lichtartige Geodätische ohne Brennpunkte zwischen x und p; wegen $x \in D_-(A)$ kann aber $x \notin A$ nicht auftreten (sonst wäre $x \in I_-(A)$ und daher $\tau(x, A) > 0$), somit $x \in A$ (tatsächlich $x = p$ wegen A akausal). Gilt $\tau(x, p) > 0$, so muss nach der ersten Variationsformel für das Längenfunktional (siehe Korollar 2.6) die Kurve c senkrecht auf A stehen, und weil $T^\perp A \to A$ zeitartig ist, muss c zeitartig sein. Die Maximalität von $L[c]$ impliziert mit Hilfe von Korollar 2.9, dass c keine Brennpunkte zwischen x und p hat. $\square$

Die Aussage von Proposition 3.31 gilt analog für $\tau(A, x)$ statt $\tau(x, A)$.

Definition 3.32 *Sei A eine achronale Teilmenge einer Raumzeit (M^n, g).*

i) Der Zukunfts-Cauchy-Horizont *von A ist* $H_+(A) := \overline{D_+(A)} \setminus I_-(D_+(A))$.

ii) Der Vergangenheits-Cauchy-Horizont *von A ist* $H_-(A) := \overline{D_-(A)} \setminus I_+(D_-(A))$.

iii) Der Cauchy-Horizont *von A ist* $H(A) := H_+(A) \cup H_-(A)$.

Per Definition sind $H_\pm(A)$ abgeschlossene Teilmengen von M^n.

Beispiele 3.33 Sei $(M^n, g) := (\mathbb{R}^n, \langle\!\langle \cdot\,, \cdot \rangle\!\rangle)$.

1. Sei $A_1 := \{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}$, dann ist A_1 achronal mit $D_+(A_1) = J_+(A_1)$ und $I_-(J_+(A_1)) = M^n$, somit $H_+(A_1) = \varnothing$ und analog $H_-(A_1) = \varnothing$.
2. Sei $A_2 := \mathbb{H}^{n-1}$, dann ist A achronal mit $D_+(A_2) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle\langle x, x\rangle\rangle \leq -1 \text{und } x_0 > 0\}$ und $D_-(A_2) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 > \langle\langle x, x\rangle\rangle \geq -1 \text{und } x_0 > 0\}$, insbesondere $H_+(A_2) = D_+(A_2) \setminus \mathbb{R}^n = \varnothing$ und $H_-(A_2) = \overline{D_-(A_2)} \setminus I_+(0) = C_+(0)$.
3. Für $A_3 := C_+(0)$ ist analog $D_+(A_3) = J_+(0)$, $D_-(A_3) = C_+(0)$, insbesondere $H_+(A_3) = J_+(0) \setminus \mathbb{R}^n = \varnothing$ und $H_-(A_3) = C_+(0) \setminus I_+(0) = C_+(0)$.
4. Beachte, dass $H_+(A) \subset J_+(A)$ i.A. nicht gilt. Betrachte z.B. $A := \{0\} \times B_1(0)$ mit $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |x| < 1\}$, dann ist $\{0\} \times \mathbb{S}^{n-1} \subset H_+(A_4)$ aber $\{0\} \times \mathbb{S}^{n-1} \not\subset J_+(A_4)$.

Lemma 3.34 *Sei A eine achronale Teilmenge einer Raumzeit (M^n, g).*

i) Die Teilmengen $H_\pm(A)$ sind achronal.

ii) Ist A abgeschlossen, so gilt $\partial D_\pm(A) = A \cup H_\pm(A)$.

Beweis: Wir zeigen die Aussagen für $H_-(A)$.
Ad *i)*: Für jedes $x \in H_-(A)$ gilt $x \notin I_+(D_-(A))$, d.h., $I_-(x) \cap D_-(A) = \varnothing$, und weil $I_-(x)$ offen ist gilt sogar $I_-(x) \cap \overline{D_-(A)} = \varnothing$. Wegen $H_-(A) \subset \overline{D_-(A)}$ gilt auch $I_-(x) \cap H_-(A) = \varnothing$ und es folgt $I_-(H_-(A)) \cap H_-(A) = \varnothing$, was zur Achronalität von $H_-(A)$ äquivalent ist.

Ad *ii)*: Wegen $A \subset D_-(A) \subset \overline{D_-(A)}$ und $A\cap \mathring{D}_-(A) = \varnothing$ (ist $x \in A\cap \mathring{D}_-(A)$, so finde $y \in D_-(A) \cap I_+^M(x)$, insbesondere $x \in I_-^M(y) \subset I_-^M(A \cup I_-(A)) = I_-^M(A)$, Widerspruch zu A achronal) gilt $A \subset \partial D_-(A)$. Andererseits ist $H_-(A) \subset \overline{D_-(A)}$ und es gilt $H_-(A)\cap \mathring{D}_-(A) = \varnothing$, denn: gibt es ein $x \in H_-(A)\cap \mathring{D}_-(A)$, so liegt wegen $A\cap \mathring{D}_-(A) = \varnothing$ der Punkt $x \in \overline{D_-(A)} \setminus A$ und in $D(A)$, insbesondere in $D(A) \setminus A = (D_+(A) \setminus A) \dot{\cup} (D_-(A) \setminus A)$. Da aber $x \in D_+(A) \setminus A$ unmöglich ist (sonst $x \in I_+(A)$, aber $I_+(A) \cap \overline{D_-(A)} = \varnothing$), muss x in $D_-(A) \setminus A$ liegen. Da $x \in \mathring{D}_-(A)$ existiert ein $y \in I_-^M(x) \cap D(A)$, und wegen $y \in I_-^M(x)$ und $x \in D_-(A)$ muss sogar $y \in D_-(A)$ liegen, insbesondere ist der Durchschnitt $I_-^M(x) \cap D_-(A)$ nichtleer, Widerspruch zu $x \in H_-(A)$. Dies zeigt $H_-(A) \subset \partial D_-(A)$. Sei jetzt A abgeschlossen und $x \in \partial D_-(A)$. Angenommen, $x \notin A$. Zu zeigen ist $I_-^M(x) \cap D_-(A) = \varnothing$. Bemerke erstens, dass wegen A abgeschlossen und Lemma 3.27 der Punkt $x \in I_-^M(A)$ gilt. Würde nun $I_-^M(x) \cap D_-(A)$ einen Punkt y enthalten, so wäre der Punkt $x \in I_+^M(y) \cap I_-^M(A)$ und nach der Behauptung 1 im Beweis von Proposition 3.24 gilt $I_+^M(y) \cap I_-^M(A) \subset D_-(A)$ (der Punkt $y \in D_-(A)$) und daher $I_+^M(y) \cap I_-^M(A) \subset \mathring{D}_-(A)$ (die Relation $\ll$ ist offen), insbesondere $x \in \mathring{D}_-(A)$, Widerspruch zu $x \in \partial D_-(A)$. Somit gilt $I_-^M(x) \cap D_-(A) = \varnothing$, was $x \in \overline{D_-(A)} \setminus I_+(D_-(A)) = H_-(A)$ und die Behauptung liefert. $\square$

