Heegaard-Zerlegungen von kompakten 3-Mannigfaltigkeiten

Nicolas Ginoux

Seminar über Knoten und 3-Mannigfaltigkeiten - Universität Regensburg

6. Dezember 2010

Zusammenfassung: Wir zeigen, dass jede kompakte orientierte 3-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit so zerlegt werden kann, dass jede Komponente in der Zerlegung zu einer "einfachen" 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit Rand homöomorph ist. Der Vortrag basiert auf [5, Sec. IV.8-9].

1 Grundlagen

In diesem Abschnitt erinnern wir kurz an die Begriffe, die wir im Vortrag brauchen.

Definition 1.1 *Sei $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Eine* n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand *ist ein Hausdorff'scher topologischer Raum M^n, welcher eine abzählbare Basis der Topologie hat und so, dass jeder Punkt von M^n eine zu einem offenen Ball im $\mathbb{R}^n$ homöomorphe offene Umgebung besitzt.*

2. *Eine* n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit Rand *ist ein Hausdorff'scher topologischer Raum M^n, welcher eine abzählbare Basis der Topologie hat und so, dass jeder Punkt von M^n eine offene Umgebung besitzt, welche entweder zu einem offenen Ball oder zu einem Halbball $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| < 1 \mathit{und}\ x_n \geq 0\}$ homöomorph ist.*

Die natürliche Zahl n heißt die *Dimension* der topologischen Mannigfaltigkeit M^n. Der *Rand* von M^n ist die Menge der Punkte in M^n, die eine zu einem

Halbball homöomorphe Umgebung besitzen. Falls nichtleer ist der Rand automatisch eine $n-1$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

Eine topologische Mannnigfaltigkeit heißt genau dann *geschlossen*, wenn sie kompakt und ohne Rand ist.

Von hier aus betrachte man ausschließlich 3-dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten mit oder ohne Rand (kurz: 3-Mannigfaltigkeiten).

Definition 1.2 *Eine* Triangulierung *einer* 3*-Mannigfaltigkeit* M^3 *ist eine Teilung von* M^3 *in endlich viele zu einem Tetraeder homöomorphe Teilmengen so, dass der Durchschnitt zwischen je zwei verschiedenen Tetraedern entweder leer oder eine gemeinsame Ecke oder eine gemeinsame Kante oder eine gemeinsame Seite ist.*

Jede kompakte 3-Mannigfaltigkeit besitzt eine Triangulierung: diese sehr nichttriviale Aussage, die von E. Moise [3, 4] gezeigt wurde, akzeptieren wir ohne Beweis. Eine 3-Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Triangulierung heißt *trianguliert*. Mit Hilfe von Triangulierungen kann der Begriff "Orientierung" für topologische 3-Mannigfaltigkeiten erklärt werden.

Definition 1.3 *Sei* M^3 *eine triangulierte* 3*-Mannigfaltigkeit.*

1. *Eine* Orientierung *von* M^3 *ist eine Abbildung, die jedem Tetraeder der Triangulierung eine Orientierung zuordnet derart, dass die auf die (evtl. nichtexistierenden) gemeinsamen Seiten induzierten Orientierungen stets verschieden sind.*

2. *Die Mannigfaltigkeit* M^3 *heißt genau dann* orientierbar*, wenn sie eine Orientierung besitzt.*

Mit anderen Worten: eine triangulierte 3-Mannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn die Wahl einer "positiv-orientierten Basis" in einem vorgegebenen Tetraeder stetig auf die angrenzenden Tetraeder - und induktiv auf die ganze Mannigfaltigkeit - forgesetzt werden kann. Es kann bewiesen werden, dass die Existenz einer Orientierung unabhängig von der Wahl der Triangulierung ist.

