Musterlösung zur Klausur zur Analysis II für Physiker

Universität Regensburg, Sommersemester 2012
Dr. Nicolas Ginoux / Dr. Mihaela Pilca
25.07.2012

Aufgabe 1 [10 Punkte]

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind (keine Begründung erforderlich):

i) Zwei äquivalente Kurven haben dieselbe Länge.
WAHR wegen der Transformationsformel für Integrale, siehe Prop. 1.15 im Skript.

ii) Das Urbild einer abgeschlossenen Teilmenge unter einer stetigen Funktion ist abgeschlossen.
WAHR: Proposition 2.19 im Skript.

iii) Das Intervall $]1, \infty[$ ist vollständig.
FALSCH: die Folge $(1 + \frac{1}{n})_{n \geq 1}$ ist eine Cauchy-Folge aus $]1, +\infty[$ (weil sie im $\mathbb{R}$ gegen 1 konvergiert), konvergiert aber nicht in $]1, +\infty[$ (wegen $1 \notin]1, +\infty[$).

iv) Besitzt eine Abbildung alle Richtungsableitungen an einem gegebenen Punkt, so ist sie differenzierbar.
FALSCH: siehe Bemerkung 2.61.1 im Skript.

v) Eine Abbildung, für die alle ersten partiellen Ableitungen existieren und stetig sind, ist differenzierbar.
WAHR: siehe Satz 2.73 im Skript.

vi) Jedes auf einer sternförmigen offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ definierte Vektorfeld besitzt ein Potential.
FALSCH: z.B. $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $v(x, y) := (-y, x)$, ist ein auf der sternförmigen offenen Teilmenge $\mathbb{R}^2$ des $\mathbb{R}^2$ definiertes Vektorfeld, hat aber kein Potential, siehe Beispiel 2.105.1 im Skript.

vii) Die Rotation des Gradienten einer C^2 Funktion verschwindet.
WAHR: Proposition 2.110 im Skript.

viii) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) := \langle Ax, x\rangle$, wobei $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix mit den Eigenwerten -1, 0 und 1 ist. Dann besitzt die Einschränkung von f auf die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$ genau 4 lokale Extrema.
WAHR: da alle Eigenwerte notwendigerweise einfach sind (d.h., Vielfachheit 1 haben) und die lokalen Minima (bzw. Maxima) die zum kleinsten (bzw. größten) Eigenwert gehörigen Eigenvektoren mit Norm 1 sind, hat f genau zwei lokale Minima (ist $u \in S^2$ ein Eigenvektor, so ist $-u$ ebenfalls in S^2 und ist auch ein Eigenvektor zum selben Eigenwert), welche tatsächlich globale Minima von $f_{|_{S^2}}$ sind; analog hat f genau zwei lokale Maxima (welche auch globale Maxima sind); siehe Zentralübung.

ix) Jede lineare Differentialgleichung besitzt eine globale Lösung.
WAHR: Korollar 4.15 im Skript.

x) Jede geschlossene Differentialform ist exakt.
FALSCH: siehe Bemerkung 5.41.3 im Skript.

Aufgabe 2 [10 Punkte]

i) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \longmapsto |x| \cdot x$, C^1 auf $\mathbb{R}^n$ ist und geben Sie ihre Jacobi-Matrix an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ an. Hierbei bezeichnet $|x| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

ii) Sei g folgende Funktion:

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ist g stetig in $(0,0)$?

Lösung:

i) Auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist f als Produkt der C^∞ Abbildung $x \mapsto x$ mit der C^∞ Funktion $x \mapsto |x|$ (es ist nämlich $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ und $x \mapsto \langle x, x\rangle$ ist C^∞ auf $\mathbb{R}^n$; die Funktion $\sqrt{\ } :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist ebenfalls C^∞) auch C^∞. Die Jacobi-Matrix von f an einer beliebigen Stelle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist gegeben durch $J_f(x) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$, wobei $f_i(x) = |x| \cdot x_i$ für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, insbesondere (nach den Produkt- und Kettenregeln)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) &= \frac{\partial(|x|)}{\partial x_j}(x) \cdot x_i + |x| \cdot \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(x) \\
&= \frac{1}{2|x|} \cdot \frac{\partial(|x|^2)}{\partial x_j}(x) \cdot x_i + |x| \cdot \delta_{ij} \qquad \text{mit } \delta_{ij} := \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right. \\
&= \frac{1}{2|x|} \cdot 2x_j \cdot x_i + |x| \cdot \delta_{ij} \\
&= \frac{x_i x_j}{|x|} + \delta_{ij} \cdot |x|
\end{aligned}$$

