Differentialoperatoren und asymptotische Schnitte

N. Ginoux

Universität Potsdam - Sommersemester 2005

20. Februar 2007

Dieser Vortrag bezieht sich auf die zwei ersten Abschnitte des zweiten Kapitels von [2].

Notationen:

- Sei M stets eine d-dimensionale (glatte) Mannigfaltigkeit, und $E, F \longrightarrow M$ (glatte) $\mathbb{K}$-Vektorbündel über M (mit $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) mit $\mathrm{rg}_{\mathbb{K}}(E) =: m$ bzw. $\mathrm{rg}_{\mathbb{K}}(F) =: n$.
- Sei $C^\infty(M)$ die $\mathbb{K}$-Algebra aller glatten $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen auf M.
- Der $C^\infty(M)$-Modul aller glatten Schnitte eines Vektorbündels E wird mit $C^\infty(E)$ bezeichnet.
- Der $\mathbb{K}$-Vektorraum bzw. der $C^\infty(M)$-Modul aller $\mathbb{K}$- bzw. $C^\infty(M)$-linearen Homomorphismen von $C^\infty(E)$ nach $C^\infty(F)$ wird mit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C^\infty(E), C^\infty(F))$ bzw. $\mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(C^\infty(E), C^\infty(F))$ bezeichnet.

Inhaltsverzeichnis

1 Differentialoperatoren

1.1 Differentialoperatoren nullter Ordnung

Definition 1.1 *Ein* Vektorbündelhomomorphismus *von E nach F ist ein glatter Schnitt von* $\mathrm{Hom}(E,F) \longrightarrow M$.

Zur Erinnerung: das Vektorbündel $\mathrm{Hom}(E,F) \longrightarrow M$ ist dasjenige, dessen Faser über $x \in M$ der Vektorraum $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E_x, F_x)$ ist. Ein Vektorbündelhomomorphismus von E nach F ist nach Definition eine glatte Abbildung $T : M \longrightarrow \mathrm{Hom}(E,F)$, s.d. für jedes $x \in M$ die Abbildung $T_x := T(x) : E_x \longrightarrow F_x$ ($\mathbb{K}$-)linear ist.
Die Menge $C^\infty(\mathrm{Hom}(E,F))$ bezeichnet also die Menge aller Vektorbündelhomomorphismen von E nach F.

Lemma 1.2 *Es existiert ein Isomorphismus von $C^\infty(M)$-Moduln*

$$C^\infty(\mathrm{Hom}(E,F)) \cong \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(C^\infty(E), C^\infty(F)).$$

Beweis: Definiere die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \Phi : C^\infty(\mathrm{Hom}(E,F)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(C^\infty(E), C^\infty(F)) \\ T & \longmapsto & \Big(C^\infty(E) \to C^\infty(F), \quad s \mapsto (x \mapsto T_x(s_x) \in F_x)\Big). \end{array}$$

Die auf der rechten Seite stehende Abbildung ist eine wohldefinierte $C^\infty(M)$-lineare Abbildung von $C^\infty(E)$ nach $C^\infty(F)$. Dass Φ eine Umkehrabbildung besitzt, liegt an der folgenden Behauptung:

Behauptung: Sei $L \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(C^\infty(E), C^\infty(F))$ und $s \in C^\infty(E)$, dann gilt für jedes $x \in M$: $(Ls)_x \in F_x$ hängt nur von $s_x \in E_x$ ab (und natürlich *linear* davon).

Beweis der Behauptung: Die Behauptung lässt sich durch folgende Schritte beweisen:

1. Jedes $L \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(C^\infty(E), C^\infty(F))$ kann *lokalisiert* werden, d.h.: sei $U \subset M$ (nichtleere) offene Teilmenge, dann existiert ein eindeutiges Element $L_{|U} \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(U)}(C^\infty(E_{|U}), C^\infty(F_{|U}))$ s.d. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C^\infty(E) \arrow[r, "\text{Einschr.}"] \arrow[d, "L"] & C^\infty(E_{|U}) \arrow[d, "L_{|U}"] \\ C^\infty(F) \arrow[r, "\text{Einschr.}"] & C^\infty(F_{|U}) \end{tikzcd} \qquad (1)$$

   kommutiert.
   Denn: Sei $s \in C^\infty(E_{|U})$ und $x \in U$. Definiere $(L_{|U}s)_x := (L(fs))_x \in F_x$, wobei $f \in C^\infty(M)$ mit $\mathrm{supp}(f) \subset U$ *und* $f \equiv 1$ um x (ein solches f kann man immer konstruieren). Diese Definition hat Sinn (denn $fs \in C^\infty(E)$) und hängt nicht von

der Wahl eines solchen $f \in C^\infty(M)$ ab, denn: sind f_1 und f_2 zwei solche Funktionen, so gilt

$$(L((f_1 - f_2)s))_x = 0.$$

Begründung: Der Schnitt $(f_1 - f_2)s$ verschwindet auf einer offenen Umgebung von x. Gilt aber $s_{|\Omega} = 0$ für ein $s \in C^\infty(E)$, und eine offene Teilmenge Ω, so gilt auch $(Ls)_{|\Omega} = 0$ für alle $L \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(C^\infty(E), C^\infty(F))$. Der Grund dafür ist: sei $y \in \Omega$ fest und betrachte $g \in C^\infty(M)$ mit $\mathrm{supp}(g) \subset \Omega$ und $g(y) = 1$, dann gilt wegen der $C^\infty(M)$-Linearität von L

$$\begin{aligned} L(gs) &= gLs \\ &= 0, \end{aligned}$$

da $gs = 0$. Insbesondere gilt $g(y)(Ls)_y = 0$ und daher $(Ls)_y = 0$; dies gilt für jedes $y \in \Omega$, was $(Ls)_{|\Omega} = 0$ beweist.
Dies zeigt, dass $L_{|U}$ wohldefiniert ist. Die anderen Eigenschaften von $L_{|U}$ sind nach seiner Definition leicht nachzuprüfen.

$\checkmark$

2. Sei $U \subset M$ eine feste offene Umgebung von x, die E trivialisiert, d.h.

$$E_{|U} \cong U \times \mathbb{K}^m.$$

Seien $\{u_i\}_{1 \le i \le m}$ glatte Schnitte von $E_{|U}$ s.d. in jedem Punkt $x \in M$ die Vektoren $\{(u_i)_x\}_{1 \le i \le m}$ eine *Basis* von E_x bilden.
Sei $s \in C^\infty(E)$ fest und zerlege $s_{|U}$ in die Form

$$s = \sum_{i=1}^m f_i u_i,$$

wobei $f_i \in C^\infty(U)$ für alle $1 \le i \le m$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (Ls)_{|U} &\overset{(1)}{=} L_{|U} s_{|U} \\ &= L_{|U}\left(\sum_{i=1}^m f_i u_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^m L_{|U}(f_i u_i) \\ &= \sum_{i=1}^m f_i L_{|U} u_i. \end{aligned}$$

Daraus folgt insbesondere: verschwindet s in x, so gilt $f_i(x) = 0$ für alle $1 \le i \le m$, und somit $(Ls)_x = 0$. Dies beweist die Behauptung.

$\checkmark$

Definiere dann die Abbildung

$$\begin{aligned}\Psi : \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(C^\infty(E), C^\infty(F)) &\longrightarrow C^\infty(\mathrm{Hom}(E,F))\\ T &\longmapsto \Big(M \to \mathrm{Hom}(E,F), \quad x \mapsto (E_x \to F_x,\ u \mapsto (Ts)_x)\Big),\end{aligned}$$

wobei $s \in C^\infty(E)$ mit $s_x = u$. Die Abbildung Ψ ist wegen der vorigen Behauptung wohldefiniert. Es ist nicht schwierig, nachzuweisen, dass Ψ die Umkehrabbildung von Φ ist. Somit liefert Φ einen Isomorphismus von $C^\infty(\mathrm{Hom}(E,F))$ auf $\mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(C^\infty(E), C^\infty(F))$.