Der Rand einer orientierbaren kompakten 3-Mannigfaltigkeit mit Rand ist eine orientierbare geschlossene 2-Mannigfaltigkeit (wobei die Orienterbarkeit einer Fläche auf die gleiche Art und Weise wie in Dimension 3 definiert werden kann). Die orientierbaren geschlossenen Flächen werden aber durch ihr

Geschlecht klassifiziert [1]: jede zusammenhängende orientierbare geschlossene Fläche mit Geschlecht $g \in \mathbb{N}$ ist homöomorph zu der Oberfläche einer Brezel mit genau g Löchern (für $g = 0$ kommt nur die 2-Sphäre heraus, für $g = 1$ der 2-Torus usw.).

2 Heegaard-Zerlegungen von orientierbaren geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten

2.1 Definition und Existenz

In diesem Abschnitt zerlegen wir jede geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeit in "einfache" Teile. Zunächst sollen diese definiert werden.

Definition 2.1 *Für $g \in \mathbb{N}$ ist ein* Henkelkörper mit g Henkeln *eine im $\mathbb{R}^3$ eingebettete kompakte 3-Mannigfaltigkeit, deren Rand eine zusammenhängende orientierte geschlossene Fläche mit Geschlecht g ist.*

Jeder Henkelkörper besitzt eine natürliche Orientierung. Bemerke auch, dass für festes g alle Henkelkörpern mit g Henkeln zueinander homöomorph sind.

Der zentrale Begriff dieses Vortrags trägt den Namen des Mathematikers Poul Heegaard, der als erster seine Wichtigkeit für die Topologie von 3-Mannigfaltigkeiten erkannte [2].

Definition 2.2 *Eine* Heegaard-Zerlegung *einer orientierbaren geschlossenen 3-Mannigfaltigkeit M^3 ist ein Homöomorphismus $M^3 \cong M_1^3 \cup_f M_2^3$, wobei:*

- *M_i^3 ein Henkelkörper mit g Henkeln ist, $i = 1, 2$,*
- *$f : \partial M_1^3 \longrightarrow \partial M_2^3$ ein Homöomorphismus ist,*
- *der Raum $M_1^3 \cup_f M_2^3 := {}^{M_1 \amalg M_2}\!/\!_{x \sim f(x)}$ die Quotiententopologie trägt.*

Es kann bewiesen werden, dass für einen beliebigen Henkelkörper mit g Henkeln M_1^3 und einen beliebigen Homöomorphismus $f : \partial M_1^3 \longrightarrow \partial M_1^3$ der topologische Raum $M_1^3 \cup_f M_1^3$ eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist (denn: zwei Halbbälle werden an ihrem gemeinsamen Rand mittels f zu einem offenen Ball zusammengeklebt), die außerdem orientierbar ist. Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist folgender

Satz 2.3 *Jede zusammenhängende orientierbare geschlossene 3-Mannigfaltigkeit besitzt eine Heegaard-Zerlegung.*

Beweis: Betrachte eine Triangulierung der geschlossenen orientierbaren 3-Mannigfaltigkeit M^3. Zuerst “verdicke” die Kanten dieser Triangulierung: betrachte eine sogenannte Tubenumgebung um die Kanten und Ecken. Konkret kann dies dadurch erreicht werden, dass Sphären um die Ecken und Zylinder um die Kanten gewählt werden und dann aneinander geklebt werden [Bild]. Der Rand dieser Umgebung ist dann eine in M^3 eingebettete geschlossene orientierbare Fläche Σ. Das Komplement $M^3 \setminus \Sigma$ von Σ in M^3 besteht aus genau zwei Zusammenhangskomponenten M_1^3 (das “Innere” der Tubenumgebung, d.h., die die Kanten und Ecken der Triangulierung enthaltende Komponente) und M_2^3 (das “Äußere”). Setze $\overline{M}_i^3 := M_i^3 \cup \Sigma$, $i = 1, 2$, dann ist $M = \overline{M}_1^3 \cup \overline{M}_2^3$.
Behauptung: $\overline{M}_1^3$ und $\overline{M}_2^3$ sind Henkelkörper mit gemeinsamem Rand Σ.
Beweis der Behauptung: Für $\overline{M}_1^3$ ist die Behauptung offensichtlich. Z.B. bildet die oben konstruierte Umgebung eines Tetraeders einen Henkelkörper mit Geschlecht 3. Betrachte nun die Triangulierung von M^3, deren Ecken die “Schwerpunkte” der Tetraeder der zuerst gewählten Triangulierung sind und deren Kanten Verbindungskurven zwischen Schwerpunkten zweier angrenzender Tetraeder sind (man akzeptiere ohne Beweis, dass dies wohl eine Triangulierung von M^3 definiert). Die zugehörige Tubenumgebung - die nach der vorigen Überlegung ein Henkelkörper ist - ist dann homöomorph zu $\overline{M}_2^3$ [Bild], insbesondere ist $\overline{M}_2^3$ selber ein Henkelkörper. Per Konstruktion haben $\overline{M}_1^3$ und $\overline{M}_2^3$ denselben Rand Σ in M^3. $\checkmark$
Da nach der Behauptung $\overline{M}_1^3$ und $\overline{M}_2^3$ Henkelkörper vom selben Geschlecht sind, sind sie homöomorph zueinander. Mit $f = \mathrm{id}_{\partial M_1^3}$ bekommt man $M = \overline{M}_1^3 \cup_f \overline{M}_2^3$ und den Satz. $\square$