für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Bemerke, dass jedes $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ insbesondere auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ stetig ist (als Summe von Quotienten/Produkten stetiger Funktionen). Für die Stelle $0 \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir, für alle $x \in \mathbb{R}^n$: $f(x) - f(0) = |x| \cdot x - 0 = 0 + |x| \cdot \varepsilon(x)$, wobei $\varepsilon(x) := x \underset{|x| \to 0}{\longrightarrow} 0 \in \mathbb{R}^n$. Nach Definition der Differenzierbarkeit (siehe Definition 2.58 im Skript) zeigt diese Identität, dass f an der Stelle $0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist mit Differential $d_0 f = 0$. Insbesondere hat (nach Proposition 2.61 im Skript) f erste partielle Ableitungen an der Stelle $0 \in \mathbb{R}^n$, welche alle 0 sind. Es ist zuletzt, zu bemerken, dass $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \underset{|x| \to 0}{\longrightarrow} 0 \in \mathbb{R}$, denn:

$$0 \leq \left| \frac{x_i x_j}{|x|} + \delta_{ij} \cdot |x| \right| \leq \frac{|x_i| \cdot |x_j|}{|x|} + |x| \leq \frac{|x|^2}{|x|} + |x| \leq 2 \cdot |x|,$$

somit $\left| \frac{x_i x_j}{|x|} + \delta_{ij} \cdot |x| \right| \underset{|x| \to 0}{\longrightarrow} 0$. Dies beweist, dass alle ersten partiellen Ableitungen von f auf ganz $\mathbb{R}^n$ existieren und stetig sind. Satz 2.73 im Skript impliziert, dass f insgesamt C^1 auf $\mathbb{R}^n$ ist mit $J_f(x) = (a_{ij})_{1 \leq i,j, \leq n}$, wobei

$$a_{ij} := \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x_i x_j}{|x|} + \delta_{ij} \cdot |x| & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{array} \right.$$

ii) Nein, denn: betrachte die Folge $\big((x_n, y_n) := (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\big)_{n\geq 1}$ aus $\mathbb{R}^2$; es gilt nämlich $(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, dennoch ist

$$g(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}}} = \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n^2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

insbesondere gilt $g(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2} \neq 1 = g(0,0)$. Dies zeigt, dass g an der Stelle $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ nicht stetig ist.

Aufgabe 3 [10 Punkte]

i) Zeigen Sie, dass das Ellipsoid $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + 2z^2 = 2\}$ kompakt ist.

ii) Sei f folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = x - y + 2z$$

Hat f ein globales Maximum und ein globales Minimum auf dem Ellipsoid E? Wenn ja, bestimmen Sie sie.

Lösung:

i) Das Ellipsoid $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + 2z^2 = 2\}$ ist kompakt, nach dem Satz von Heine-Borel (Satz 2.28 in der Vorlesung), da die Menge E abgeschlossen und beschränkt ist. Man kann z.B. folgende Funktion betrachten: $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2$. Die Funktion g ist stetig (als Polynom) und damit ist $E = g^{-1}(0)$, das Urbild unter g der abgeschlossenen Menge $\{0\}$, eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^3$. Es folgt direkt aus der Definition von E, dass die Norm von jedem Punkt in E kleiner oder gleich $\sqrt{2}$ ist und damit ist die Teilmenge E beschränkt.

ii) Da die Funktion f (als Polynom) stetig auf $\mathbb{R}$ ist und E eine kompakte Menge ist, folgt aus dem Korollar 2.32, dass die Einschränkung von f auf E ein globales Maximum und ein globales Minimum besitzt. Diese sind Extrema unter Nebenbedingungen und deshalb wenden wir den Satz über Lagrange-Multiplikatoren (Satz 2.96 in der Vorlesung) an. Die Nebenbedingung ist gegeben durch $g(x,y,z) = 0$ (wobei g die in i) definierte Funktion ist). Damit folgt, dass die lokalen Extrema der Funktion f eingeschränkt auf E sich unter den Lösungen folgender Gleichung befinden:

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z), \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Äquivalent dazu:

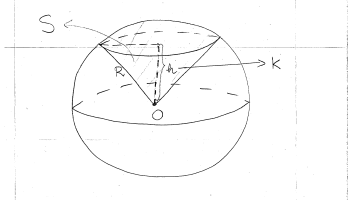
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 4z \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist $\lambda \neq 0$. Damit folgt $\frac{1}{2\lambda} = x = -y = z$ und Einsetzen in der Nebenbedingung $g(x,y,z) = 0$ impliziert: $4x^2 = 2$, also $x \in \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. Die möglichen Kandidaten für die lokalen Extrema der Funktion f eingeschränkt auf E sind damit die Punkte $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ (wobei $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ im ersten Fall und $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ im zweiten Fall). Da es nur zwei mögliche lokale Extrema gibt und wir schon wissen, dass f auf E ein globales Minimum und ein globales Maximum hat, ist einer dieser Punkte genau das Maximum und der andere genau das Minimum von f auf E. Nach Berechnen der Werte: $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}$ und $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -2\sqrt{2}$, folgt, dass $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ das globale Maximum von f auf E ist und $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ sein globales Minimum.

Aufgabe 4 [10 Punkte]

Sei $B_R(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ die Vollkugel vom Radius R und h eine reelle Zahl zwischen 0 und R. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der gleich dem Durchschnitt zwischen der Vollkugel $B_R(0)$ und dem oberen Halbraum $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq h\}$ ist.

Lösung: Sei V das Volumen des Körpers $B_R(0) \cap H$. Eine Möglichkeit dieses Volumen V zu berechnen ist als Differenz zwischen dem Volumen des Kugelsektors S und dem Volumen des Kegels K (siehe Bild).



Der Kugelsektor S ist (bis auf einer Menge vom Maß Null) gleich folgender Menge:

$$\left\{(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0, R], \theta \in [-\pi, \pi], \varphi \in [\arcsin(\frac{h}{R}), \frac{\pi}{2}]\right\}.$$

Aus der Transformationsformel (Satz 3.70 und Korollar 3.72 in der Vorlesung) folgt, dass das Volumen des Kugelsektors S gegeben ist durch:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(S) &= \int_S dxdydz = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\arcsin(\frac{h}{R})}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\varphi \, drd\theta d\varphi \\
&= \int_0^R r^2 dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{\arcsin(\frac{h}{R})}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi \quad \text{(nach dem Satz von Fubini)} \\
&= 2\pi \cdot \frac{R^3}{3}\left(1 - \frac{h}{R}\right) = \frac{2\pi}{3} R^2 (R - h). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Da die Höhe des Kegels K gleich h ist und seine Grundfläche ein Kreis vom Radius $\sqrt{R^2 - h^2}$ ist (direkte Folgerung aus dem Satz von Pythagoras), folgt, dass das Volumen von K gegeben ist durch:

$$\mathrm{Vol}(K) = \frac{\pi h(R^2 - h^2)}{3}.$$

Damit folgt:

$$V = \mathrm{Vol}(S) - \mathrm{Vol}(K) = \frac{\pi}{3}(R - h)(2R^2 - hR - h^2).$$

Aufgabe 5 [10 Punkte]

i) Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen folgender Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

ii) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung (2) mit dem Cauchy-Datum $y_1(0) = 2, y_2(0) = 3$.

iii) Finden Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden inhomogenen Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Lösung:

i) Die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$ sind gegeben durch

$$\det \begin{pmatrix} -2 - \lambda & -1 \\ 9 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

also $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ und damit $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist gegeben durch:

$$E_{\lambda_1} = \mathrm{span} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Damit ist eine Lösung der Differentialgleichung (2) gegeben durch: $y(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Um eine weitere (davon linear unabhängige) Lösung zu finden, machen wir folgenden Ansatz: $y(t) = e^t \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right]$. Nach Einsetzen in (2) folgt:

$$\begin{aligned} -2w_1 - w_2 &= w_1 + 1, \\ 9w_1 + 4w_2 &= w_2 - 3, \end{aligned}$$