□

Dieses Lemma besagt hauptsächlich, dass ein $L \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C^\infty(E), C^\infty(F))$ genau dann $C^\infty(M)$-linear ist, wenn es *punktweise* linear ist, d.h., wenn man L auf Elementen von nur E_x anwenden kann, für alle $x \in M$.

Definition 1.3

1. *Sei $f \in C^\infty(M)$, man bezeichnet auch mit f den Vektorbündelhomomorphismus "Multiplikation mit f":*

$$\begin{aligned} f : C^\infty(E) &\longrightarrow C^\infty(E)\\ s &\longmapsto fs,\end{aligned}$$

   für alle Vektorbündel $E \longrightarrow M$.

2. *Für alle $L \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C^\infty(E), C^\infty(F))$ und $f \in C^\infty(M)$ wird $[L,f]$ definiert durch*

$$[L,f] := L \circ f - f \circ L \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C^\infty(E), C^\infty(F)),$$

   d.h. $[L,f]s = L(fs) - fLs$ für alle $s \in C^\infty(E)$.

3. *Ein* Differentialoperator nullter Ordnung *von E nach F ist ein Element $L \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(C^\infty(E), C^\infty(F))$. Die Menge aller Differentialoperatoren nullter Ordnung von E nach F wird mit $\mathcal{D}_0(E,F)$ bezeichnet.*

Nach Lemma 1.2 ist $L \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C^\infty(E), C^\infty(F))$ genau dann Differentialoperator nullter Ordnung, wenn L einen Vektorbündelhomomorphismus definieren kann.
Nach Definition wird ein Differentialoperator nullter Ordnung durch die folgende Eigenschaft charakterisiert:

Lemma 1.4 *Sei $L \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C^\infty(E), C^\infty(F))$. Dann gilt:*

$$L \in \mathcal{D}_0(E,F) \iff [L,f] = 0 \qquad \forall f \in C^\infty(M).$$

Dass nicht jedes $L \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C^\infty(E), C^\infty(F))$ diese Bedingung erfüllt, führt zum Begriff von Differentialoperator höherer Ordnung.

1.2 Differentialoperatoren erster Ordnung

Definition 1.5 *Ein* $L \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C^\infty(E), C^\infty(F))$ *heißt* Differentialoperator von Ordnung höchstens 1 *g.d.w.*

$$\forall f \in C^\infty(M), \quad [L, f] \in \mathcal{D}_0(E, F).$$

Die Menge aller Differentialoperatoren von Ordnung höchstens 1 *wird mit* $\mathcal{D}_1(E, F)$ *bezeichnet.*

Bemerkung 1.6 Es gilt offenbar $\mathcal{D}_0(E, F) \subset \mathcal{D}_1(E, F)$.

Lemma 1.7

1. *Für alle* $L \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C^\infty(E), C^\infty(F))$ *und* $f, g \in C^\infty(M)$ *gilt*
$$[L, fg] = [L, f]g + f[L, g]. \tag{2}$$
2. *Jedes* $L \in \mathcal{D}_1(E, F)$ *lässt sich lokalisieren wie in (1).*
3. *Für alle* $L \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C^\infty(E), C^\infty(F))$, $f \in C^\infty(M)$ *und* $x \in M$ *hängt* $[L, f]_x \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E_x, F_x)$ *nur von* $d_x f$ *(und natürlich* linear *davon) ab.*

Beweis:

1. Es gilt:
$$\begin{aligned} [L, fg] &= L \circ f \circ g - f \circ g \circ L \\ &= (L \circ f - f \circ L) \circ g + f \circ L \circ g - f \circ g \circ L \\ &= [L, f]g + f[L, g]. \end{aligned}$$
2. Wie im Beweis von Lemma 1.2 schon begründet wurde, reicht es, Folgendes zu zeigen: sei $U \subset M$ feste offene Teilmenge und $s \in C^\infty(E)$ mit $s_{|U} = 0$, dann gilt $(Ls)_{|U} = 0$.
Betrachte dafür ein $f \in C^\infty(M)$ mit $\mathrm{supp}(f) \subset U$, dann gilt nach Definition
$$\begin{aligned} ([L, f]s)_{|U} &= L(fs)_{|U} - f_{|U}(Ls)_{|U} \\ &= -f_{|U}(Ls)_{|U}, \end{aligned}$$
da $fs = 0$. Wegen $[L, f] \in \mathcal{D}_0(E, F)$ gilt auch
$$\begin{aligned} ([L, f]s)_{|U} &\overset{(1)}{=} [L, f]_{|U} s_{|U} \\ &= 0. \end{aligned}$$
Mit den beiden zusammen ergibt sich $f_{|U}(Ls)_{|U} = 0$. Für jedes $x \in U$ kann man aber eine solche Funktion f so konstruieren, dass $f(x) = 1$, so dass $(Ls)_x = 0$. Dies zeigt die Behauptung.

3. Wir entwickeln f nach Taylor um x; natürlich ist es i.A. (d.h., auf der ganzen Mannigfaltigkeit M) *nicht* definiert, und lokal auch nicht, weil es von der Wahl der Koordinaten um x abhängt. Wähle aber eine Karte (U, φ) von M um x, d.h. U ist offene Umgebung von x und $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ ist Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^d$. Da nach der letzten Aussage L sich lokalisieren lässt, kann man L auf U einschränken. Die Funktion $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{K}$ ist C^∞, lässt sich also Taylor-entwickeln bis zur ersten Ordnung in $\varphi(x)$. Damit die Notationen nicht zu kompliziert werden, schreiben wir die Taylor-Entwicklung von f selbst in x, und meinen damit die von $f \circ \varphi^{-1}$ in $\varphi(x)$. Es gilt, für alle y nahe x:

$$f(y) = f(x) + d_x f(y - x) + \|y - x\| \varepsilon(y - x),$$

wobei $\| \cdot \|$ eine feste Norm auf U ist (egal welche wir wählen, alle sind äquivalent auf $\mathbb{R}^d$) und $\varepsilon(y - x) \underset{y \to x}{\longrightarrow} 0$. Es gilt dann für $[L, f]_x$:

$$[L, f]_x = [L, f(x)]_x + [L, d_x f(\cdot - x)]_x + [L, \| \cdot - x\| \varepsilon(\cdot - x)]_x$$

(hierbei bezeichnet $g(\cdot - x)$ die Abbildung $y \mapsto g(y - x)$). Da $f(x) \in \mathbb{K}$ eine *Konstante* ist, gilt $[L, f(x)] = 0$. Wegen (2) gilt

$$\begin{aligned} [L, fg]_x &\overset{(2)}{=} ([L, f]g + f[L, g])_x \\ &\overset{([L,f] \in \mathcal{D}_0(E,F))}{=} (g[L, f] + f[L, g])_x \\ &= g(x)[L, f]_x + f(x)[L, g]_x, \end{aligned}$$

so dass $[L, fg]_x = 0$ sobald $f(x) = g(x) = 0$. Hier verschwinden die beiden Funktionen $\| \cdot - x\|$ und $\varepsilon(\cdot - x)$ in x, was $[L, \| \cdot - x\| \varepsilon(\cdot - x)]_x = 0$ beweist.
Es gilt also: $[L, f]_x = [L, d_x f(\cdot - x)]_x$. Bemerke, dass die rechte Seite von dieser Gleichung *a priori* von der Karte φ abhängt, doch aber *nicht* wegen der linken Seite, die unabhängig von φ ist. Es folgt daraus, dass $[L, f]_x = 0$ sobald $d_x f = 0$ (die Abbildung $d_x f$ hängt *nicht* von φ ab), was die Behauptung beweist.

□

Definition 1.8 *Sei $L \in \mathcal{D}_1(E, F)$ und $x \in M$. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \sigma_1(L) : T_x^* M &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E_x, F_x) \\ \xi &\longmapsto [L, f]_x, \end{aligned}$$

wobei $f \in C^\infty(M)$ mit $T_x f = \xi$, heißt Hauptsymbol *von L in x.*

Bemerke, dass das Hauptsymbol wohldefiniert ist nach Lemma 1.7.