Proposition 3.35 *Sei A eine abgeschlossene akausale topologische Hyperfläche in einer Raumzeit (M^n, g). Dann gilt:*

i) $H_\pm(A) = I_\pm(A) \cap \partial D_\pm(A) = \overline{D_\pm(A)} \setminus D_\pm(A)$.

ii) $H_\pm(A) \cap A = \varnothing$.

iii) *$H_\pm(A)$ ist eine abgeschlossene achronale topologische Hyperfläche von M^n.*

iv) *In jedem Punkt von $H_-(A)$ startet eine zukunftsnichterweiterbare lichtartige Geodätische ohne konjugierte Punkte, die ganz in $H_-(A)$ verläuft.*

Beweis: Wir zeigen die Aussagen für $H_-(A)$.
Ad *i)*: Per Definition ist $H_-(A) \subset \overline{D_-(A)}$ und nach Lemma 3.27 (anwendbar wegen A abgeschlossen) gilt $\overline{D_-(A)} \subset A \cup I_-(A)$. Würde der Durchschnitt $H_-(A) \cap D_-(A)$ einen Punkt x enthalten, so gäbe es wegen $D(A)$ offen (Proposition 3.25) einen Punkt $y \in I_-^M(x) \cap D(A)$ und somit würde y in $I_-^M(x) \cap D_-(A)$ liegen, insbesondere wäre $x \in I_+(D_-(A))$, Widerspruch zu $x \in H_-(A)$. Es folgt $H_-(A) \subset \overline{D_-(A)} \setminus D_-(A)$. Nach Lemma 3.34 gilt $I_-(A) \cap \partial D_-(A) = I_-(A) \cap (A \cup H_-(A)) = I_-(A) \cap H_-(A)$. Da aber $H_-(A) \subset \overline{D_-(A)} \subset A \cup I_-(A)$ (nach Lemma 3.27) und $H_-(A) \subset D_-(A)^c \subset A^c$ gilt $H_-(A) \subset I_-(A)$ und somit $I_-(A) \cap \partial D_-(A) = H_-(A)$. Andererseits gilt $\overline{D_-(A)} \setminus D_-(A) \subset \partial D_-(A) \setminus A$ und Lemma 3.34 liefert $\partial D_-(A) \setminus A \subset H_-(A)$, was schließlich $H_-(A) = \overline{D_-(A)} \setminus D_-(A)$ beweist.
Ad *ii)*: Nach *i)* gilt $H_-(A) \subset I_-(A)$, insbesondere $H_-(A) \cap A = \varnothing$ wegen A achronal.
Ad *iii)*: Setze $B := D_-(A) \cup I_+(A)$. Dann ist B eine Zukunftsmenge: ist $x \in D_-(A)$ und $y \in I_+(x)$, so definiere eine zukunftsnichterweiterbare zeitartige Kurve $c : [0, \infty[\to M^n$ mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$. Wegen $x \in D_-(A)$ trifft diese Kurve die Teilmenge A in einem $c(t_0)$ für ein eindeutiges $t_0 \in [0, \infty[$. Gilt $t_0 \geq 1$, so ist $y \in I_+(x) \cap J_-(c(t_0)) \subset D_-(A)$ nach der Behauptung 1 im Beweis von Proposition 3.24. Gilt $t_0 \in [0, 1[$, so ist $y \in I_+(A)$. In beiden Fällen gilt $y \in B$. Aus einer Proposition im Abschnitt 3.1.1 folgt, dass ∂B eine abgeschlossene achronale topologische Hyperfläche von M^n ist. Nun beweisen wir $\partial B \cap I_-(A) = H_-(A)$ (damit ist $H_-(A)$ selber achronale topologische Hyperfläche von M^n und per Definition abgeschlossen).

Behauptung: *Es gilt $\overset{\circ}{B} = I_+(D_-(A))$.*

Beweis der Behauptung: Sei $x \in \overset{\circ}{B}$. Ist $x \in I_+(A)$, so ist wegen $A \subset D_-(A)$ der Punkt $x \in I_+(D_-(A))$. Liegt $x \in D_-(A)$, so wähle eine offene Umgebung V von x in M^n, die in B enthalten ist. Dann enthält $I_-(x) \cap B$ einen Punkt y, und wegen $x \in D_-(A)$ liegt $y \in I_-(A)$, insbesondere $y \in D_-(A)$ und daher $x \in I_+(D_-(A))$. Dies beweist $\overset{\circ}{B} \subset I_+(D_-(A))$. Sei umgekehrt $y \in I_+(D_-(A))$. Dann existiert ein $x \in D_-(A)$ und eine zukunftsnichterweiterbare zeitartige Kurve $c : [0, \infty[\to M^n$ mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$. Wegen $x \in D_-(A)$ schneidet c die Teilmenge A in genau einem Punkt $c(t_0)$ mit $t_0 \geq 0$. Gilt $t_0 < 1$, so ist $y \in I_+(A)$ und wegen $I_+(A)$ offen liegt $y \in \overset{\circ}{B}$. Gilt $t_0 > 1$, so ist $y \in I_+(x) \cap I_-(A)$ und nach der Behauptung 1 im Beweis von Proposition 3.24 liegt $y \in \overset{\circ}{D_-}(A) \subset \overset{\circ}{B}$. Gilt $t_0 = 1$, so ist nach der Behauptung B im Beweis von Proposition 3.25 der Punkt $y \in A \subset \overset{\circ}{D}(A)$. Nach Proposition 3.25 ist $\overset{\circ}{D}(A) = D(A)$ und $D(A) = D_-(A) \cup D_+(A) \subset D_-(A) \cup (A \cup I_+(A)) = D_-(A) \cup I_+(A) = B$, insbesondere $y \in \overset{\circ}{B}$. Dies beweist $I_+(D_-(A)) \subset \overset{\circ}{B}$ und die Behauptung. $\checkmark$
Wegen A achronal gilt $\overline{I_+(A)} \cap I_-(A) = \varnothing$. Mit der letzten Behauptung folgt

$$\begin{aligned} \partial B \cap I_-(A) &= (\overline{B} \setminus \overset{\circ}{B}) \cap I_-(A) \\ &\overset{\text{Beh.}}{=} \Big\{ (\overline{D_-(A)} \cup \overline{I_+(A)}) \setminus I_+(D_-(A) \Big\} \cap I_-(A) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big\{(\overline{D_-(A)} \setminus I_+(D_-(A))) \cup (\overline{I_+(A)} \setminus I_+(D_-(A)))\Big\} \cap I_-(A) \\
&= \{\overline{D_-(A)} \setminus I_+(D_-(A))\} \cap I_-(A) \\
&= H_-(A) \cap I_-(A) \\
&\overset{i)}{=} H_-(A),
\end{aligned}
$$