Man beachte, dass möglicherweise viele verschiedene Heegaard-Zerlegungen einer kompakten 3-Mannigfaltigkeit existieren. Dies erläutern wir mit Beispielen.

2.2 Beispiele

Wir betrachten zunächst die 3-dimensionale Sphäre $S^3 := \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, |x| = 1\}$. Eine triviale Heegaard-Zerlegung von S^3 ist $S^3 = \overline{S}_+^3 \cup_{\mathrm{id}} \overline{S}_-^3$, wobei $\overline{S}_+^3 := \{x \in S^3 \,|\, x_4 \geq 0\}$ und $\overline{S}_-^3 := \{x \in S^3 \,|\, x_4 \leq 0\}$ mit $\partial\overline{S}_\pm^3 = \{x \in S^3 \,|\, x_4 = 0\} \cong S^2$. Der zugehörige Henkelkörper hat Geschlecht 0.

Eine andere Heegaard-Zerlegung von S^3 ist $S^3 = \mathbb{T}_1 \cup_{\mathrm{id}} \mathbb{T}_2$, wobei in komplexen Koordinaten $(z, w) \in \mathbb{C}^2$

$$\mathbb{T}_1 := \{(z,w) \in S^3 \,|\, |z| \leq |w|\} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbb{T}_2 := \{(z,w) \in S^3 \,|\, |z| \geq |w|\}.$$