äquivalent zu $w_2 = -3w_1 - 1$. Z.B. für $w_1 = 0$ bekommen wir folgende Lösung: $y(t) = e^t \begin{pmatrix} t \\ -3t - 1 \end{pmatrix}$. Damit sind die allgemeinen Lösungen von (2) gegeben durch:

$$y_h(t) = e^t \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ -3t - 1 \end{pmatrix} \right], \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Alternativ kann eine beliebige Lösung mit dem Exponentialansatz angegeben werden: die Abbildung $t \mapsto y(t) := e^{tA} \cdot y_0$, wobei $y_0 := (y_{01}, y_{02}) \in \mathbb{R}^2$ beliebig ist, löst das Cauchy-Problem $y' = A \cdot y$ (auf $\mathbb{R}$), $y(0) = y_0$. Zur Berechnung von e^{tA} suchen wir eine Jordan'sche Normalform für A (Diagonalform ist sowieso nicht möglich, da der Eigenwert 1 geometrische Vielfachheit 1 hat, siehe oben). Wählen wir z.B. den zweiten Basis Vektor $e_2 = (0,1) \in \mathbb{R}^2$, so gilt $A \cdot e_2 = -e_1 + 4e_2 = -(e_1 - 3e_2) + e_2$, d.h., für die Basiswechselmatrix $P := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
P^{-1}e^{tA}P &= e^{tP^{-1}AP} \\
&= \exp(t \cdot \mathrm{I}_2 + t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \\
&= \exp(t \cdot \mathrm{I}_2) \cdot \exp(t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \quad \text{da } \mathrm{I}_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{I}_2 \\
&= e^t \cdot (I_2 + t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \quad \text{da } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0 \\
&= e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wegen $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ gilt dann

$$e^{tA} = P \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = e^t \cdot \begin{pmatrix} 1-3t & -t \\ 9t & 3t+1 \end{pmatrix}$$

und somit $y(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} 1-3t & -t \\ 9t & 3t+1 \end{pmatrix} \cdot y_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Vergleicht man mit (4), so sieht man leicht, dass es sich um dieselbe Lösung handelt (die Konstanten c_1, c_2 müssen in Abhängigkeit von y_{01}, y_{02} umgerechnet werden).

ii) Durch Einsetzen des Cauchy-Datums in die allgemeinen Lösungen (4) bestimmen wir wie folgt die reellen Konstanten c_1 und c_2:

$$\begin{aligned}
2 &= y_1(0) = c_1, \\
3 &= y_2(0) = -3c_1 - c_2.
\end{aligned}$$

Die Lösung des Cauchy-Problems ist damit gegeben durch:

$$y(t) = e^t \left[2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - 9 \begin{pmatrix} t \\ -3t-1 \end{pmatrix} \right] = e^t \begin{pmatrix} -9t+2 \\ 27t+3 \end{pmatrix}.$$

iii) Wir suchen zuerst eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Dafür kann man entweder die Variation der Konstanten benutzen oder einen speziellen Ansatz machen (die von der Form des inhomogenen Terms abhängt).

Nach dem Ansatz der Variation der Konstanten nehmen wir an, dass die Lösung von folgender Form ist:

$$y(t) = e^t \left[c_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} t \\ -3t-1 \end{pmatrix} \right]. \tag{5}$$

Nach Einsetzen in (3) folgt:

$$c_1'(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2'(t)\begin{pmatrix} t \\ -3t-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Äquivalent dazu

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ -3 & -3t-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{cases} c_1'(t) = 3t+1 \\ c_2'(t) = -3 \end{cases}$$

Nach Integrieren folgt:

$$\begin{cases} c_1(t) = \dfrac{3}{2}t^2 + t + \overline{c}_1 \\ c_2(t) = -3t + \overline{c}_2 \end{cases} \quad \text{mit } \overline{c}_1, \overline{c}_2 \in \mathbb{R}.$$

Damit ist z.B. eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (3) gegeben durch:

$$y_{\text{inh}}(t) = e^t\left[(\frac{3}{2}t^2+t)\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - 3t\begin{pmatrix} t \\ -3t-1 \end{pmatrix}\right] = e^t\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t^2+t \\ \frac{9}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

und die allgemeine Lösung ist:

$$y(t) = e^t\begin{pmatrix} c_1 + c_2t - \frac{3}{2}t^2 + t \\ -3c_1 - (3t+1)c_2 + \frac{9}{2}t^2 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 6 [10 Punkte]

Sei $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3+y^3+z^3 = 3\} \subset \mathbb{R}^3$.