was zu beweisen war.
Ad *iv*): Sei $x \in H_-(A)$. Wegen $x \notin D_-(A)$ existiert eine zukunftsnichterweiterbare kausale Kurve $c : [0, \infty[\to M^n$ mit $c(0) = x$ und $c([0, \infty[) \cap A = \varnothing$. Wegen $x \in \overline{D_-(A)}$ und Lemma 3.27 muss jede von x ausgehende zukunftsnichterweiterbare zeitartige Kurve A treffen. Aus Lemma 3.2 (anwendbar wegen A abgeschlossen) folgt, dass c eine lichtartige Prägeodätische ohne konjugierte Punkte ist. Würde nun $c(s) \notin H_-(A)$ für ein $s > 0$ gelten, so würde der Punkt $c(s)$ in $D_-(A)$ oder in $(\overline{D_-(A)})^c$ liegen. Im ersten Fall müsste $c_{|[s,\infty[}$ die Teilmenge A treffen, Widerspruch. Im zweiten Fall würde mindestens eine von $c(s)$ ausgehende zukunftsnichterweiterbare zeitartige Kurve γ die Teilmenge A nicht schneiden; die zusammengesetzte Kurve $c_{|[0,s[} \cup \gamma$ wäre eine A vermeidende zukunftsnichterweiterbare kausale Kurve und wäre nicht überall lichtartig; wiederum aus Lemma 3.2 würde die Existenz einer von x ausgehenden zukunftsnichterweiterbaren zeitartigen Kurve folgern, die A nicht treffen würde, Widerspruch zu $x \in \overline{D_-(A)}$ nach Lemma 3.27. Daraus folgt $c([0, \infty[) \subset H_-(A)$. $\square$

Korollar 3.36 *Sei A eine nichtleere abgeschlossene akausale topologische Hyperfläche in einer zusammenhängenden Raumzeit (M^n, g). Dann gilt:*

1. *Die Teilmenge A ist genau dann eine Cauchy-Hyperfläche von (M^n, g), wenn $H(A) = \varnothing$ gilt.*

2. *Trifft jede nichterweiterbare lichtartige Geodätische die Teilmenge A, so ist A eine Cauchy-Hyperfläche von (M^n, g).*

Beweis: Bemerke, dass $A = \overline{D_-(A)} \cap D_+(A)$ gilt: die Inklusion "$\subset$" ist trivial, ist umgekehrt $x \in \overline{D_-(A)} \cap D_+(A)$, so muss nach Lemma 3.27 der Punkt $x \in A \cup I_-(A)$ liegen, und wegen $I_-(A) \cap A = \varnothing$ muss x tatsächlich in A liegen. Analog ist $A = \overline{D_+(A)} \cap D_-(A)$. Inbesondere ist

$$
\begin{aligned}
\overline{D}_\pm(A) \setminus D(A) &= (\overline{D}_\pm(A) \setminus D_\pm(A)) \cap (\overline{D}_\pm(A) \setminus D_\mp(A)) \\
&= (\overline{D}_\pm(A) \setminus D_\pm(A)) \cap (\overline{D}_\pm(A) \setminus A) \\
&= \overline{D}_\pm(A) \setminus D_\pm(A)
\end{aligned}
$$

und es folgt mit Proposition 3.35 und wegen $D(A)$ offen (Proposition 3.25):

$$
\begin{aligned}
\partial D(A) &= \overline{D(A)} \setminus D(A) \\
&= (\overline{D_+(A)} \cup \overline{D_-(A)}) \setminus D(A) \\
&= (\overline{D_+(A)} \setminus D(A)) \cup (\overline{D_-(A)} \setminus D(A)) \\
&= (\overline{D_+(A)} \setminus D_+(A)) \cup (\overline{D_-(A)} \setminus D_-(A)) \\
&= H_+(A) \cup H_-(A) \\
&= H(A).
\end{aligned}
$$

Wegen A nichtleer ist $D(A)$ offen und nichtleer und wegen M^n zusammenhängend gilt

$$H(A) = \varnothing \iff \partial D(A) = \varnothing \iff D(A) = M^n.$$

Offenbar ist $D(A) = M^n$ dazu äquivalent, dass A eine Cauchy-Hyperfläche von M^n ist. Dies zeigt 1. Sei A keine Cauchy-Hyperfläche von (M^n, g), dann ist nach 1 $H(A) \neq \varnothing$, o.B.d.A. existiere $x \in H_-(A)$. Nach Proposition 3.35 existiert eine zukunftsnichterweiterbare lichtartige Geodätische c ohne konjugierte Punkte, die von x startet und ganz in $H_-(A)$ verläuft. Wiederum nach Proposition 3.35 trifft c die Teilmenge A nicht ($H_-(A) \cap A = \varnothing$). Erweitere c zu einer nichterweiterbaren lichtartigen Geodätischen $\overline{c} :]a, \infty[\to M^n$ mit $a < 0$. Die Kurve $\overline{c}$ trifft wegen A akausal und $\overline{c}(t) < \overline{c}(0) = x$ für alle $t \in]a, 0[$ die Teilmenge A auch nicht (sonst würde $x \in J_+(A) \setminus A$ im Widerspruch zu $x \in H_-(A) \subset \overline{D_-(A)} \subset A \cup I_-(A)$ stehen). $\square$

Kapitel 4

Singularitätensätze

4.1 Der Hawking'sche Singularitätensatz

Satz 4.1 (S. Hawking [7]) *Sei M^n eine n-dimensionale zusammenhängende Raumzeit mit (glatter) raumartiger Cauchy-Hyperfläche Σ. Es gelte*

- $\mathrm{ric}(X, X) \geq 0$ *für alle zeitartige $X \in TM$ und*
- *$g(H, \nu) \geq \beta$ auf Σ für eine positive Konstante β, wobei $H := \frac{1}{n-1}\mathrm{tr}_g(II)$ das mittlere Krümmungsfeld von Σ in M^n und ν das zukunftsgerichtete Einheitsnormalenfeld auf Σ bezeichnen.*

Dann hat jede in Σ startende zukunftsgerichtete kausale Kurve Länge höchstens $\frac{1}{\beta}$.

Beweis: Wir geben den Beweis von [1, Abschn. 2.8] an. Sei $c : [0, b] \to M^n$ eine zukunftsgerichtete kausale Kurve in M^n mit $c(0) \in \Sigma$, $b > 0$ und setze $x := c(b)$. Da Σ eine akausale Cauchy-Hyperfläche ist, gilt $D_+(\Sigma) = \Sigma \cup I_+(\Sigma) = J_+(\Sigma)$, insbesondere ist $x \in J_+(\Sigma) \setminus \Sigma = I_+(\Sigma) = D_+(\Sigma) \setminus \Sigma$. Nach Proposition 3.31 (anwendbar wegen Σ abgeschlossen, achronal und raumartig) gibt es eine auf Σ senkrecht stehende Geodätische von Σ nach x der Länge $\tau(\Sigma, x)$, insbesondere maximaler Länge unter den zukunftsgerichteten kausalen Kurven von Σ nach x. Daher reicht es, die Aussage für eine solche Geodätische - die wir zeitartig annehmen können und auch mit c bezeichnen - zu beweisen. O.B.d.A. gelte $g(\dot{c}, \dot{c}) = -1$ auf $[0, b]$, insbesondere $\dot{c}(0) = \nu_{c(0)}$. Wähle einen beliebigen Einheitsvektor $X \in T_{c(0)}\Sigma$ und bezeichne mit $\tilde{X}$ das entlang c parallele Vektorfeld s.d. $\tilde{X}(0) = X$. Setze $V := (1 - \frac{t}{b})\tilde{X} \in \Gamma(c^*TM)$ und wähle ein beliebiges Vektorfeld A längs c mit $A(b) = 0$. Betrachte eine glatte Variation c_s von c durch zeitartige Kurven mit Variationsfeld V, Beschleunigungsfeld A und mit $c_s(0) \in \Sigma$, $c_s(b) = x$. Da $c_0 = c$ maximale Länge hat, gilt nach Proposition 2.1