Proposition 1.9 (Beschreibung von $L \in \mathcal{D}_1(E, F)$ in lokalen Koordinaten)
Sei $L \in \mathcal{D}_1(E, F)$ und $U \subset M$ eine Koordinatenumgebung von einem Punkt $x \in M$, die E und F trivialisiert. Sei $\{u_i\}_{1 \leq i \leq m}$ eine (glatte) Trivialisierung von $E_{|U}$. Dann gilt:

1. *Für alle* $s \in C^\infty(E_{|_U})$,

$$Ls = \sum_{r=1}^{d} A^r \frac{\partial s}{\partial x_r} + Bs,$$

wobei $B \in \mathcal{D}_0(E_{|_U}, F_{|_U})$, $A^r : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ *ist* C^∞, *und* $\frac{\partial s}{\partial x_r} := \sum_{i=1}^m \frac{\partial s_i}{\partial x_r} u_i$ *für* $s = \sum_{i=1}^m s_i u_i$.

2. *Für alle* $\xi = \sum_{r=1}^d \xi_r dx_r \in T_x^* M$,

$$\sigma_1(L)(\xi) = \sum_{r=1}^{d} \xi_r A^r(x).$$

Beweis:

Zu 1. Sei $s = \sum_{i=1}^m s_i u_i \in C^\infty(E_{|_U})$, dann gilt

$$\begin{aligned} Ls &= \sum_{i=1}^{m} L(s_i u_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} [L, s_i] u_i + s_i L u_i. \end{aligned}$$

Setze $Bs := \sum_{i=1}^m s_i L u_i$, dann ist $B \in \mathcal{D}_0(E_{|_U}, F_{|_U})$. Nach Lemma 1.7 hängt, für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$, das Element $[L, s_i] \in \mathcal{D}_0(E_{|_U}, F_{|_U})$ punktweise linear von ds_i ab:

$$[L, s_i] u_i = \sum_{r=1}^{d} \frac{\partial s_i}{\partial x_r} A_i^r u_i,$$

mit $A_i^r u_i \in \mathbb{K}^n$ punktweise auf U, für alle $1 \leq r \leq d$. Definiere die Abbildung[1] $A^r : U \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ durch

$$A^r u_i := A_i^r u_i$$

für alle $1 \leq i \leq m$ (punktweise ist A^r als lineare Abbildung wohldefiniert, und hängt offenbar glatt vom Fusspunkt ab), dann gilt die Behauptung.

Zu 2. Sei $f \in C^\infty(U)$ und $s \in C^\infty(E_{|_U})$, dann gilt

$$\begin{aligned} [L, f]s &= \sum_{r=1}^{d} A^r \left(\frac{\partial f}{\partial x_r} s + f \frac{\partial s}{\partial x_r} \right) + B(fs) - f \Big(\sum_{r=1}^{d} A^r \frac{\partial s}{\partial x_r} + Bs \Big) \\ &= \sum_{r=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_r} A^r s, \end{aligned}$$

was die Behauptung beweist.

□

[1] Aus der "Taylor-Entwicklung" im Beweis des Lemmas 1.7 folgt, dass A^r durch $A^r = [L, dx_r(\cdot - x)]_x$ gegeben ist, danke Dennis.

Beispiele 1.10

a) Sei $M := I$ offenes Intervall in $\mathbb{R}$, $E = F := I \times \mathbb{K}^m$, und $L := \frac{d}{dx}$ (übliche Ableitung). Dann ist L Differentialoperator erster Ordnung ($L \in \mathcal{D}_1(E, F) \setminus \mathcal{D}_0(E, F)$) und sein Hauptsymbol in $x \in I$ ist gegeben durch

$$\sigma_1(\frac{d}{dx})(\xi) = \xi \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^m}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}$.

a') Allgemeiner sei $M := \Omega$ offene Teilmenge in $\mathbb{R}^d$, $E = F := \Omega \times \mathbb{K}^m$, und $L := \frac{\partial}{\partial x_i}$ für ein $i \in \{1, \ldots, d\}$ (übliche partielle Ableitung nach x_i). Dann ist L Differentialoperator erster Ordnung und sein Hauptsymbol in $x \in \Omega$ ist gegeben durch

$$\sigma_1(\frac{\partial}{\partial x_i})(\xi) = \xi_i \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^m}$$

für alle $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$.

b) Sei M wieder eine beliebige Mannigfaltigkeit. Für ein $p \in \{0, \ldots, d-1\}$ setze $E := \Lambda^p T^*M$ (reelles Vektorbündel der alternierten p-Formen auf TM; für $p = 0$ setze $E := M \times \mathbb{R}$) bzw. $F := \Lambda^{p+1} T^*M$ und betrachte $L := d$ (äußeres Differential). Dann ist L Differentialoperator erster Ordnung von E nach F, und sein Hauptsymbol in $x \in M$ ist gegeben durch

$$\sigma_1(d)(\xi) = \xi \wedge \cdot : \Lambda^p T_x^*M \longrightarrow \Lambda^{p+1} T_x^*M$$

für alle $\xi \in T_x^*M$. Denn für jedes $f \in C^\infty(M)$ und jede p-Form (d.h., Schnitt aus E) ω auf M gilt:

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega.$$

b') Trägt M zusätzlich eine riemannsche Metrik, so kann man das Kodifferential $L := \delta$ bilden. Dies ist ein Differentialoperator erster Ordnung von $\Lambda^{p+1} T^*M$ nach $\Lambda^p T^*M$, dessen Hauptsymbol in $x \in M$ gegeben ist durch

$$\sigma_1(\delta)(\xi) = -\xi^\sharp \lrcorner \cdot : \Lambda^{p+1} T_x^*M \longrightarrow \Lambda^p T_x^*M$$

für alle $\xi \in T_x^*M$, wobei $\xi^\sharp \in T_xM$ der durch die Metrik gelieferte duale Vektor zu ξ ist.

c) Sei (M, g) eine riemannsche *spin* Mannigfaltigkeit [3]. Dann trägt M ein komplexes Vektorbündel ΣM, das das *Spinorbündel* heißt. Dieses besitzt die folgende bemerkenswerte Eigenschaft, dass eine lineare Abbildung (die sogenannte *Clifford-Multiplikation*)

$$TM \otimes \Sigma M \longrightarrow \Sigma M, \quad X \otimes \psi \longmapsto X \cdot \psi,$$

so existiert, dass

$$X \cdot (Y \cdot \psi) + Y \cdot (X \cdot \psi) = -2g(X, Y)\psi \tag{3}$$

für alle $X, Y \in TM$ und $\psi \in \Sigma M$.
Setze $E = F := \Sigma M$ und betrachte den sogenannten *Dirac-Operator* D, der definiert ist durch

$$D\psi := \sum_{i=1}^{d} e_i \cdot \nabla_{e_i}\psi$$

für alle $\psi \in C^\infty(\Sigma M)$, wobei $\{e_i\}_{1\leq i\leq d}$ eine lokale orthonormale Basis von TM ist und ∇ der sogenannte *Levi-Civita-Zusammenhang* auf ΣM (der die Leibniz-Regel bzgl. der Clifford-Multiplikation erfüllt, siehe [3]).
Dann ist D Differentialoperator erster Ordnung von E nach F, dessen Hauptsymbol in $x \in M$ gegeben ist durch

$$\sigma_1(D)(\xi) = \xi^\sharp \cdot \mathrm{Id}_{\Sigma_x M} : \Sigma_x M \longrightarrow \Sigma_x M$$

für alle $\xi \in T_x^* M$. Denn es gilt für jedes $f \in C^\infty(M)$ und jedes $\psi \in C^\infty(\Sigma M)$

$$\begin{aligned} D(f\psi) &= \sum_{i=1}^{d} e_i \cdot \nabla_{e_i}(f\psi) \\ &= \sum_{i=1}^{d} e_i \cdot (e_i(f)\psi + f\nabla_{e_i}\psi) \\ &= \sum_{i=1}^{d} e_i(f)e_i \cdot \psi + fe_i \cdot \nabla_{e_i}\psi \\ &= (df)^\sharp \cdot \psi + fD\psi. \end{aligned}$$