Wir zeigen, dass $\mathbb{T}_1$ und $\mathbb{T}_2$ zu einem "vollen" Torus (d.h., einem Henkelkörper vom Geschlecht 1) homöomorph sind. Bemerke zuerst, dass durch die Vertauschung $(z, w) \mapsto (w, z)$ die Teilmenge $\mathbb{T}_2$ zu $\mathbb{T}_1$ homöomorph ist. Außerdem gilt $\mathbb{T}_1 = \{(ae^{i\alpha}, \sqrt{1-a^2} \cdot e^{i\beta}) \,|\, 0 \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha, \beta \in [0, 2\pi]\}$. Setze $\mathcal{T}^3 := \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1)^2 + x_3^2 \leq \frac{1}{2}\}$ (die Teilmenge $\mathcal{T}^3$ ist ein *voller Torus* im $\mathbb{R}^3$, der Durch Drehung einer Kreisscheibe vom Radius $\frac{1}{\sqrt{2}}$ um den Punkt $(1, 0, 0)^T$ in der x_1x_3-Ebene um die x_3-Achse entsteht) und betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : [0, \frac{1}{\sqrt{2}}] \times [0, 2\pi]^2 \;&\longrightarrow\; \mathcal{T}^3 \\ (a, \alpha, \beta) \;&\longmapsto\; \begin{pmatrix} (1 + a\cos(\alpha))\cos(\beta) \\ (1 + a\cos(\alpha))\sin(\beta) \\ a\sin(\alpha) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Abbildung ϕ ist wohldefiniert, stetig und surjektiv - injektiv aber nicht! Z.B. werden, für ein festes $\beta \in [0, 2\pi]$, alle Punkte $(0, \alpha, \beta)$ auf den Punkt $(\cos(\beta), \sin(\beta), 0)^T$ abgebildet. Sei $\sim_\phi$ die durch ϕ induzierte Äquivalenzrelation (d.h., $x \sim y :\iff \phi(x) = \phi(y)$) und versehe den zugehörigen Quotientenraum $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}] \times [0, 2\pi]^2/_{\sim_\phi}$ mit der Quotiententopologie. Dann induziert ϕ eine stetige bijektive Abbildung $\hat{\phi} : [0, \frac{1}{\sqrt{2}}] \times [0, 2\pi]^2/_{\sim_\phi} \longrightarrow \mathcal{T}^3$ und wegen der Kompaktheit der Quelle ist $\hat{\phi}$ automatisch ein Homöomorphismus. Andererseits ist die Abbildung $\chi : [0, \frac{1}{\sqrt{2}}] \times [0, 2\pi]^2 \longrightarrow \mathbb{T}_1$, $(a, \alpha, \beta) \mapsto (ae^{i\alpha}, \sqrt{1-a^2} \cdot e^{i\beta})$, auch stetig, surjektiv und die von χ induzierte Äquivalenzrelation stimmt mit $\sim_\phi$ überein[1] Insbesondere induziert χ einen Homöomorphismus $\hat{\chi} : [0, \frac{1}{\sqrt{2}}] \times [0, 2\pi]^2/_{\sim_\phi} \longrightarrow \mathbb{T}_1$ und insgesamt ist $\hat{\phi} \circ \hat{\chi}^{-1}$ ein Homöomorphismus $\mathbb{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}^3$. Der Rand von $\mathbb{T}_i$ in S^3 ist - in den obigen Koordinaten z, w - gegeben durch

$$\partial\mathbb{T}_1 = \partial\mathbb{T}_2 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |z| = |w| = \frac{1}{\sqrt{2}}\} = S^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times S^1(\frac{1}{\sqrt{2}}),$$

welches per Definition zu einem 2-Torus homöomorph ist.

[1] Für $(a, \alpha, \beta), (a', \alpha', \beta') \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}] \times [0, 2\pi]^2$ gilt $\phi(a, \alpha, \beta) = \phi(a', \alpha', \beta') \iff a = a'$ und $\beta' - \beta \in 2\pi\mathbb{Z}$, mit $\alpha' - \alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$ falls $a \neq 0$. Dasgleiche gilt für χ.

3 Heegaard-Zerlegungen von orientierbaren kompakten 3-Mannigfaltigkeiten mit Rand

In diesem Abschnitt führen wir ein ähnliches Verfahren für orientierbare kompakte 3-Mannigfaltigkeit *mit Rand* durch. Der Begriff von Heegaard-Zerlegung wird in diesem Fall heikler zu definieren.

Definition 3.1 *Eine* Heegaard-Zerlegung *einer orientierbaren kompakten* 3-*Mannigfaltigkeit* M^3 *mit Rand ist ein Homöomorphismus* $M^3 \cong M_1^3 \cup_f M_2^3$, *wobei:*

- M_i^3, $i = 1, 2$ *das Komplement in einem Henkelkörper* H *des Inneren eines Henkelkörpers* H' *(möglicherweise mit anderem Geschlecht) ist, welchen* H *symmetrisch schneidet [Bild],*

- $f : \partial H \setminus \overset{\circ}{H'} \longrightarrow \partial H \setminus \overset{\circ}{H'}$ *ein Homöomorphismus ist,*

- *der Raum* $M_1^3 \cup_f M_2^3 := {}^{M_1 \amalg M_2}\!/_{x \sim f(x)}$ *die Quotiententopologie trägt.*

Man beachte, dass die "resultierende" 3-Mannigfaltigkeit M^3 kompakt, orientierbar und mit Rand $\partial H'$ ist [Bild]. Außerdem ist $H \setminus \overset{\circ}{H'}$ ein Henkelkörper mit $h + h'$ Henkeln, falls H ein Henkelkörper mit h Henkeln (bzw. H' mit h' Henkeln) ist und den anderen Henkelkörper H' symmetrisch schneidet [Bild].