$$\begin{aligned}
0 \quad &\geq \quad \frac{d^2}{ds^2} L[c_s]_{|s=0} \\
&= \quad g(A(0), \dot{c}(0)) - g(A(b), \dot{c}(b)) - \int_0^b \Big(g(R_{V,\dot{c}}V, \dot{c}) + g(\frac{\nabla V}{dt}, \frac{\nabla V}{dt}) + g(\frac{\nabla V}{dt}, \dot{c})^2 \Big) dt \\
&= \quad g((\frac{\nabla^M}{\partial s}\frac{\partial c_s}{\partial s})(0), \dot{c}(0)) - \int_0^b \Big((1 - \frac{t}{b})^2 g(R_{\tilde{X},\dot{c}}\tilde{X}, \dot{c}) + \frac{1}{b^2} \Big) dt \\
&\overset{(\dot{c}(0) \perp T_{c(0)}\Sigma)}{=} \quad g(II(\frac{\partial c_s}{\partial s}(0), \frac{\partial c_s}{\partial s}(0)), \dot{c}(0)) - \int_0^b (1 - \frac{t}{b})^2 g(R_{\tilde{X},\dot{c}}\tilde{X}, \dot{c}) dt - \frac{1}{b}
\end{aligned}$$

$$= \qquad g(II(X,X),\dot{c}(0)) - \int_0^b (1-\frac{t}{b})^2 g(R_{\tilde{X},\dot{c}}\tilde{X},\dot{c})dt - \frac{1}{b}.$$

Nun wähle eine Orthonormalbasis $\{e_1, \ldots, e_{n-1})$ von $T_{c(0)}\Sigma$, ersetze X durch e_i für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, und summiere über i. Da $\{\dot{c}(t), \tilde{e_1}(t), \ldots, \widetilde{e_{n-1}}(t)\}$ eine Lorentz-Orthonormalbasis von $T_{c(t)}M$ ist, bekommen wir mit den Voraussetzungen

$$\begin{aligned} 0 &\geq \sum_{i=1}^{n-1} g(II(e_i,e_i),\dot{c}(0)) - \int_0^b (1-\frac{t}{b})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} g(R_{\tilde{e_i},\dot{c}}\tilde{e_i},\dot{c})dt - \frac{n-1}{b} \\ &= (n-1)g_{c(0)}(H,\nu) + \int_0^b (1-\frac{t}{b})^2 \cdot \mathrm{ric}(\dot{c}(t),\dot{c}(t))dt - \frac{n-1}{b} \\ &\geq (n-1)(\beta - \frac{1}{b}), \end{aligned}$$

somit $b \leq \frac{1}{\beta}$, was zu beweisen war. □

Bemerkungen 4.2

1. Der Singularitätensatz 4.1 kann folgendermaßen physikalisch interpretiert werden. Betrachtet man die Einstein-Gleichung (ohne kosmologische Konstante) $8\pi T = \mathrm{Ric} - \frac{S}{2}\mathrm{Id}$, so ist die Bedingung $\mathrm{ric}(X,X) \geq 0$ zu $g(T(X),X) \geq \frac{\mathrm{tr}_g(T)}{n-2} g(X,X)$ äquivalent, für alle zeitartige $X \in TM$ (*Übungsaufgabe*). Die letzte Ungleichung ist die sogenannte *starke Energiebedingung*. Die andere Bedingung $g(H,\nu) \geq \beta$ hat mit der Geschwindigkeit zu tun, mit welcher sich die Cauchy-Hyperfläche mit der Zeit "zusammenzieht".

2. Die obere Schranke für die Länge im Satz 4.1 ist optimal wie es folgendes Beispiel zeigt. Betrachte $\Sigma := -\mathbb{H}^{n-1}$ in $(M^n, g) := (I_-(0), \langle\langle\cdot\,,\cdot\rangle\rangle)$ (zur Erinnerung ist $I_-(0) := \{X \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle\langle X,X\rangle\rangle < 0 \text{ und } X_0 < 0\}$). Wie schon gesehen ist Σ eine raumartige Cauchy-Hyperfläche der Ricci-flachen Raumzeit (M^n, g) und hat $\nu_x = -x$ bzw. $H = -\nu$ als zukunftsgerichtetes Einheitsnormalenfeld bzw. mittleres Krümmungsfeld, insbesondere ist $g(H,\nu) = 1$ auf Σ. Und tatsächlich haben die in Σ startenden zukunftsgerichteten zeitartigen Geodätischen Länge höchstens 1 wegen $\tau(x,0) = 1$ für alle $x \in \Sigma$.
   Wird andererseits eine der Voraussetzungen abgeschwächt, so wird das Ergebnis falsch. Wählt man z.B. $(M^n, g) := (\mathbb{R}^n, \langle\langle\cdot\,,\cdot\rangle\rangle)$ und $\Sigma := -\mathbb{H}^{n-1}$, so gibt es in Σ startende zukunftsgerichtete zeitartige Kurven unendlicher Länge (in diesem Fall ist nämlich Σ keine Cauchy-Hyperfläche von (M^n, g)).

4.2 Der Penrose'sche Singularitätensatz

Siehe z.B. [1, Abschn. 2.9] bzw. [12, Ch. 14].

Übungsblätter

1. Übungsblatt

Abgabe am 26.04.2010 in der Vorlesung

1. Aufgabe
Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ nichtverschwindende raumartige oder lichtartige Vektoren. Zeigen Sie: die Gleichheit $\langle\langle x, x\rangle\rangle = \langle\langle y, y\rangle\rangle$ gilt genau dann, wenn eine Lorentz-Transformation Φ existiert mit $y = \Phi(x)$.

2. Aufgabe
Geben Sie einen alternativen Beweis der inversen Cauchy-Schwarz-Ungleichung mit Hilfe von Lorentz-Transformationen an.

3. Aufgabe
Es seien $\mathbb{H}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle\langle x, x\rangle\rangle = -1 \text{ und } x_0 > 0\}$ der $n-1$-dimensionale hyperbolische Raum und $\Phi \in \mathcal{L}^{\uparrow}(n)$ eine zeitorientierungserhaltende Lorentz-Transformation.

1. Zeigen Sie, dass $\Phi(\mathbb{H}^{n-1}) = \mathbb{H}^{n-1}$ gilt.
2. Zeigen Sie, dass $\Phi_{|_{\mathbb{H}^{n-1}}}$ eine Isometrie des hyperbolischen Raumes ist.

2. Übungsblatt

Abgabe am 3.05.2010 in der Vorlesung

4. Aufgabe
Es bezeichnen $\mathbb{H}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle\langle x, x\rangle\rangle = -1 \text{ und } x_0 > 0\}$ der $n-1$-dimensionale hyperbolische Raum und $\mathcal{L}^{\uparrow}(n)$ die Gruppe der zeitorientierungserhaltenden Lorentz-Transformationen.