1.3 Differentialoperatoren höherer Ordnung

Definition 1.11

i) Definiere per Induktion über $k \in \mathbb{N}$ die Menge $\mathcal{D}_{k+1}(E,F)$ aller Differentialoperatoren von Ordnung höchstens $k+1$ *von E nach F durch*

$$\mathcal{D}_{k+1}(E,F) := \{L \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C^\infty(E), C^\infty(F)) \text{ s.d. } [L,f] \in \mathcal{D}_k(E,F) \quad \forall f \in C^\infty(M)\}.$$

ii) Definiere die Menge $\mathcal{D}(E,F)$ aller Differentialoperatoren *von E nach F durch*

$$\mathcal{D}(E,F) := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_k(E,F).$$

iii) Der Grad *eines $L \in \mathcal{D}(E,F)$ (wird mit $d^o L$ bezeichnet) ist das kleinste $k \in \mathbb{N}$ s.d. $L \in \mathcal{D}_k(E,F)$.*

Es gibt eine äquivalente Definition von Differentialoperator, siehe Proposition 1.19.

Bemerkungen 1.12

1. Für $k = 0$ stimmt diese Definition von $\mathcal{D}_{k+1}(E,F)$ mit der Definition 1.5 überein.

2. Es gilt offenbar $\mathcal{D}_k(E,F) \subset \mathcal{D}_{k+1}(E,F)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Lemma 1.13

1. Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann kann jedes $L \in \mathcal{D}_k(E,F)$ lokalisiert werden (wie in (1)).

2. Sei G ein weiteres $\mathbb{K}$-Vektorbündel auf M. Sind $L \in \mathcal{D}_k(E,F)$ und $L' \in \mathcal{D}_l(F,G)$, so ist $L' \circ L \in \mathbb{D}_{k+l}(E,G)$. Insbesondere für $E = F = G$ ist die Menge $\mathcal{D}(E,E)$ (assoziative) $\mathbb{Z}$-filtrierte $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins.

3. Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ und $L \in \mathcal{D}_k(E,F)$, dann gilt: für alle $f_1, \ldots, f_k \in C^\infty(M)$ und $x \in M$ ist

$$[[\ldots[[L,f_1],f_2],\ldots],f_k]_x \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E_x,F_x)$$

symmetrische multilineare Abbildung in den $d_x f_i$'s.

Beweis:

Zu 1. Der Beweis geht durch Induktion über k. Es gilt schon für $k = 0$ und $k = 1$ (Lemma 1.7). Angenommen, es gilt für $k-1$. Sei $U \subset M$ (nichtleere) offene Teilmenge und $s \in C^\infty(E)$ mit $s_{|_U} = 0$. Wegen

$$\begin{aligned} (\underbrace{[L,f]}_{\in \mathcal{D}_{k-1}(E,F)} s)_{|_U} &= L(\underbrace{fs}_{=0})_{|_U} - f(Ls)_{|_U} \\ &= -f(Ls)_{|_U} \end{aligned}$$

für alle $f \in C^\infty(M)$ mit $\mathrm{supp}(f) \subset U$, muss $f(Ls)_{|_U}$ (und daher auch $(Ls)_{|_U}$) nach der Induktionsvoraussetzung verschwinden. Dies zeigt die Behauptung.

Zu 2. Wegen der Inklusion $\mathcal{D}_k(E,F) \subset \mathcal{D}_{k+1}(E,F)$ ist $\mathcal{D}(E,F)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Seien nun $L \in \mathcal{D}_k(E,F)$ und $L' \in \mathcal{D}_l(F,G)$, dann gilt, für jede $f \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned} [L' \circ L, f] &= L' \circ L \circ f - f \circ L' \circ L \\ &= L' \circ [L,f] + L' \circ f \circ L - f \circ L' \circ L \\ &= L' \circ [L,f] + [L',f] \circ L, \end{aligned}$$

was durch Induktion über $k+l \in \mathbb{N}$ zeigt, dass $L' \circ L \in \mathcal{D}_{k+l}(E,G)$ (dies gilt offenbar für $k = 0$ oder $l = 0$). Somit ist $\mathcal{D}(E,E)$ eine $\mathbb{Z}$-filtrierte Algebra.

Zu 3. Sei $L \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C^\infty(E), C^\infty(F))$ und $f, g \in C^\infty(M)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} [[L,f],g] &= (L \circ f - f \circ L) \circ g - g \circ (L \circ f - f \circ L) \\ &= L \circ f \circ g - g \circ L \circ f + g \circ f \circ L - f \circ L \circ g \\ &\overset{(f \circ g = g \circ f)}{=} L \circ g \circ f - g \circ L \circ f + f \circ g \circ L - f \circ L \circ g \\ &= [L,g] \circ f - f \circ [L,g] \\ &= [[L,g],f], \end{aligned}$$

was durch Induktion über k schon beweist, dass $[[\ldots[[L,f_1],f_2],\ldots],f_k] \in \mathcal{D}_0(E,F)$ symmetrisch (und natürlich $\mathbb{K}$-multilinear) von den f_i's abhängt.

Legen wir $f_1, \ldots, f_{k-1}$ fest. Dann ist $[[\ldots[[L,f_1],f_2],\ldots],f_{k-1}] \in \mathcal{D}_1(E,F)$. Nach Lemma 1.7 hängt der Homomorphismus $[[[\ldots[[L,f_1],f_2],\ldots],f_{k-1}],f_k]_x$ nur von $d_x f_k$ (und linear davon) ab. Da aber $[[\ldots[[L,f_1],f_2],\ldots],f_k]_x$ symmetrisch in den f_i's ist, muss also $[[\ldots[[L,f_1],f_2],\ldots],f_k]_x$ nur von den $d_x f_i$'s abhängen. Dies zeigt die Behauptung.

$\square$

Insbesondere liefert jedes $L \in \mathcal{D}_k(E,F)$ in jedem Punkt $x \in M$ eine symmetrische multilineare Abbildung

$$\begin{aligned} T_x^*M \times \ldots \times T_x^*M &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E_x, F_x) \\ (\theta_1, \ldots, \theta_k) &\longmapsto [[\ldots[[L,f_1],f_2],\ldots],f_k]_x, \end{aligned} \tag{4}$$

wobei $f_1, \ldots, f_k \in C^\infty(M)$ mit $d_x f_i = \theta_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Definition 1.14 *Sei $L \in \mathcal{D}(E,F)$ und $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $k \geq d^o L$. Das* Hauptsymbol *von Ordnung k von L in $x \in M$ ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \sigma_k(L) : T_x^*M &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E_x, F_x) \\ \xi &\longmapsto \frac{1}{k!}\underbrace{[[\ldots[L,f],\ldots],f]}_{k-\mathrm{mal}\, f}, \end{aligned}$$

wobei $f \in C^\infty(M)$ mit $d_x f = \xi$. Für $k = 0$ setzen wir $\sigma_0(L)(\xi) := L_x \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E_x, F_x)$ für alle $L \in \mathcal{D}_0(E,F)$ und $\xi \in T_x^*M$.

Das Hauptsymbol von Ordnung $k \geq 1$ von L in x ist also entweder 0 falls $k > d^o L$ oder das homogene Polynom zu (4) falls $k = d^o L$. Wenn man von Hauptsymbol eines Differentialoperators L spricht, ohne dessen Ordnung genauer anzugeben, handelt es sich immer um sein Hauptsymbol der Ordnung $d^o L$. Natürlich verallgemeinert Definition 1.14 die Definition vom Fall $k = 1$.

Wir geben nun eine andere Formel für die praktische Berechnung des Hauptsymbols eines Differentialoperators an.