1. Zeigen Sie, dass M eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.
2. Bestimmen Sie eine lineare Gleichung, welche den Tangentialraum T_pM von M an der Stelle $p = (1,1,1)$ beschreibt und geben Sie eine Basis von T_pM an.
3. (Bonus: 4P) Zeigen Sie, dass M homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist.
Hinweis: betrachten Sie die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \longmapsto (x^3,y^3,z^3)$.

Lösung:
1. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y,z) \longmapsto x^3+y^3+z^3$, ist offenbar C^∞ mit $(\nabla f)(x,y,z) = (3x^2, 3y^2, 3z^2)$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Bemerke insbesondere, dass der Gradient $(\nabla f)(x,y,z)$ genau dann verschwindet, wenn $(x,y,z) = (0,0,0)$ gilt. Ist nun $(x,y,z) \in M = f^{-1}(\{3\})$, so gilt $f(x,y,z) = 3$, insbesondere $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ und daher $(\nabla f)(x,y,z) \neq (0,0,0)$. Dies zeigt, dass $3 \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert der Funktion f ist. Aus dem Satz über den regulären Wert (Korollar 5.6 im Skript) folgt, dass $M = f^{-1}(\{3\})$ eine $3-1 = 2$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.
2. Bemerke, dass wegen $f(p) = 3$ der Punkt p wohl auf M liegt. Nach der Vorlesung

(genauer: Proposition 5.10 im Skript) ist T_pM gegeben durch $T_pM = \ker(d_pf)$, wobei $d_pf : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ das Differential von f an der Stelle $p = (1,1,1)$ ist. Da aber $d_pf(X) = \langle(\nabla f)(p), X\rangle$ für alle $X \in \mathbb{R}^3$ gilt, ist $T_pM = (\nabla f)(p)^\perp = \{X \in \mathbb{R}^3 \,|\, \langle X, (\nabla f)(p)\rangle = 0\}$. Nun ist nach den obigen Rechnungen $(\nabla f)(p) = (3,3,3) = 3(1,1,1)$, somit ist

$$T_pM = \{X \in \mathbb{R}^3 \,|\, \langle X, (1,1,1)\rangle = 0\} = \{X = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, X_1 + X_2 + X_3 = 0\}.$$

Eine Basis von T_pM bestimmen wir durch das "Lösen" der linearen Gleichung $X_1 + X_2 + X_3 = 0$: es ist nämlich $X_1 + X_2 + X_3 = 0$ g.d.w. $X_1 = -X_2 - X_3$, somit ist (beispielsweise) $\{u := (-1,1,0), v := (-1,0,1)\}$ eine Basis von T_pM.
3. Nach Definition von M ist $M = \Phi^{-1}(E)$, wobei $E := \{X = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, X_1 + X_2 + X_3 = 3\}$ (tatsächlich ist $E = p + T_pM$). Da E eine affine Ebene ist (also ein zweidimensionaler affiner Unterraum des $\mathbb{R}^3$), ist E homöomorph zum $\mathbb{R}^2$: die Abbildung $\mathbb{R}^2 \longrightarrow E$, $(\alpha, \beta) \longmapsto p + \alpha u + \beta v$, ist ein Homöomorphismus, wobei $\{u, v\}$ die obige Basis von T_pM ist. Es reicht somit, zu beweisen, dass Φ selbst ein Homöomorphismus ist (denn dann ist $\Phi_{|_M} : M \longrightarrow E$ ebenfalls ein Homöomorphismus). Die Abbildung Φ ist aber offensichtlich stetig (sogar C^∞), da alle Koordinatenfunktionen von Φ stetig in (x, y, z) sind. Außerdem kann eine Umkehrabbildung für Φ explizit angegeben werden: die Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto (x^{\frac{1}{3}}, y^{\frac{1}{3}}, z^{\frac{1}{3}})$, ist ebenfalls stetig mit $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} = \Phi \circ \Psi$. Dies beweist, dass Φ ein Homöomorphismus ist.