1. Seien $p, q \in \mathbb{H}^{n-1}$ und $B : T_p\mathbb{H}^{n-1} \longrightarrow T_q\mathbb{H}^{n-1}$ eine lineare Abbildung mit $\langle\langle BX, BY\rangle\rangle = \langle\langle X, Y\rangle\rangle$ für alle $X, Y \in T_p\mathbb{H}^{n-1}$. Zeigen Sie: es existiert ein $A \in \mathcal{L}^{\uparrow}(n)$ mit $Ap = q$ und $A_{|_{T_p\mathbb{H}^{n-1}}} = B$ (man identifiziere $T_p\mathbb{H}^{n-1}$ mit $p^{\perp} = \{z \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle\langle p, z\rangle\rangle = 0\}$).

2. Leiten Sie daraus her, dass die Isometriegruppe der riemannschen Mannigfaltigkeit $(\mathbb{H}^{n-1}, \langle\langle \cdot\,, \cdot\rangle\rangle)$ isomorph zu $\mathcal{L}^{\uparrow}(n)$ ist.
   (Hinweis: 3. Aufgabe aus Blatt 1)

5. Aufgabe
Man versehe $Z := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ mit der Metrik $g := -\mathrm{can}_{\mathbb{S}^1} \oplus dt^2$, wobei $\mathrm{can}_{\mathbb{S}^1}$ die kanonische Metrik von $\mathbb{S}^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ und dt^2 die kanonische Metrik von $\mathbb{R}$ bezeichnen.

1. Zeigen Sie, dass (Z, g) eine zweidimensionale flache Lorentz-Mannigfaltigkeit ist und bestimmen Sie ihre Geodätischen.

2. Skizzieren Sie $\{X \in T_xZ \,|\, g_x(X, X) < 0\}$ für einen beliebigen Punkt $x \in Z$.

3. Zeigen Sie mit Hilfe einer Skizze: für je zwei Punkte $x, y \in Z$ existiert eine Geodätische c von x nach y mit $g(\dot{c}, \dot{c}) < 0$.

6. Aufgabe
Man versehe nun Z mit der Metrik $g' := \mathrm{can}_{\mathbb{S}^1} \oplus -dt^2$. Können je zwei Punkte aus Z immer noch durch eine Geodätische c mit $g(\dot{c}, \dot{c}) < 0$ verbunden werden? Erläutern Sie mit Hilfe von Skizzen.

7. Aufgabe
Zeigen Sie, dass es keine nichtleere kompakte semi-riemannsche Hyperfläche von $(\mathbb{R}^n, \langle\langle \cdot\,, \cdot\rangle\rangle)$ gibt.
(Hinweis: Zeigen Sie, dass für eine kompakte Hyperfläche M von $\mathbb{R}^n$ jede Hyperebene H in $\mathbb{R}^n$ als Tangentialraum von M auftritt, in dem Sie die Funktion $\theta_{|_M}$ betrachten, wobei $\theta \in (\mathbb{R}^n)^*$ so gewählt wird, dass $\mathrm{Ker}(\theta) = H$ *gilt.)*

3. Übungsblatt

Abgabe am 10.05.2010 in der Vorlesung

8. Aufgabe
Zeigen Sie, dass die Matrix
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$
eine fixpunktfreie Isometrie der hyperbolischen Ebene $(\mathbb{H}^2, \langle\langle\cdot\,,\cdot\rangle\rangle)$ definiert.

9. Aufgabe
Auf $\widetilde{M} := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ betrachte man die Gruppenwirkung $\mathbb{Z} \times \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$, $(k, x) \mapsto 2^k x$. Man akzeptiere ohne Beweis, dass der Quotient $M := {}_{\mathbb{Z}}\backslash^{\widetilde{M}}$ eine zum 2-dimensionalen Torus diffeomorphe glatte Mannigfaltigkeit ist.

1. Zeigen Sie, dass $\tilde{g}_x := \frac{1}{x_1^2+x_2^2}(dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1)$ (mit $x = (x_1, x_2) \in \widetilde{M}$) eine Lorentz-Metrik auf $\widetilde{M}$ definiert, die unter der obigen $\mathbb{Z}$-Wirkung invariant ist. Die dadurch induzierte Lorentz-Metrik auf M wird mit g bezeichnet.

2. Zeigen Sie, dass in den kanonischen Koordinaten die Geodätengleichungen von $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ durch $\ddot{c}_1 = \frac{2c_1\dot{c}_1^2}{c_1^2+c_2^2}$ und $\ddot{c}_2 = \frac{2c_2\dot{c}_2^2}{c_1^2+c_2^2}$ gegeben sind, für $c = (c_1, c_2)$.

3. Zeigen Sie, dass $t \mapsto (\tan(t), 1)$ und $t \mapsto (0, \frac{1}{1+t})$ Geodätische von $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ sind. Leiten Sie daraus her, dass jede nichtkonstante Geodätische c von $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ oder (M, g) mit $g(\dot{c}, \dot{c}) = 0$ unvollständig ist.

4. Gibt es zu je zwei Punkten $x, y \in M$ eine Geodätische, die x und y verbindet? Begründen.

10. Aufgabe
Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass die n-dimensionale de Sitter-Raumzeit isometrisch zu $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}, -dt^2 \oplus \cosh(t)^2 \mathrm{can})$ ist, wobei $(\mathbb{S}^{n-1}, \mathrm{can})$ die $n-1$-dimensionale Sphäre mit der Standardmetrik konstanter Schnittkrümmung 1 ist.

4. Übungsblatt

Abgabe am 17.05.2010 in der Vorlesung

11. Aufgabe
Sei $c : J \longrightarrow M$ eine glatte parametrisierte Kurve auf einer semi-riemannschen Mannigfaltigkeit (M^n, g) und $\varphi : \tilde{J} \longrightarrow J$ eine glatte Parametertransformation. Es bezeichne $\frac{\nabla}{dt}$ bzw. $\frac{\nabla}{ds}$ der induzierte Zusammenhang auf Vektorfeldern längs c bzw. $c \circ \varphi$.

1. Zeigen Sie, dass für alle glatten Vektorfelder X längs c gilt, für alle $s \in \tilde{J}$:
$$\frac{\nabla(X \circ \varphi)}{ds}(s) = \varphi'(s) \cdot \frac{\nabla X}{dt}(\varphi(s)).$$

2. Eine *Prägeodätische* einer semi-riemannschen Mannigfaltigkeit (M^n, g) ist eine glatte parametrisierte Kurve $c : J \longrightarrow M$, für die es ein $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ gibt mit
$$\frac{\nabla \dot{c}}{dt}(t) = f(t) \cdot \dot{c}(t)$$
für alle $t \in J$. Zeigen Sie: c ist genau dann Prägeodätische von (M^n, g), wenn eine Umparametrisierung von c existiert, die eine Geodätische von (M^n, g) ist.

3. Ist eine Prägeodätische c mit $g(\dot{c}, \dot{c})$ konstant auf J immer eine Geodätische? Begründen Sie Ihre Antwort.

