Musterlösung für die Probeklausur zur Analysis II für Physiker

Universität Regensburg, Sommersemester 2012
Dr. Nicolas Ginoux / Dr. Mihaela Pilca

Aufgabe 1 [4 Punkte]

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (keine Begründung erforderlich)

i) Jede regulär parametrisierte Kurve lässt sich nach Bogenlänge umparametrisieren.
WAHR: siehe Proposition 1.18 in der Vorlesung.

ii) Der Durchschnitt einer beliebigen Familie abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
WAHR: ist $(A_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie abgeschlossener Teilmengen eines metrischen Raumes X, so ist $(A_i^c = X \setminus A_i)_{i\in I}$ per Definition eine Familie offener Teilmengen von X; nach der Vorlesung (Proposition 2.8) ist dann $\bigcup_{i\in I} A_i^c$ wieder eine offene Teilmenge von X, woraus folgt, dass das Komplement $(\bigcup_{i\in I} A_i^c)^c = \bigcap_{i\in I} A_i$ abgeschlossen in X ist.

iii) Die Umkehrabbildung einer bijektiven stetigen Abbildung zwischen kompakten metrischen Räumen ist stetig.
WAHR: siehe Proposition 2.31 in der Vorlesung.

iv) Falls alle ersten partiellen Ableitungen einer Abbildung an einer Stelle existieren, dann existieren auch alle Richtungsableitungen an dieser Stelle.
FALSCH: z.B. die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } xy = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$, hat erste partielle Ableitungen an der Stelle $(0, 0)$, welche beide verschwinden, hat aber keine Richtungsableitung in Richtung $(1, 1)$ (wegen $\frac{1}{t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \infty$).

v) Das Kurvenintegral eines stetigen Vektorfeldes mit Potential längs einer geschlossenen Kurve hängt nicht von der Kurve ab.
WAHR: nach der Vorlesung ist dieses Integral immer gleich 0, siehe Satz 2.101.

vi) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $C^0([0, 1], \mathbb{R})$, welche punktweise fast-überall konvergiert. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$.
FALSCH: betrachte z.B. die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $C^0([0, 1], \mathbb{R})$, welche folgendermaßen definiert ist: $f_n(x) := \begin{cases} -(n+1)^2(x - \frac{1}{n+1}) & \text{falls } x \in [0, \frac{1}{n+1}] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$ Dann gilt $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für alle $x \in]0, 1]$; es gilt aber $\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 = \int_0^1 0dx$.

vii) *Die Lösungen einer beliebigen Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ mit $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig bilden immer einen Untervektorraum von $C^0(I, \mathbb{R}^n)$.*
FALSCH: Die Lösungen der Differentialgleichung $y' = y^2$ im $\mathbb{R}$ sind entweder gleich der Nullfunktion oder der Form $t \mapsto \frac{1}{C-t}$ für ein $C \in \mathbb{R}$; diese Funktionen bilden keinen Untervektorraum des Vektorraums $C^0(I, \mathbb{R})$, egal welches Intervall $I \subset \mathbb{R}$ betrachtet wird.

viii) Für eine C^∞ Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist jede Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ auf $\mathbb{R}$ definiert.
FALSCH: betrachte z.B. $f(t, y) := y^2$, dann ist f auf $\mathbb{R}^2$ definiert und ist C^∞,

jedoch ist z.B. $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$, die zwar auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ definiert wird, aber nicht auf $\mathbb{R}$ stetig fortsetzbar ist.