Proposition 1.15 *Sei $L \in \mathcal{D}_k(E,F)$ und $f \in C^\infty(M)$. Dann gilt, für alle $s \in \mathbb{R}$,*

$$e^{-sf} L e^{sf} = \sum_{j=0}^{k} \frac{(\mathrm{ad} f)^j L}{j!} s^j,$$

wobei $(\mathrm{ad} f)L := [L,f] \in \mathcal{D}_{k-1}(E,F)$.

Beweis:
Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{L} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{D}_k(E,F) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C^\infty(E), C^\infty(F)) \\ s & \longmapsto & e^{-sf} L e^{sf}\end{array}$$

ist C^∞ im folgenden Sinne: für jedes $u \in C^\infty(E)$ ist $s \mapsto (e^{-sf} L e^{sf})u$ glatt als Abbildung $\mathbb{R} \to C^\infty(F)$, wobei $C^\infty(F)$ seine natürliche Topologie von Fréchet-Raum trägt (siehe Abschnitt 2.2). Dies kann elementar bewiesen werden. Damit die Notationen nicht zu kompliziert werden, vergessen wir u in den folgenden Berechnungen.

Es gilt für die erste Ableitung nach s:

$$\begin{array}{rcl}\frac{d}{ds}(e^{-sf} L e^{sf}) & = & -e^{-sf} f L e^{sf} + e^{-sf} L f e^{sf} \\ & = & e^{-sf}[L, f] e^{sf} \\ & = & e^{-sf}(\mathrm{ad} f) L e^{sf} \in \mathcal{D}_{k-1}(E,F)\end{array}$$

(für $k = 0$ kann man einfach $\mathcal{D}_{k-1}(E,F) := \{0\}$ setzen, denn sowieso ist $(\mathrm{ad} f)L = 0$ für alle $L \in \mathcal{D}_0(E,F)$). Daraus folgt, dass für alle $l \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{d^l}{ds^l}(e^{-sf} L e^{sf}) = e^{-sf}(\mathrm{ad} f)^l L e^{sf},$$

insbesondere $\frac{d^l}{ds^l}(e^{-sf} L e^{sf}) = 0$ für alle $l > k$, denn $(\mathrm{ad} f)^k L \in \mathcal{D}_0(E,F)$, also $(\mathrm{ad} f)^l L = (\mathrm{ad} f)^{l-k}(\mathrm{ad} f)^k L = 0$ für alle $l > k$. Durch die Taylor Entwicklung von $\mathcal{L}$ in 0 bekommt man

$$\mathcal{L}(s) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(\mathrm{ad} f)^j L}{j!} s^j,$$

was die Proposition beweist.

$\square$

Das Hauptsymbol von Ordnung k von $L \in \mathcal{D}_k(E,F)$ in $x \in M$ ist also der "Koeffizient" von s^k in der Taylor-Entwicklung nach s in 0 von $e^{-sf} L e^{sf}$.

Lemma 1.16 *Sei $L \in \mathcal{D}_k(E,F)$ (mit $k \geq 1$), $f \in C^\infty(M)$, $x \in M$ und $s \in C^\infty(E)$. Dann hängt der Vektor $([L,f]s)_x$ nur von $d_x f, d_x^{(2)} f, \ldots, d_x^{(k)} f$ (und multilinear in diesen Argumenten) ab, wobei $d_x^{(j)} f := \underbrace{d_x(d(\ldots.(d}_{j} f)))$ ist.*

Beweis: Zeige zuerst, dass für alle $f_1, \ldots, f_{k+1} \in C^\infty(M)$ mit $f_1(x) = \ldots = f_{k+1}(x) = 0$ gilt

$$([L, f_1 \cdot \ldots \cdot f_{k+1}]s)_x = 0.$$

Der Beweis davon geht durch Induktion über k (der Fall $k = 1$ wurde im Beweis von Lemma 1.7 schon erörtert), mit Anwendung der folgenden Gleichung:

$$\begin{aligned}[L, f_1 \cdot \ldots \cdot f_{k+1}] &\overset{(2)}{=} [L, f_1] f_2 \cdot \ldots \cdot f_{k+1} + f_1 [L, f_2 \cdot \ldots \cdot f_{k+1}] \\ &= [\underbrace{[L, f_1]}_{\in \mathcal{D}_{k-1}(E,F)}, f_2 \cdot \ldots \cdot f_{k+1}] + f_2 \cdot \ldots \cdot f_{k+1} [L, f_1] + f_1 [L, f_2 \cdot \ldots \cdot f_{k+1}].\end{aligned}$$

Falls $f_1(x) = \ldots = f_{k+1}(x) = 0$, verschwinden die zwei letzten Summanden ausgewertet in x, und nach Induktionsvoraussetzung muss auch die erste verschwinden.

Der Beweis der Aussage geht analog wie der von Lemma 1.7 3.: entwickle nach Taylor (natürlich nur nach Wahl lokaler Koordinaten) in x die Funktion f bis um die Ordnung k, und ersetze f durch diese Entwicklung in $[L, f]s$. Der erste Summand, der herauskommt, ist $[L, f(x)]s = 0$ (denn $f(x)$ ist eine Konstante) und der letzte ist genau der Form $[L, f_1 \cdot \ldots \cdot f_{k+1}]s$ mit $f_1(x) = \ldots = f_{k+1}(x) = 0$. Aus der letzten Behauptung folgt, dass $([L, f_1 \cdot \ldots \cdot f_{k+1}]s)_x = 0$, was die Aussage beweist.

□

Proposition 1.17 (Beschreibung von $L \in \mathcal{D}_k(E, F)$ in lokalen Koordinaten)
Sei $L \in \mathcal{D}_k(E, F)$ und $U \subset M$ eine Koordinatenumgebung von einem Punkt $x \in M$, die E und F trivialisiert. Sei $\{u_i\}_{1 \leq i \leq m}$ eine (glatte) Trivialisierung von $E_{|_U}$. Dann gilt:

1. *Für alle $s \in C^\infty(E_{|_U})$,*

$$Ls = \sum_{|\alpha| \leq k} A_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|} s}{\partial x^\alpha},$$

wobei, für jedes $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ mit $|\alpha| := \sum_{r=1}^d \alpha_r \leq k$, die Abbildung $A_\alpha : U \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ ist C^∞, und $\frac{\partial^{|\alpha|} s}{\partial x^\alpha} := \sum_{i=1}^m \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_d} s_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}} u_i$ für $s = \sum_{i=1}^m s_i u_i$.

2. *Für alle $\xi = \sum_{r=1}^d \xi_r dx_r \in T_x^* M$,*

$$\sigma_k(L)(\xi) = \sum_{|\alpha| = k} \xi^\alpha A_\alpha(x),$$

wobei $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \xi_d^{\alpha_d}$.

Beweis:

1. Wie im Beweis von Proposition 1.9 folgt die Aussage aus der Gleichung

$$Ls = \sum_{i=1}^m [L, s_i] u_i + s_i L u_i$$

und aus Lemma 1.16 angewandt auf die $[L, s_i]$'s.