12. Aufgabe
Für eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit (B, g_B), eine riemannsche Mannigfaltigkeit (F, g_F) und eine glatte Funktion $f : B \longrightarrow]0, \infty[$ betrachte man die semi-riemannsche Mannigfaltigkeit $(M, g) := (B \times F, g_B \oplus f(b)^2 g_F)$.

1. Für glatte Diffeomorphismen ϕ von B und ψ von F sei $\phi \times \psi : M \to M$, $(b, f) \mapsto (\phi(b), \psi(f))$. Zeigen Sie, dass $\phi \times \psi$ genau dann eine Isometrie von (M^n, g) ist, wenn ϕ eine Isometrie von (B, g_B) ist und ein $\lambda \in]0, \infty[$ so existiert, dass $f \circ \phi = \lambda f$ und $\psi^* g_F = \frac{1}{\lambda^2} g_F$ gelten.

2. Zeigen Sie, dass im Fall F kompakt $\lambda = 1$ gelten muss. Muss dies auch im Fall F nichtkompakt gelten? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Geben Sie ein Beispiel an, wo für jede Isometrie von (M, g) der Form $\phi \times \psi$ die erste Komponente $\phi = \mathrm{Id}_B$ erfüllen muss.

13. Aufgabe
Sei $(M^n, g) = (I \times \Sigma^{n-1}, -dt^2 \oplus f(t)^2 g_\Sigma)$ eine Robertson-Walker Raumzeit.

1. Zeigen Sie, dass keine kausale Geodätische von (M^n, g) geschlossen sein kann.

2. Zeigen Sie: ist $I \neq \mathbb{R}$, so ist keine zeitartige Geodätische von (M^n, g) vollständig.

3. Ist $(\mathrm{AdS}^n, g_{(2,n-2)})$ isometrisch zu einer Robertson-Walker Raumzeit? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Zeigen Sie: ist (Σ^{n-1}, g_Σ) vollständig, $I =]-1,1[$ und $f(t) = \frac{1}{1-t^2}$, so ist keine zeitartige Geodätische von (M^n, g) vollständig, dennoch ist jede lichtartige Geodätische von (M^n, g) vollständig.
   (Hinweis: die Umkehrabbildung φ von $x \mapsto \tanh(x) - \frac{\tanh(x)^3}{3}$ löst $\varphi'(u) = \cosh(\varphi(u))^4$.)

5. Übungsblatt

Abgabe am 31.05.2010 in der Vorlesung

14. Aufgabe
Es bezeichne f die Umkehrfunktion des Diffeomorphismus $]0,\infty[\to]-\frac{2m}{e},\infty[$, $r\mapsto(r-2m)e^{\frac{r}{2m}-1}$, wobei $m\in]0,\infty[$ eine Konstante ist.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\begin{aligned}\Phi:\{(u,v)\in\mathbb{R}^\times\times]0,\infty[\,|\,uv>-\frac{2m}{e}\} &\longrightarrow \mathbb{R}\times(]0,2m[\cup]2m,\infty[)\\ (u,v) &\longmapsto (2m\ln(|\frac{v}{u}|),f(uv))\end{aligned}$$
ein Diffeomorphismus ist.

2. Zeigen Sie, dass für die Schwarzschild-Metrik g auf $\mathbb{R}\times(]0,2m[\cup]2m,\infty[)$
$$\Phi^*g=\frac{8m^2e^{1-\frac{f(uv)}{2m}}}{f(uv)}(du\otimes dv+dv\otimes du)$$
gilt.

3. Leiten Sie daraus her, dass es Koordinaten der Schwarzschild-Halbebene gibt, in denen die Metrik glatt über die singuläre Menge $\{r=2m\}$ hinaus fortgesetzt werden kann.

15. Aufgabe
Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit.

1. Zeigen Sie: es gibt genau dann eine zeitorientierbare Lorentz-Metrik auf M^n, wenn ein glattes nirgendsverschwindendes Vektorfeld auf M^n existiert.

2. Zeigen Sie: es gibt genau dann eine Lorentz-Metrik auf M^n, wenn ein glattes reelles Untervektorbündel vom Rang 1 von TM existiert.
(Hinweis: konstruieren Sie ein glattes Vektorfeld $\tilde{Y}$ auf der Zeitorientierungsüberlagerung von M^n mit $(-1)_*\tilde{Y}=-\tilde{Y}$.)

16. Aufgabe
Zeigen Sie: ist (M^2,g) zusammenhängende geschlossene Lorentz-Fläche, so ist M^2 diffeomorph entweder zum 2-dimensionalen Torus oder zur Klein'schen Flasche.

17. Aufgabe
Man betrachte die Minkowski-Raumzeit $(\mathbb{R}^n,\langle\langle\cdot\,,\cdot\rangle\rangle)$ mit der kanonischen Zeitorientierung. Sei $x\in\mathbb{R}^n$ ein Punkt.

1. Zeigen Sie, dass die chronologische Zukunft von x mit $x + \mathcal{I}_+(0)$ übereinstimmt, wobei $\mathcal{I}_+(0) := \{X \in \mathbb{R}^n \mid \langle\langle X, X\rangle\rangle < 0 \text{ und } X_0 > 0\}$.
2. Zeigen Sie, dass die kausale Zukunft von x mit $x + \mathcal{J}_+(0)$ übereinstimmt, wobei $\mathcal{J}_+(0) := \{X \in \mathbb{R}^n \mid \langle\langle X, X\rangle\rangle \leq 0 \text{ und } X_0 \geq 0\}$.

18. Aufgabe

Man betrachte die Minkowski-Raumzeit $(\mathbb{R}^n, \langle\langle \cdot\,, \cdot\rangle\rangle)$ mit der kanonischen Zeitorientierung. Zeigen Sie, dass für je zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ die Teilmenge $J_+(x) \cap J_-(y)$ kompakt ist.

19. Aufgabe

1. Geben Sie ein Beispiel von Raumzeit (M^n, g) und von Teilmenge A von M an mit:
   (i) $J_+(A)$ ist offen in M^n.
   (ii) $J_+(A)$ ist nicht offen in M^n, dennoch gilt $J_+(A) \neq \overline{I_+(A)}$.
2. Zeigen Sie: sind alle $J_\pm(x)$ abgeschlossen in einer Raumzeit (M^n, g), so ist $J_\pm(K)$ abgeschlossen für jede kompakte Teilmenge $K \subset M$.
   (Hinweis: beweisen Sie $J_+(x) = \bigcap\limits_{y \ll x} I_+(y) = \bigcap\limits_{y \ll x} J_+(y)$*.)*

6. Übungsblatt

Abgabe am 7.06.2010 in der Vorlesung

20. Aufgabe
Man betrachte die Minkowski-Raumzeit $(\mathbb{R}^n, \langle\!\langle \cdot\,, \cdot \rangle\!\rangle)$ mit ihrer kanonischen Zeitorientierung. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $y \in x + C_+(0)$. Zeigen Sie: jede zukunftsgerichtete kausale Kurve von x nach y ist der Form $s \mapsto x + f(s)(y - x)$, $[0,1] \to \mathbb{R}^n$ ist, wobei $f : [0,1] \to [0, \infty[$ stückweise glatt mit $f' > 0$, $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ ist.