Aufgabe 2 [4 Punkte]

Für eine nichtleere offene zusammenhängende Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung so, dass

$$|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|^\alpha \tag{1}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt, für geeignete Konstanten $k, \alpha \in]0, \infty[$.

i) Angenommen, $\alpha > 1$. Zeigen Sie: eine Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ erfüllt genau dann (1), wenn f konstant ist.
(Hinweis: für die Hinrichtung zeige man, dass f differenzierbar ist und verschwindendes Differential in jedem Punkt hat.)

ii) Angenommen, $\alpha \leq 1$. Muss f dann differenzierbar sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

i) Ist f konstant, so erfüllt f trivialerweise die Ungleichung (1) (die linke Seite verschwindet). Umgekehrt erfülle f die Ungleichung (1). Sei $x \in U$ beliebig. Nach Voraussetzung gilt, für jedes $r > 0$ mit $B_r(x) \subset U$ und jedes $h \in B_r(0)$: $|f(x + h) - f(x)| \leq k \cdot |h|^\alpha$, insbesondere $\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|} \leq k|h|^{\alpha-1}$ für alle $h \in B_r(0) \setminus \{0\}$. Wegen $\alpha > 1$ gilt $k|h|^{\alpha-1} \underset{|h|\to 0}{\longrightarrow} 0$, insbesondere lässt sich $f(x + h) - f(x)$ in der Form $f(x + h) - f(x) = |h|\varepsilon(h)$ schreiben, wobei $\varepsilon(h) \underset{|h|\to 0}{\longrightarrow} 0$. Daraus folgt $f(x + h) = f(x) + |h|\varepsilon(h)$ mit $\varepsilon(h) \underset{|h|\to 0}{\longrightarrow} 0$: dies zeigt die Differenzierbarkeit der Abbildung f an x, wobei das Differential $d_x f$ die Nullabbildung $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist. Dies gilt für alle $x \in U$, somit ist f differenzierbar auf U mit $d_x f = 0$ für alle $x \in U$. Da U zusammenhängend ist, folgt aus dem Mittelwertsatz (Satz 2.69), dass f notwendigerweise konstant auf U ist, siehe Korollar 2.71 im Skript.

ii) Im Fall $\alpha \leq 1$ muss f nicht mehr differenzierbar sein. Betrachte z.B. die Abbildung $f(x) := |x|$ auf $U := \mathbb{R}^n$, dann folgt aus der Dreiecksungleichung $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ für alle $x, y \in U$; d.h., f erfüllt (1) mit $\alpha = 1$. Die Abbildung f ist aber nicht differenzierbar an der Stelle $0 \in \mathbb{R}^n$, da an dieser Stelle alle Richtungsableitungen gleich 1 sind (insbesondere hat f keine ersten partiellen Ableitungen an 0).

Aufgabe 3 [4 Punkte]

i) Bestimmen Sie das Maximum der auf $\mathbb{R}^3$ definierten Funktion

$$f(x) := (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^2$$

auf der Einheitssphäre $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x|^2 = 1\}$.

ii) Folgern Sie daraus die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel positiver Zahlen $y_i > 0$:

$$\sqrt[3]{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3} \leq \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

(Hinweis: Wenden Sie die Ungleichung aus i) auf den Vektor $x = (x_1, x_3, x_3)$ mit $x_i := \sqrt{\frac{y_i}{y_1+y_2+y_3}}$, $1 \leq i \leq 3$, an.)

Lösung:

i) Die Nebenbedingung ist gegeben durch $g(x) = 0$, wobei $g(x) = |x|^2 - 1 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 - 1$. Beide Funktionen f und g sind als Polynome stetig differenzierbar. Da die Einheitssphäre $S_1 \subset \mathbb{R}^3$ kompakt ist, nimmt die stetige Funktion f auf S_1 ein Maximum und ein Minimum an. Es folgt direkt aus der Definition, dass das Minimum von f auf S_1 gleich 0 ist und dass das Maximum strikt positiv ist.

Sei $x \in S_1$ ein Punkt, wo die Funktion f ihr Maximum auf S_1 erreicht. Wegen $\max_{x \in S_1} f(x) > 0$ sind alle $x_i \neq 0$. Es gilt: $\nabla g(x) = 2x \neq 0$ für alle $x \in S_1$. Nach dem Satz über Lagrange-Multiplikatoren (Satz 2.96 in der Vorlesung), sind die lokalen Extrema von f also enthalten in den Lösungen $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ folgendes Gleichungssystems:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(x), \text{ für } 1 \leq i \leq 3.$$

Dieses System ist äquivalent zu $\frac{2(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^2}{x_i} = 2\lambda x_i$, für $1 \leq i \leq 3$, also:

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^2 = \lambda x_i^2, \text{ für } 1 \leq i \leq 3. \tag{2}$$

Durch Summieren über $1 \leq i \leq 3$ folgt:

$$3(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^2 = \lambda \sum_{i=0}^{3} x_i^2 = \lambda,$$

wobei die letzte Gleichung aus der Nebenbedingung: $g(x) = 0$ folgt. Wenn wir diesen Wert von λ in (2) einsetzen, folgt:

$$x_i^2 = \frac{1}{3} \text{ für } 1 \leq i \leq 3.$$

Diese sind alle möglichen lokalen Extrema x mit $x_i \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq 3$. Die zugehörigen Funktionswerte sind alle gleich $\frac{1}{27}$. Damit ergibt sich folgendes Ergebnis: das (globale) Maximum von f auf der Sphäre S_1 ist gleich $\frac{1}{27}$ und wird in den Punkten $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$ angenommen.

ii) Aus i) folgt die Ungleichung:

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^2 \leq \frac{1}{27}.$$

für alle Punkte $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Wenn wir diese Ungleichung auf den Vektor $x = (x_1, x_2, x_3)$ mit $x_i := \sqrt{\frac{y_i}{y_1+y_2+y_3}}$, $1 \leq i \leq 3$ anwenden, es folgt:

$$\frac{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3}{(y_1 + y_2 + y_3)^3} \leq \frac{1}{27},$$

oder äquivalent dazu die gewünschte Ungleichung:

$$\sqrt[3]{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3} \leq \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Bemerkung: Das Ergebnis dieser Aufgabe ist richtig wenn wir 3 durch eine beliebige natürliche Zahl n ersetzen. Das Maximum der Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := (x_1 \cdots x_n)^2$ auf der Einheitsphr̈e in $\mathbb{R}^n$ ist gleich n^{-n} und damit folgt die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel positiver Zahlen $y_i > 0$, für $1 \leq i \leq n$. Der entsprechende Beweis funktioniert mit demselben Argument.

Aufgabe 4 [4 Punkte]

Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} = xyz$$

für (x, y) in einer offenen Umgebung von $(1, -1)$ eine eindeutige, stetig differenzierbare Lösung der Form $z = g(x, y)$ besitzt. Berechnen Sie $\nabla g(1, -1)$.

Lösung: Sei f folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) := x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} - xyz.$$

Aus $f(1, -1, z) = 0$, folgt $z(z^{2n} + 1) = 0$, also $z = 0$. Die Funktion f ist als Polynom eine C^1-Funktion und es gilt $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = (2n + 1)z^{2n} - xy$, also $\frac{\partial f}{\partial z}(1, -1, 0) = 1 \neq 0$. Aus dem Satz über implizite Funktionen (Korollar 2.78 in der Vorlesung) folgt, dass eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(1, -1)$ und eine eindeutige stetig differenzierbare Funktion g auf U so existieren, dass $f(x, y, z) = 0$ äquivalent zu $z = g(x, y)$ ist. Außerdem ist die Ableitung von g gegeben durch (nach Bemerkung 2.79 oder durch direkte Anwendung der Kettenregel):

$$\begin{aligned}
\nabla g(x, y) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y))\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, g(x, y)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, g(x, y)) \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{(2n + 1)(g(x, y))^{2n} - xy} \begin{pmatrix} (2n + 1)x^{2n} - yg(x, y) \\ (2n + 1)y^{2n} - xg(x, y) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Im Punkt $(x, y) = (1, -1)$ folgt also:

$$\nabla g(1, -1) = -(2n + 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 [4 Punkte]

Sei $P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq y \leq \sin(x)\,,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi(1-z)}{2}\,,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

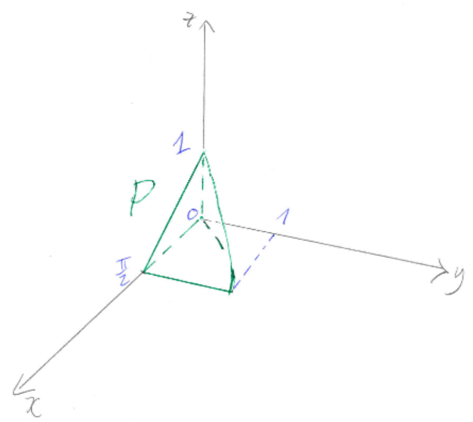
i) Skizzieren Sie P.

ii) Berechnen Sie das Volumen von P.