2. Sei $f \in C^\infty(M)$, dann ist nach Proposition 1.15 der Homomorphismus $\sigma_k(L)(d_x f)$ der Koeffizient von der höchsten Potenz (nämlich s^k) von s in der Taylor-Entwicklung von $s \mapsto e^{-sf} L e^{sf}$ in 0. Dieser kommt aber durch "maximale" Ableitung von e^{sf} in $e^{-sf} \sum\limits_{|\alpha|\leq k} A_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\left(e^{sf}\cdot\right)$; nur die α mit $|\alpha| = k$ können also beitragen. Andererseits kommt nach jeder Ableitung von e^{sf} ein Vorfaktor der Form $se^{sf}\frac{\partial f}{\partial x_i}$, und somit

$$\begin{aligned}\sigma_k(L)(d_x f) &= \sum_{|\alpha|=k} (\frac{\partial f}{\partial x_1})^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (\frac{\partial f}{\partial x_d})^{\alpha_d} A_\alpha(x) \\ &= \sum_{|\alpha|=k} (d_x f)^\alpha A_\alpha(x).\end{aligned}$$

□

Proposition 1.18 *Seien $L \in \mathcal{D}_k(E,F)$ und $L' \in \mathcal{D}_l(F,G)$, wobei E, F, G glatte Vektorbündel auf M sind. Dann gilt in jedem $x \in M$ und für jedes $\xi \in T_x^*M$:*

$$\sigma_{k+l}(L' \circ L)(\xi) = \sigma_l(L')(\xi) \circ \sigma_k(L)(\xi).$$

Beweis: O.B.d.A. (bis auf Einschränkung von E, F und G auf eine hinreichend kleine offene Umgebung von x in M) seien E, F und G triviale Vektorbündel. Nach Proposition 1.17 lassen sich L und L' schreiben in der Form

$$L = \sum_{|\alpha|\leq k} A_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \quad \text{bzw.} \quad L' = \sum_{|\beta|\leq l} B_\beta \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta},$$

und somit lässt sich $L' \circ L$ schreiben als

$$L' \circ L = \sum_{|\alpha|\leq k, |\beta|\leq l} B_\beta \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}\Big(A_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\Big). \tag{5}$$

Aus Proposition 1.17 folgt, dass $\sigma_{k+l}(L' \circ L)$ gegeben ist durch die Summe aller Summanden von (5) der Form $C_\gamma(x)\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^\gamma}$ mit $|\gamma| = k + l$. Diese Summanden in (5) tauchen genau dann auf, wenn $|\alpha| = k$ und $|\beta| = l$ gelten *und* wenn die A_α's nicht abgeleitet werden; anders ausgedrückt, für jedes γ mit $|\gamma| = k + l$ gilt

$$C_\gamma = \sum_{\substack{|\alpha| = k, |\beta| = l, \\ \alpha+\beta=\gamma}} B_\beta A_\alpha,$$

(wobei $B_\beta A_\alpha$ für die punktweise Verknüpfung von B_β mit A_α steht) und daraus folgt

$$\sigma_{k+l}(L' \circ L)(\xi) = \sum_{|\gamma|=k+l} \xi^\gamma C_\gamma(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{|\alpha|=k, |\beta|=l, \\ \alpha+\beta=\gamma}} \xi^\gamma B_\beta(x) A_\alpha(x) \\
&= \sum_{\substack{|\alpha|=k, |\beta|=l, \\ \alpha+\beta=\gamma}} \xi^\beta B_\beta(x) (\xi^\alpha A_\alpha(x)) \\
&= \Big(\sum_{|\beta|=l} \xi^\beta B_\beta(x) \Big) \circ \Big(\sum_{|\alpha|=k} \xi^\alpha A_\alpha(x) \Big) \\
&= \sigma_l(L')(\xi) \circ \sigma_k(L)(\xi),
\end{aligned}
$$

für jedes $\xi \in T_x^* M$, QED.

□

Jetzt geben wir eine andere Beschreibung eines Differentialoperators an:

Proposition 1.19 *Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann existiert es ein kanonischer ($C^\infty(M)$-linearer) Isomorphismus*

$$\mathcal{D}_k(E, F) \cong C^\infty(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{J}_k(E), F)), \tag{6}$$

wobei $\mathcal{J}_k(E)$ das k-Jet-Bündel *von E ist.*

Zur Erinnerung: Das k-Jet-Bündel von E ist nach Definition der Quotient von $M \times \mathcal{G}$ - wobei $\mathcal{G}$ die *Garbe* der glatten Schnitte von E bezeichnet - durch die folgende Äquivalenzrelation: $(x, s) \sim_k (x', s') \stackrel{\text{Def.}}{\iff} x = x'$ und alle Ableitungen von s und s' bis zur Ordnung k stimmen in x überein. Diese letzte Bedingung bedeutet, dass es eine hinreichend kleine offene Koordinatenumgebung U von x existiert, in der E trivialisiert ist (und s und s' erklärt sind), und s.d. alle partiellen Ableitungen von s und s' bis zur Ordnung k bzgl. dieser Koordinaten und Trivialisierungen in x übereinstimmen (es kann leicht bewiesen werden, dass diese Bedingung dann unabhängig von der Wahl der Koordinaten bzw. Trivialisierungen ist). Für eine kurze Einführung zu k-Jet-Bündeln, siehe [1].

Beweis: Sei $L \in \mathcal{D}_k(E, F)$ und $[x, s] \in \mathcal{J}_k(E)_x$. Setze $\overline{L}_x([x, s]) := (Ls)_x$. Aus Lemma 1.16 folgt, dass $\overline{L}_x$ wohldefiniert und linear ist. Mit ein bisschen mehr Anstrengung kann man auch zeigen, dass $x \mapsto \overline{L}_x$ einen glatten Schnitt von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{J}_k(E), F)$ definiert. Die so definierte Abbildung $\mathcal{D}_k(E, F) \to C^\infty(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{J}_k(E), F))$ ist natürlich $C^\infty(M)$-linear, und besitzt eine Umkehrabbildung: da jeder glatte Schnitt von E in jedem $x \in M$ ein Element in $\mathcal{J}_k(E)$ liefert, kann jedes $\overline{L} \in C^\infty(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{J}_k(E), F))$ auf einem Schnitt angewendet werden; die erhaltene Abbildung $L : C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ ist dann Element aus $\mathcal{D}_k(E, F)$ (den Vektorbündelhomomorphismus $\overline{L}$ in lokalen Karten und Trivialisierungen hinschreiben, und eine Art "Umkehraussage" von Proposition 1.17 anwenden). Somit wird die Proposition bewiesen.

□

Beispiele 1.20

1. Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $\Delta : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ der sogenannte *Laplace-Operator* auf Funktionen, der definiert ist für alle $f \in C^\infty(M)$ durch
$$\Delta f := -\mathrm{tr}_g(\nabla df),$$
wobei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang von g auf T^*M ist, und tr_g die Spur bzgl. g ist. Dies ist ein Differentialoperator 2. Ordnung von $E := M \times \mathbb{K}$ nach E (d.h., $\Delta \in \mathcal{D}_2(E, E) \setminus \mathcal{D}_1(E, E)$) dessen Hauptsymbol (in $\mathcal{D}_2(E, E)$) in $x \in M$ gegeben ist durch
$$\sigma_2(\Delta)(\xi) = -g_x(\xi, \xi)\mathrm{Id}_{\mathbb{K}},$$
für alle $\xi \in T_x^*M$. Denn: sei $f_1 \in C^\infty(M)$, dann gilt
$$\begin{aligned}[][\Delta, f]f_1 &= \Delta(ff_1) - f\Delta f_1\\ &= f\Delta f_1 - 2g((df)^\sharp, (df_1)^\sharp) + f_1\Delta f - f\Delta f_1\\ &= -2g((df)^\sharp, (df_1)^\sharp) + f_1\Delta f,\end{aligned}$$
und somit
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[[\Delta, f], f]f_1 &= \frac{1}{2}([\Delta, f](ff_1) - f[\Delta, f]f_1)\\ &= \frac{1}{2}(-2g((df)^\sharp, (d(ff_1))^\flat) + ff_1\Delta f + 2fg((df)^\sharp, (df_1)^\sharp - ff_1\Delta f)\\ &= \frac{1}{2}\Big(- 2f_1 g((df)^\sharp, (df)^\sharp) - 2fg((df)^\sharp, (df_1)^\sharp) + 2fg((df)^\sharp, (df_1)^\sharp)\Big)\\ &= -g((df)^\sharp, (df)^\sharp)f_1.\end{aligned}$$

2. Allgemeiner betrachte den auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) erklärten *Laplace-Operator* auf p-Formen für $0 \leq p \leq d$, der definiert ist durch
$$\begin{aligned}\Delta_p : C^\infty(\Lambda^p T^*M) &\longrightarrow C^\infty(\Lambda^p T^*M)\\ \omega &\longmapsto \Delta_p\omega := (d\delta + \delta d)\omega,\end{aligned}$$
wobei δ das g-Kodifferential zu d ist (siehe Beispiele 1.10). Für $p = 0$ ist $\Delta_p = \Delta$. Man kann nochmal zeigen, dass Δ_p ein Differentialoperator 2. Ordnung von $E := \Lambda^p T^*M$ nach E ist dessen Hauptsymbol in $x \in M$ gegeben ist durch
$$\sigma_2(\Delta_p)(\xi) = -g_x(\xi, \xi)\mathrm{Id}_{E_x},$$
für alle $\xi \in T_x^*M$.