21. Aufgabe
Zeigen Sie, dass die Minkowski-Raumzeit (mit ihrer kanonischen Zeitorientierung) die starke Kausalitätsbedingung erfüllt.

22. Aufgabe
Sei (M^n, g) eine beliebige Raumzeit, in der $J_+(x) \cap J_-(y)$ kompakt ist für alle $x, y \in M^n$. Zeigen Sie, dass dann $J_\pm(x)$ abgeschlossen ist, für alle $x \in M^n$.

23. Aufgabe
Sei (M^n, g) eine beliebige Raumzeit, $x \in M$ und $K \subset I_+(x)$ mit K kompakt. Zeigen Sie: es existiert eine offene Umgebung U von x in M^n mit $K \subset I_+(y)$ für alle $y \in U$.

7. Übungsblatt

Abgabe am 14.06.2010 in der Vorlesung

24. Aufgabe
Sei c eine stetige und stückweise glatte zukunftsgerichtete zeitartige Kurve von einem Punkt x nach einem Punkt y in einer Raumzeit (M^n, g). Zeigen Sie: gilt $L[c] = \tau(x, y)$, so ist c bis auf Umparametrisierung eine (glatte) zeitartige Geodätische.

25. Aufgabe
Bestimmen Sie die Brennpunkte bzw. Brennstellen folgender semi-riemannscher Untermannigfaltigkeiten N von M entlang normalen Geodätischen. Welche Ordnung haben jeweils diese Brennpunkte?

1. $N := \mathbb{H}^{n-1} \subset M := \mathbb{R}^n$, wobei $g := \langle\!\langle \cdot\,, \cdot \rangle\!\rangle$.
2. $N := \mathrm{dS}^{n-1} \subset M := \mathbb{R}^n$, wobei $g := \langle\!\langle \cdot\,, \cdot \rangle\!\rangle$.
3. $N := \mathrm{AdS}^{n-1} \subset M := \mathbb{R}^n$, wobei $g := g_{(2,n-2)}$.

26. Aufgabe
Sei (M^n, g) eine (nicht unbedingt zeitorientierbare) Lorentz-Mannigfaltigkeit. Bestimmen Sie, in welchen Fällen eine stetige und stückweise glatte kausale Kurve durch zeitartige Kurven mit denselben Endpunkten approximiert werden kann.

27. Aufgabe
Zeigen Sie, dass eine Raumzeit (M^n, g) die starke Kausalitätsbedingung genau dann erfüllt, wenn es für jeden Punkt $x \in M$ und jede Umgebung V von x in M eine Umgebung von x der Form $U := I_+(p) \cap I_-(q)$ mit $U \subset V$ gibt.

8. Übungsblatt

Abgabe am 21.06.2010 in der Vorlesung

28. Aufgabe
Sei g eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$, wobei $n \geq 2$. Zeigen Sie: es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $g = \lambda \cdot \langle\!\langle \cdot\,, \cdot \rangle\!\rangle$ genau dann, wenn $C(0) \subset \{X \in \mathbb{R}^n \,|\, g(X,X) = 0\}$ gilt.

29. Aufgabe
Sei c eine zukunftsgerichtete bzw. vergangenheitsgerichtete kausale Kurve in einer konvexen Teilmenge U einer Lorentz-Mannigfaltigkeit (M^n, g). Zeigen Sie: verläuft c in einem Kompaktum von U, so besitzt c zwei Endpunkte in U, d.h., c kann auf einem kompakten Intervall definiert werden.

30. Aufgabe
Sei $c : [0,b] \longrightarrow M$ eine lichtartige Geodätische in einer Lorentz-Mannigfaltigkeit (M^n, g). Sei J ein Jacobi-Feld längs c mit $J(0) = 0$, $J(b) = 0$ und $J \neq 0$.

1. Zeigen Sie: es gilt $J \perp \dot{c}$ und J ist raumartig auf $[0,b]$.
2. Leiten Sie daraus her, dass für $n = 2$ keine lichtartige Geodätische konjugierte Punkte hat.

31. Aufgabe
Sei $c : [0,b[\longrightarrow M$ eine zukunftsgerichtete bzw. vergangenheitsgerichtete kausale Kurve in einer Raumzeit (M^n, g), welche die starke Kausalitätsbedingung erfüllt. Zeigen Sie: ist c nichterweiterbar an der Stelle b, so ist c eigentlich (d.h., $c^{-1}(K) \subset [0,b[$ ist kompakt für jedes Kompaktum $K \subset M$).

9. Übungsblatt

Abgabe am 28.06.2010 in der Vorlesung

32. Aufgabe
Sei A eine nichtleere achronale Teilmenge einer Raumzeit (M^n, g). Man betrachte einen Punkt $x \in \overline{\text{Kante}(A)}$.

1. Sei U eine beliebige offene Umgebung von x in M. Zeigen Sie: es gibt Punkte $p, q \in U$ mit $x \in V := I_+^U(p) \cap I_-^U(q)$.

2. Sei $x' \in V \cap \text{Kante}(A)$ und $c : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \longrightarrow V$ zukunftsgerichtete zeitartige Kurve von einem Punkt $p' \in I_-^V(x')$ nach einem Punkt $q' \in I_+^V(x')$ mit $c([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) \cap A = \varnothing$. Zeigen Sie: die Kurve c setzt sich zu einer zukunftsgerichteten zeitartigen Kurve $\overline{c} : [-1, 1] \longrightarrow V$ fort mit $\overline{c}(-1) \in I_-^V(x)$ und $\overline{c}(1) \in I_+^V(x)$.

3. Zeigen Sie, dass $\overline{c}$ die Teilmenge A nicht trifft und leiten Sie daraus her, dass $\text{Kante}(A)$ abgeschlossen ist.

33. Aufgabe
Zeigen Sie, dass jede raumartige Hyperebene eine Cauchy-Hyperfläche der Minkowski-Raumzeit $(\mathbb{R}^n, \langle\!\langle \cdot\, , \cdot \rangle\!\rangle)$ ist.

34. Aufgabe
Es bezeichne Σ eine nichtleere Teilmenge einer Raumzeit (M^n, g).

1. Beweisen Sie oder widerlegen Sie: "Ist Σ akausal, so ist Σ in einer raumartigen Hyperfläche von M enthalten."

2. Beweisen Sie oder widerlegen Sie: "Ist Σ in einer raumartigen Hyperfläche von M enthalten, so ist Σ akausal."

3. Zeigen Sie, dass jede glatte raumartige Cauchy-Hyperfläche akausal ist.

10. Übungsblatt

Abgabe am 5.07.2010 in der Vorlesung

35. Aufgabe
Sei (M^n, g) eine globalhyperbolische Raumzeit und $A, B \subset M^n$ beliebige Teilmengen. Zeigen Sie, dass falls nichtleer $(\Omega := I_+(A) \cap I_-(B), g_{|\Omega})$ (mit der von M^n induzierten Zeitorientierung) auch globalhyperbolisch ist.