Wie im geschlossenen Fall gilt die Existenz einer Heegaard-Zerlegung allgemein:

Satz 3.2 *Jede orientierbare kompakte* 3-*Mannigfaltigkeit mit zusammenhängendem Rand besitzt eine Heegaard-Zerlegung.*

Beweis: Der Rand ∂M^3 von M^3 ist eine zusammenhängende orientierbare geschlossene Fläche vom Geschlecht $g \in \mathbb{N}$. Sei N^3 ein Henkelkörper vom Geschlecht g und $F : \partial M^3 \longrightarrow \partial N^3$ ein beliebiger Homöomorphismus. Betrachte die kompakte 3-Mannigfaltigkeit ohne Rand $L^3 := M^3 \cup_F N^3$. Sei S eine Seele von N^3, d.h., S ist ein eindimensionales Deformationsretrakt von N^3 [Bild]. Man akzeptiere ohne Beweis, dass - bis auf kleine Deformationen der gewählten Seele - eine Triangulierung von L^3 existiert, die S als Teilkomplex enthält (jede Strecke von S ist eine Kante der Triangulierung). Wie im Beweis von Satz 2.3 betrachten wir eine (abgeschlossene) Tubenumgebung L_1^3 der Kanten und Ecken dieser Triangulierung und setzen $L_2^3 := \overline{L^3 \setminus L_1^3}$.

Wir wissen schon, dass L_1^3 und L_2^3 Henkelkörper vomselben Geschlecht sind. Nun lassen wir eine Isotopie $[0,1]\times L^3 \xrightarrow{\phi} L^3$ (jedes $\phi(t,\cdot) : L^3 \longrightarrow L^3$ ist ein Homöomorphismus) auf L^3 los mit $\phi(0,\cdot) = \mathrm{id}_{L^3}$ und so, dass $\phi_1 := \phi(1,\cdot)$ eine "Hälfte" von S festlässt und die andere Hälfte in L_2^3 abbildet, wobei beide Hälften zusammenziehbar in L^3 sind [Bild]. Sei H' eine Tubenumgebung von $\phi_1(S)$ in L^3. Ist H' hinreichend dünn, so ist H' homöomorph zu N^3, insbesondere ist das Komplement von $\overset{\circ}{H}{}'$ in L^3 homöomorph zur ursprünglichen 3-Mannigfaltigkeit M^3 (hier geht ein, dass die Deformation von S durch Isotopie erfolgt). Setze $M_i^3 := L_i^3 \setminus \overset{\circ}{H}{}'$, $i = 1,2$ und $f := \mathrm{id}$, dann ist $M_1^3 \cup_f M_2^3 = L^3 \setminus \overset{\circ}{H}{}' \cong M^3$ eine Heegaard-Zerlegung von M^3. $\square$

Wie Heegaard-Zerlegungen mit Hilfe von Diagrammen beschrieben und charakterisiert werden können, ist der Gegenstand des nächsten Vortrags.

Literatur

[1] E.D. Bloch, *A first course in geometric topology and differential geometry*, Birkhäuser, Boston, 1997.

[2] P. Heegaard, *Forstudier til en topologisk Teori for de algebraiske Fladers Sammenhang* [Preliminary studies for a topological theory of the connectivity of algebraic surfaces], Doktorarbeit, Kopenhagen, 1898.

[3] E.E. Moise, *Affine structures in 3-manifolds. V: The triangulation theorem and Hauptvermutung*, Ann. Math. **56** (1952), no. 2, 96–114.

[4] ———, *Affine structures in 3-manifolds. VIII: Invariance of the knot-types; local tame imbedding*, Ann. Math. **59** (1954), no. 2, 159–170.

[5] V.V. Prasolov, A.B. Sossinsky, *Knots, links, braids and 3-manifolds. An introduction to the new invariants in low-dimensional topology*, Translations of Mathematical Monographs **154**, American Mathematical Society, 1997.