Lösung:

i) Der Körper P entsteht durch das Schneiden folgender Teilmengen des $\mathbb{R}^3$: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq y \leq \sin(x)\}$ (betrachte alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ der xy-Ebene mit $0 \leq$

$y \leq \sin(x)$, d.h., (x, y) liegt unterhalb der Kurve $y = \sin(x)$ und oberhalb der x-Achse, und erweitere um eine beliebige Koordinate $z \in \mathbb{R}$; bekomme somit eine Art “Zylinder”), den Halbraum $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq x\}$ (alles, was “über” der yz-Ebene liegt), den Halbraum $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \leq \frac{\pi(1-z)}{2}\}$ (alles, was “unter” der Ebene $x = \frac{\pi(1-z)}{2}$ liegt) und die “Platte” $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq 1\}$. Beachte insbesondere, dass P abgeschlossen (weil die Abbildungen $(x, y, z) \mapsto \sin(x)$ und $(x, y, z) \mapsto \frac{\pi(1-z)}{2}$ stetig auf $\mathbb{R}^3$ sind) und beschränkt (weil $|(x, y, z)| \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 2}$ für alle $(x, y, z) \in P$ gilt) und somit nach dem Satz von Heine-Borel (Satz 2.28) kompakt ist.



Bemerke auch, dass der Durchschnitt $P \cap \{(x_0, y, z) \,|\, y, z \in \mathbb{R}\}$ von P mit jeder zur yz-Ebene parallelen Ebene, wobei $0 \leq x_0 \leq \frac{\pi}{2}$, ein (volles) Viereck mit Seitenlängen $\sin(x_0)$ und $1 - \frac{2x_0}{\pi}$ ist.

ii) Zu berechnen ist $\mathrm{Vol}(P) = \int_P 1 dxdydz$.

Da die konstante Funktion 1 positiv ist, kann der Satz von Fubini angewendet werden, welcher folgendes liefert:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(P) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{\sin(x)} \Big(\int_0^{1-\frac{2x}{\pi}} dz \Big) dy \Big) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot (1 - \frac{2x}{\pi}) dx \\
&= [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin(x) dx \\
&= 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \left([-x\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx \right) \qquad \text{nach partieller Integration} \\
&= 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \left(0 + [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \\
&= 1 - \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 [4 Punkte]
Für die Bewegung eines Teilchens mit der Ladung $q \neq 0$ und der Masse $m > 0$ in einem gekreuzten elektrischen Feld (in x-Richtung) und magnetischen Feld (in z-Richtung) gilt die dreidimensionale Bewegungsgleichung

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qE + qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x} \\ m\ddot{z} = 0, \end{cases}$$

wobei E und B nicht verschwindende reelle Konstanten sind. Finden Sie die Lösung mit dem Cauchy-Datum: $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$.
Lösung:

Da die Gleichung für z unabhängig von den Gleichungen für x und y ist, folgt, dass die Lösung für z allein durch $m\ddot{z} = 0$ und die Anfangswerten $z(0) = \dot{z}(0) = 0$ bestimmt ist. Damit ist z identisch der Nullfunktion, da diese die Gleichung löst und die Lösung eindeutig ist.

In der Differentialgleichung für x und y kommen x und y nicht vor, d.h. die Gleichung 2. Ordnung ist eine Gleichung erster Ordnung für die Ableitungen $\dot{x}$ und $\dot{y}$. Damit kann zuerst die Ableitung der Lösung bestimmt werden. Die eigentliche Lösung ergibt sich dann durch Integration und Einsetzen der Anfangswerte.