36. Aufgabe
Sei Σ eine Cauchy-Hyperfläche in einer Raumzeit (M^n, g). Zeigen Sie, dass $J_\pm(x) \cap \Sigma$ kompakt ist für alle $x \in M^n$.
(Hinweis: Grenzkurvenlemma)

37. Aufgabe
Sei (Σ, g_Σ) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $f : I \longrightarrow]0, \infty[$ eine glatte Funktion auf einem offenen Intervall I und $(M, g) := (I \times \Sigma, -dt^2 \oplus f(t)^2 g_\Sigma)$. Zeigen Sie: ist (Σ, g_Σ) vollständig, so ist $\{t_0\} \times \Sigma$ eine Cauchy-Hyperfläche von (M^n, g) für jedes $t_0 \in I$.
(Hinweis: parametrisieren Sie zeitorientierte kausale Kurven in die Form $s \mapsto (s, x(s))$ um und zeigen Sie, dass falls sie nichterweiterbar sind ihr maximaler Definitionsbereich I ist.)

Lorentzgeometrie

11. Übungsblatt

Abgabe am 12.07.2010 in der Vorlesung

38. Aufgabe
Seien K und K' kompakte Teilmengen einer globalhyperbolischen Raumzeit (M^n, g). Zeigen Sie, dass $J_+^M(K) \cap J_-^M(K')$ kompakt ist.

39. Aufgabe
Für eine ganze Zahl $n \geq 2$ bezeichne $(\widetilde{\mathrm{AdS}^n}, g)$ die universelle Überlagerung der n-dimensionalen Anti-de-Sitter Raumzeit mit der von AdS^n induzierten Metrik g.

1. Zeigen Sie, dass $(\widetilde{\mathrm{AdS}^n}, g)$ zu $(\mathbb{R} \times \mathbb{H}^{n-1}, -y_0^2 dt^2 \oplus \langle\langle \cdot\,,\cdot \rangle\rangle)$ isometrisch ist, wobei $(\mathbb{H}^{n-1}, \langle\langle \cdot\,,\cdot \rangle\rangle)$ der $n-1$-dimensionale hyperbolische Raum ist.

2. Konstruieren Sie eine Isometrie zwischen $(\mathbb{R} \times \mathbb{H}^{n-1}, -y_0^2 dt^2 \oplus \langle\langle \cdot\,,\cdot \rangle\rangle)$ und $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}_+^{n-1}, \frac{1}{x_n^2}(-dt^2 \oplus \langle \cdot\,,\cdot \rangle))$, wobei $\mathbb{S}_+^{n-1} := \{x \in \mathbb{S}^{n-1} \,|\, x_n > 0\}$.

3. Zeigen Sie die Existenz von zwei Punkten $p, q \in \widetilde{\mathrm{AdS}^n}$ mit $\tau(p,q) = \infty$ und leiten Sie daraus her, dass $(\widetilde{\mathrm{AdS}^n}, g)$ nicht globalhyperbolisch ist.

40. Aufgabe
Sei (Σ, g_Σ) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $f : I \longrightarrow]0, \infty[$ eine glatte Funktion auf einem offenen Intervall I und $(M, g) := (I \times \Sigma, -dt^2 \oplus f(t)^2 g_\Sigma)$. Zeigen Sie: ist (M^n, g) globalhyperbolisch, so ist (Σ, g_Σ) vollständig.
(Hinweis: fixieren Sie ein $t_0 \in I$ und zeigen Sie die Existenz eines $r \in]0, \infty[$ so, dass alle Teilmengen der Form $\{t_0\} \times B_r(p)$ relativ kompakt sind, indem Sie beweisen, dass sie in Teilmengen der Form $J_+(x) \cap J_-(y)$ für geeignete $x, y \in M^n$ enthalten sind. Hierbei bezeichne $B_r(p)$ der offene r-Ball um ein $p \in \Sigma$ in (Σ, g_Σ).)

12. Übungsblatt

Abgabe am 19.07.2010 in der Vorlesung

41. Aufgabe
Zeigen Sie, dass die Schwarzschild-Halbebene globalhyperbolisch ist.[1]

42. Aufgabe
Sei A eine abgeschlossene achronale Teilmenge einer Raumzeit (M^n, g). Zeigen Sie: der Vergangenheits-Cauchy-Horizont $H_-(A)$ von A in M^n ist genau dann leer, wenn $J_-(A) \subset D_-(A)$ gilt.

43. Aufgabe
Für ein $n \geq 2$ sei (Σ^{n-1}, g_Σ) eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit, $f : I \longrightarrow]0, \infty[$ eine glatte Funktion auf einem offenen Intervall I und $(M^n, g) := (I \times \Sigma^{n-1}, -dt^2 \oplus f(t)^2 g_\Sigma)$. Untersuchen Sie die Schärfe der Aussage des Hawking'schen Singularitätensatzes in (M^n, g).[2]

[1] Die Schwarzschild-Halbebene ist als "nichterweitert" zu verstehen, also $(M^2, g) := (\mathbb{R} \times (]0, 2m[\cup]2m, \infty[), -h(r)dt^2 \oplus \frac{1}{h(r)} dr^2)$ wobei $m \in]0, \infty[$ eine Konstante und $h(r) := 1 - \frac{2m}{r}$ ist. Die Kruskal-Erweiterung von (M^2, g) ist ebenfalls globalhyperbolisch, siehe [12, Ch. 14].

[2] Die Frage sollte eher "Überprüfen Sie die Aussage des Hawking'schen Singularitätensatzes in (M^n, g)" lauten.

Literaturverzeichnis

[1] C. Bär, *Lorentzgeometrie*, Vorlesungsskript, 2006.

[2] C. Bär, N. Ginoux, F. Pfäffle, *Wave equations on Lorentzian manifolds and quantization*, EMS Lectures in Mathematics and Physics, EMS Publishing House, 2007.

[3] J.K. Beem, P.E. Ehrlich, K.L. Easley, *Global Lorentzian geometry*, second edition, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics **202**, New York, 1996.

[4] A. Bernal, M. Sánchez, *Smoothness of time functions and the metric splitting of globally hyperbolic spacetimes*, Comm. Math. Phys. **257** (2005), no. 1, 43–50.

[5] A.L. Besse, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) 10, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[6] T. Bröcker, K. Jänich, *Einführung in die Differentialtopologie*, Heidelberger Taschenbücher **143**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[7] G.F.R. Ellis, S.W. Hawking, *The large scale structure of space-time*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics **1**, Cambridge University Press, London-New York, 1973.

[8] R.P. Geroch, *Domain of dependence*, J. Math. Phys. **11** (1970), 437–449.

[9] E. Minguzzi, M. Sánchez *The causal hierarchy of spacetimes*, in: Recent developments in pseudo-Riemannian geometry, 299–358, ESI Lect. Math. Phys., Eur. Math. Soc., Zürich, 2008 (`arXiv:gr-qc/0609119`).

[10] O. Müller, *Hob*, in Vorbereitung.

[11] O. Müller, M. Sánchez, *Lorentzian manifolds isometrically embeddable in* $\mathbb{L}^N$, `arXiv:0812.4439v4` [math.DG] (2010).

[12] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry. With applications to relativity*, Pure and Applied Mathematics **103**, Academic Press, New York, 1983.

[13] R. Penrose, *Techniques of differential topology in relativity*, Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Applied Mathematics, No. 7. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1972.