Klausur zur Analysis II für Physiker

Universität Regensburg, Sommersemester 2012
Dr. Nicolas Ginoux / Dr. Mihaela Pilca
25.07.2012, Bearbeitungszeit: **2 Stunden**

Name:

Matr.-Num.:

- Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf dieses Blatt und auf jedes zusätzliche Blatt, das Sie abgeben!
- Erlaubtes Hilfsmittel: 1 handbeschriebenes DIN A4-Blatt als Merkhilfe.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und packen Sie es weg.
- Wenn Sie mindestens 50% der Punkte erreichen, haben Sie bestanden.
- Um bei einer Rechenaufgabe volle Punktzahl zu erhalten, muss der Rechenweg nachvollziehbar und begründet sein.
- Schreiben Sie auch die Lösungen für die Rechenaufgaben (jeweils 2 Seiten Platz) direkt auf diese Klausurblätter. Wenn nötig, können Sie zusätzliche Blätter beifügen.
- Schreiben Sie bitte leserlich.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							

Note:

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 [10 Punkte]
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind (keine Begründung erforderlich):

i) Zwei äquivalente Kurven haben dieselbe Länge.	☐ WAHR	☐ FALSCH
ii) Das Urbild einer abgeschlossenen Teilmenge unter einer stetigen Funktion ist abgeschlossen.	☐ WAHR	☐ FALSCH
iii) Das Intervall $]1, \infty[$ ist vollständig.	☐ WAHR	☐ FALSCH
iv) Besitzt eine Abbildung alle Richtungsableitungen an einem gegebenen Punkt, so ist sie differenzierbar.	☐ WAHR	☐ FALSCH
v) Eine Abbildung, für die alle ersten partiellen Ableitungen existieren und stetig sind, ist differenzierbar.	☐ WAHR	☐ FALSCH
vi) Jedes auf einer sternförmigen offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ definierte Vektorfeld besitzt ein Potential.	☐ WAHR	☐ FALSCH
vii) Die Rotation des Gradienten einer C^2 Funktion verschwindet.	☐ WAHR	☐ FALSCH
viii) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) := \langle Ax, x \rangle$, wobei A eine symmetrische Matrix $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ mit den Eigenwerten -1, 0 und 1 ist. Dann besitzt die Einschränkung von f auf die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$ genau 4 lokale Extrema.	☐ WAHR	☐ FALSCH
ix) Jede lineare Differentialgleichung besitzt eine globale Lösung.	☐ WAHR	☐ FALSCH
x) Jede geschlossene Differentialform ist exakt.	☐ WAHR	☐ FALSCH

Aufgabe 2 [10 Punkte]

i) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \longmapsto |x| \cdot x$, C^1 auf $\mathbb{R}^n$ ist und geben Sie ihre Jacobi-Matrix an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ an. Hierbei bezeichnet $|x| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

ii) Sei g folgende Funktion:

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ist g stetig in $(0,0)$?

Aufgabe 3 [10 Punkte]

i) Zeigen Sie, dass das Ellipsoid $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 2z^2 = 2\}$ kompakt ist.

ii) Sei f folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x - y + 2z$$

Hat f ein globales Maximum und ein globales Minimum auf dem Ellipsoid E? Wenn ja, bestimmen Sie sie.

Aufgabe 4 [10 Punkte]

Sei $B_R(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ die Vollkugel vom Radius R und h eine reelle Zahl zwischen 0 und R. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der gleich dem Durchschnitt zwischen der Vollkugel $B_R(0)$ und dem oberen Halbraum H ist, wobei $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq h\}$.

Aufgabe 5 [10 Punkte]

i) Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen folgender Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

ii) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung (1) mit dem Cauchy-Datum $y_1(0) = 2, y_2(0) = 3$.

iii) Finden Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden inhomogenen Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6 [10 Punkte]

Sei $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 = 3\} \subset \mathbb{R}^3$.

i) Zeigen Sie, dass M eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

ii) Bestimmen Sie eine lineare Gleichung, welche den Tangentialraum T_pM von M an der Stelle $p = (1, 1, 1)$ beschreibt und geben Sie eine Basis von T_pM an.

iii) (Bonus: 4 Punkte) Zeigen Sie, dass M homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist.
Hinweis: betrachten Sie die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto (x^3, y^3, z^3)$.