Die homogene Differentialgleichung für $\dot{x}$ und $\dot{y}$ lautet:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{qB}{m}\dot{y} \\ \ddot{y} = -\dfrac{qB}{m}\dot{x}. \end{cases}$$

Die Eigenwerte der zugehörigen Matrix $\begin{pmatrix} 0 & \frac{qB}{m} \\ -\frac{qB}{m} & 0 \end{pmatrix}$ sind $\pm iqB/m$, mit den Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$. Die allgemeine reelle Lösung lautet damit:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos(\frac{qB}{m}t) \\ -\sin(\frac{qB}{m}t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin(\frac{qB}{m}t) \\ \cos(\frac{qB}{m}t) \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Wir suchen jetzt eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{qB}{m}\dot{y} + \dfrac{qE}{m} \\ \ddot{y} = -\dfrac{qB}{m}\dot{x}, \end{cases} \tag{3}$$

Man kann direkt bemerken, dass $\dot{x}(t) = 0$ und $\dot{y}(t) = -\frac{E}{B}$ eine Lösung ist. Falls nicht, durch den Ansatz der Variation der Konstanten suchen wir eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung der Form:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = C_1(t) \begin{pmatrix} \cos(\frac{qB}{m}t) \\ -\sin(\frac{qB}{m}t) \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} \sin(\frac{qB}{m}t) \\ \cos(\frac{qB}{m}t) \end{pmatrix}.$$

Nach Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung (3) folgt:

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{qB}{m}t) & \sin(\frac{qB}{m}t) \\ -\sin(\frac{qB}{m}t) & \cos(\frac{qB}{m}t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{qE}{m} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt:

$$\begin{cases} \dot{C}_1(t) = \dfrac{qE}{m}\cos(\dfrac{qB}{m}t) \\ \dot{C}_2(t) = \dfrac{qE}{m}\sin(\dfrac{qB}{m}t) \end{cases}$$

und nach Integrieren:

$$\begin{cases} C_1(t) = \dfrac{E}{B}\sin(\dfrac{qB}{m}t) + C_1 \\ C_2(t) = -\dfrac{E}{B}\cos(\dfrac{qB}{m}t) + C_2 \end{cases}$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Damit ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \frac{E}{B}\sin(\frac{qB}{m}t) \begin{pmatrix} \cos(\frac{qB}{m}t) \\ -\sin(\frac{qB}{m}t) \end{pmatrix} - \frac{E}{B}\cos(\frac{qB}{m}t) \begin{pmatrix} \sin(\frac{qB}{m}t) \\ \cos(\frac{qB}{m}t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{E}{B} \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist damit gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos(\frac{qB}{m}t) \\ -\sin(\frac{qB}{m}t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin(\frac{qB}{m}t) \\ \cos(\frac{qB}{m}t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{E}{B} \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Nach Integration folgt:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \frac{m}{qB} \begin{pmatrix} \sin(\frac{qB}{m}t) \\ \cos(\frac{qB}{m}t) \end{pmatrix} + C_2 \frac{m}{qB} \begin{pmatrix} -\cos(\frac{qB}{m}t) \\ \sin(\frac{qB}{m}t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_3 \\ -\frac{E}{B}t + C_4 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen des Cauchy-Datums $x(0) = y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ liefert folgende Gleichungen für die Konstante:

$$\begin{cases} 0 = x(0) = -C_2 \dfrac{m}{qB} + C_3 \\ 0 = y(0) = C_1 \dfrac{m}{qB} + C_4 \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} 0 = \dot{x}(0) = C_1 \\ 0 = \dot{y}(0) = C_2 - \dfrac{E}{B} \end{cases}$$

Daraus folgt $C_1 = C_4 = 0$, $C_2 = \frac{E}{B}$, $C_3 = \frac{mE}{qB^2}$. Die Lösung des Cauchy-Problems ist damit gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{mE}{qB^2}\left(\cos(\frac{qB}{m}t) - 1\right) \\ \frac{mE}{qB^2}\sin(\frac{qB}{m}t) - \frac{E}{B}t \\ 0 \end{pmatrix}.$$