3. Sei (M, g) eine riemannsche *spin* Mannigfaltigkeit [3] und D der Dirac-Operator wie in Beispiel 1.10 c). Dann ist D^2 Differentialoperator 2. Ordnung von $E := \Sigma M$ nach E, dessen Hauptsymbol in $x \in M$ gegeben ist durch
$$\sigma_2(D^2)(\xi) = -g_x(\xi, \xi)\mathrm{Id}_{\Sigma_x M},$$
für alle $\xi \in T_x^*M$. Denn: nach Beispiel 1.10 c) gilt $\sigma_1(D)(\xi) = \xi \cdot \mathrm{Id}_{\Sigma_x M}$, und aus Proposition 1.18 folgt
$$\begin{aligned}\sigma_2(D)(\xi) &= \sigma_1(D)(\xi)^2\\ &= \xi \cdot (\xi \cdot \mathrm{Id}_{\Sigma_x M})\\ &\overset{(3)}{=} -g_x(\xi, \xi)\mathrm{Id}_{\Sigma_x M}.\end{aligned}$$

Jetzt kommt eine Berechnung des Koeffizienten von s^{k-1} in der Taylor-Entwicklung von $s \mapsto e^{-sf} L e^{sf}$ in 0, wobei $L \in \mathcal{D}_k(E, F)$.

Proposition 1.21 *Sei $L \in \mathcal{D}_k(E, F)$ mit $k \geq 1$ und $U \subset M$ eine Koordinatenumgebung eines Punktes $x \in M$, in der E und F trivialisiert sind. Sei $f \in C^\infty(M)$. Dann gilt:*

$$\frac{(\mathrm{ad} f)^{k-1} L}{(k-1)!} = \underbrace{\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \sigma_k(L)}{\partial \xi_i}(df) \frac{\partial}{\partial x_i}}_{1.\ \textit{Ordnung}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 \sigma_k(L)}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(df) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{|\beta|=k-1} (df)^\beta A_\beta}_{0.\ \textit{Ordnung}}. \tag{7}$$

Beweis: Der Beweis geht durch Induktion über k. Für $k = 1$ stimmt es, denn

$$\sigma_1(L)(\xi) = \sum_{r=1}^{d} \xi_r A_r,$$

woraus $\frac{\partial \sigma_1(L)}{\partial \xi_i}(df) = A_i$ folgt. Die rechte Seite von (7) ist also gleich

$$\sum_{r=1}^{d} A_i \frac{\partial}{\partial x_i} + A_0 = L = \frac{(\mathrm{ad} f)^0 L}{0!},$$

QED.
Angenommen, es gilt für alle $l \leq k$. Sei $L \in \mathcal{D}_{k+1}(E, F)$. O.B.d.A. sei L der Form $\frac{\partial}{\partial x_r} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ mit $|\alpha| = k$ (wirkt auf $C^\infty(U, \mathbb{K})$). Dann gilt

$$\begin{aligned} e^{-sf} \left(\frac{\partial}{\partial x_r} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \right) e^{sf} &= e^{-sf} \frac{\partial}{\partial x_r} e^{sf} e^{-sf} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} e^{sf} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x_r} + s \frac{\partial f}{\partial x_r} \right] e^{-sf} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} e^{sf}. \end{aligned} \tag{8}$$

Wegen $\sigma_k(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})(\xi) = \xi^\alpha$ gelten $\frac{\partial \sigma_k(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})}{\partial \xi_i}(\xi) = \alpha_i \xi^{\alpha - \delta_i}$, mit $\delta_i := (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i^{\text{te}}\ \text{Stelle}}, 0, \ldots, 0)$,

und

$$\frac{\partial^2 \sigma_k(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\xi) = \begin{cases} \alpha_i(\alpha_i - 1)\xi^{\alpha - 2\delta_i} & \text{für } i = j \\ \alpha_i \alpha_j \xi^{\alpha - \delta_i - \delta_j} & \text{für } i \neq j, \end{cases}$$

d.h., $\frac{\partial^2 \sigma_k(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\xi) = \alpha_i(\alpha_j - \delta_{ij})\xi^{\alpha - \delta_i - \delta_j}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, d\}$. Zusammen mit der Induktionsvoraussetzung ergibt sich

$$\begin{aligned} e^{-sf} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} e^{sf} &= (df)^\alpha s^k \\ &\quad + \Big(\sum_{i=1}^{d} \alpha_i (df)^{\alpha - \delta_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \alpha_i(\alpha_j - \delta_{ij})(df)^{\alpha - \delta_i - \delta_j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + 0 \Big) s^{k-1} \\ &\quad + \text{Summanden niedriger Ordnung in } s. \end{aligned}$$

Durch das Einsetzen von dieser Gleichung in (8) bekommt man für den Koeffizient $\frac{(\mathrm{ad} f)^k L}{k!}$ von s^k:

$$(df)^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_r}+\frac{\partial}{\partial x_r}(df)^{\alpha}+\sum_{i=1}^{d}\alpha_i(df)^{\alpha-\delta_i+\delta_r}\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\alpha_i(\alpha_j-\delta_{ij})(df)^{\alpha-\delta_i-\delta_j+\delta_r}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}. \quad (9)$$

Wegen $\sigma_{k+1}(L)(\xi)=\xi^{\alpha+\delta_r}$ lässt sich aber die rechte Seite von (7) schreiben als

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{d}(\alpha+\delta_r)_i(df)^{\alpha+\delta_r-\delta_i}\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}(\alpha+\delta_r)_i((\alpha+\delta_r)_j-\delta_{ij})(df)^{\alpha+\delta_r-\delta_i-\delta_j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}+0\\
= & \sum_{i=1}^{d}\alpha_i(df)^{\alpha+\delta_r-\delta_i}\frac{\partial}{\partial x_i}+(df)^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_r}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\alpha_i(\alpha_j-\delta_{ij})(df)^{\alpha+\delta_r-\delta_i-\delta_j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\\
& +\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\alpha_i\delta_{rj}(df)^{\alpha-\delta_i-\delta_j+\delta_r}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\delta_{ri}(\alpha_j+\delta_{rj}-\delta_{ij})(df)^{\alpha+\delta_r-\delta_i-\delta_j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j},
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\left(\alpha_i\delta_{rj}(df)^{\alpha-\delta_i-\delta_j+\delta_r}+\delta_{ri}(\alpha_j+\delta_{rj}-\delta_{ij})(df)^{\alpha+\delta_r-\delta_i-\delta_j}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\\
= & \sum_{i=1}^{d}\alpha_i(df)^{\alpha-\delta_i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_r}\\
= & \frac{\partial(df)^{\alpha}}{\partial x_r}.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite von (7) gleicht also

$$\sum_{i=1}^{d}\alpha_i(df)^{\alpha+\delta_r-\delta_i}\frac{\partial}{\partial x_i}+(df)^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_r}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\alpha_i(\alpha_j-\delta_{ij})(df)^{\alpha+\delta_r-\delta_i-\delta_j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial(df)^{\alpha}}{\partial x_r},$$

was genau (9) ist, QED.

$\square$

2 Asymptotische Schnitte

In diesem Abschnitt sei V (bzw. U, W) stets ein *topologischer* Vektorraum, d.h. ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V zusammen mit einer Topologie s.d. Addition $+ : V \times V \longrightarrow V$ und Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$ *stetig* sind. Für ein solches V und eine Menge X bezeichnet man mit V^X den $\mathbb{K}$-Vektorraum aller Abbildungen von X nach V.
Falls V und W topologische Vektorräume sind, bezeichnet man mit $L(V, W)$ den Vektorraum aller *stetigen* ($\mathbb{K}$-)linearen Abbildungen von V nach W.

2.1 Asymptotische Vektoren

Definition 2.1 *Sei V ein topologischer ($\mathbb{K}$-)Vektorraum. Die Relation $\mathcal{R}$ auf $V^{\mathbb{R}_+}$ (wobei $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$) wird definiert durch*

$$f \,\mathcal{R}\, g \quad \Longleftrightarrow \quad \forall N \in \mathbb{N},\ \lim_{t \to +\infty} t^N (f(t) - g(t)) = 0 \ (\in V)$$

für alle $f, g \in V^{\mathbb{R}_+}$.
Man sagt, dass f und g asymptotisch gleich im Unendlichen *sind g.d.w. $f \,\mathcal{R}\, g$.*

Lemma 2.2 *Die Relation $\mathcal{R}$ ist Äquivalenzrelation auf $V^{\mathbb{R}_+}$, und ist verträglich mit der Vektorraumstruktur von $V^{\mathbb{R}_+}$:*

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \,\mathcal{R}\, g_1 \\ f_2 \,\mathcal{R}\, g_2 \\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) \,\mathcal{R}\, (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2).$$

Definition 2.3 *Eine Äquivalenzklasse in $V^{\mathbb{R}_+}$ bzgl. $\mathcal{R}$ heißt* asymptotischer Vektor *(für $V = \mathbb{R}$* asymptotische Zahl*). Der Quotientenvektorraum $V^{\mathbb{R}_+}/\mathcal{R}$ wird mit $As(V)$ bezeichnet.*

Bemerkung 2.4 Für $V = \mathbb{R}$ gilt: $f \,\mathcal{R}\, g \not\Leftrightarrow \frac{f}{g} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, denn z.B. $(t \mapsto e^{-t^2}) \,\mathcal{R}\, (t \mapsto e^{-t})$ aber $\frac{e^{-t^2}}{e^{-t}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$; andererseits $\frac{t}{t+1} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ aber $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ und $t \mapsto t + 1$ sind nicht gleich im Unendlichen.

Definition 2.5 *Sei $f \in V^{\mathbb{R}_+}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von V. Man sagt, dass f die formale Reihe $\sum\limits_n a_n t^{-n}$ als* asymptotische Entwicklung *besitzt (dies bezeichnen wir mit $f \sim \sum\limits_n a_n t^{-n}$) g.d.w. für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\lim_{t \to +\infty} t^N \Big(f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^{-n} \Big) = 0.$$

Bemerkungen 2.6

1. Diese Definition besagt nicht, dass die Reihe $\sum\limits_n a_n t^{-n}$ konvergiert! Insbesondere impliziert $f \sim \sum\limits_n a_n t^{-n}$ nicht, dass $f \,\mathcal{R} \sum\limits_n a_n t^{-n}$.

2. Es gilt allerdings:
$$\left.\begin{array}{l} f \,\mathcal{R}\, g \\ f \sim \sum\limits_n a_n t^{-n} \end{array}\right\} \Longrightarrow g \sim \sum_n a_n t^{-n}.$$

3. Es gilt trivialerweise auch
$$\left.\begin{array}{l} f \sim \sum\limits_n a_n t^{-n} \\ g \sim \sum\limits_n b_n t^{-n} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda f + \mu g \sim \sum_n (\lambda a_n + \mu b_n) t^{-n}$$
für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

4. Nicht jedes $f \in V^{\mathbb{R}_+}$ besitzt eine asymptotische Entwicklung (eine notwendige Bedingung dafür ist z.B. die Existenz von $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$).

Proposition 2.7 *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} A_E(V) := \left\{[f] \in As(V),\, \exists\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}} \text{ mit } f \sim \sum\limits_n a_n t^{-n}\right\} & \longrightarrow & V^{\mathbb{N}} \\ [f] & \longmapsto & (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

ist wohldefiniert, linear und injektiv.
Ist ferner V Banach (d.h. vollständiger normierter Vektorraum), so ist diese Abbildung auch surjektiv.

Beweis: Nach den letzten Bemerkungen ist $A_E(V)$ Vektorraum.
Die Abbildung ist wohldefiniert: sei $f \in V^{\mathbb{R}_+}$. Gilt $f \sim \sum\limits_n a_n t^{-n}$ und $f \sim \sum\limits_n b_n t^{-n}$, so gilt für alle $N \in \mathbb{N}$:
$$t^N \Big(\sum_{n=0}^{N} (a_n - b_n) t^{-n}\Big) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{10}$$
Für $N = 0$ zeigt es, dass $a_0 - b_0 = 0$. Zeige dann durch Induktion über N, dass $a_N - b_N = 0$. Gilt das für alle $0 \leq p \leq N$, so gilt aus (10)
$$t^{N+1} \Big(\sum_{n=0}^{N+1} (a_n - b_n) t^{-n}\Big) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$
d.h. $a_{N+1} - b_{N+1} = 0$. Also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Andererseits hat man bereits in den letzten Bemerkungen erklärt, warum $[f] \sim \sum\limits_n a_n t^{-n}$ Sinn hat.
Die Abbildung ist injektiv: da die betrachtete Abbildung offensichtlich ($\mathbb{K}$-)linear ist, reicht es, den Kern davon zu bestimmen. Sei also $f \in V^{\mathbb{R}_+}$ mit $f \sim 0$, d.h. $t^N f(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$, d.h. $f \,\mathcal{R}\, 0$, und somit $[f] = 0$, QED.

Surjektivität falls V Banach ist: Sei $(V, \|\cdot\|)$ nun Banach-Raum. Lege eine glatte Funktion $\rho : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0,1]$ fest mit $\mathrm{supp}(\rho) \subset [1,+\infty[$ und $\rho_{|[2,+\infty[} = 1$. Für ein $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ definiere die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow V \\ t &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho(\frac{t}{2^{\|a_n\|+n}}) t^{-n}. \end{aligned}$$

Die Abbildung f ist wohldefiniert und glatt, denn: für jedes $t_0 \in \mathbb{R}_+$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{t_0}{2^{\|a_n\|+n}} \leq 1$ für alle $n \geq N$ (wegen $\frac{t_0}{2^{\|a_n\|+n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$), und somit gilt auf $]0, t_0]$:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n \rho(\frac{t}{2^{\|a_n\|+n}}) t^{-n},$$

also $f_{|]0,t_0]}$ ist C^∞; dies gilt für alle $t_0 \in \mathbb{R}_+$.
Ferner gilt auch $f \sim \sum\limits_n a_n t^{-n}$. Denn: sei $N \in \mathbb{N}$ fest, dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} t^N(f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^{-n}) &= t^N \sum_{n=0}^{N} a_n \Big(\rho(\frac{t}{2^{\|a_n\|+n}}) - 1\Big) t^{-n} \\ &\quad + t^N \sum_{n\geq N+1} a_n \rho(\frac{t}{2^{\|a_n\|+n}}) t^{-n}. \end{aligned}$$

Nach der Definition von ρ verschwinden alle Summanden der ersten Summe auf der rechten Seite für t hinreichend groß. Es gilt außerdem für jeden Summand der zweiten Summe:

$$\|a_n \rho(\frac{t}{2^{\|a_n\|+n}}) t^{N-n}\| \leq \frac{\|a_n\|}{(2^{\|a_n\|+n})^{n-N}} \leq \frac{\|a_n\|}{2^{\|a_n\|+n}} \leq \frac{1}{2^n},$$

für alle $t \in [1, +\infty[$, denn: für $0 < t \leq 2^{\|a_n\|+n}$ gilt $\rho(\frac{t}{2^{\|a_n\|+n}}) = 0$, und für $t \geq 2^{\|a_n\|+n}$ gilt $0 \leq \rho(\frac{t}{2^{\|a_n\|+n}}) \leq 1$ und $\frac{1}{t^{N-n}} \leq \frac{1}{(2^{\|a_n\|+n})^{n-N}}$ (wegen $n - N \geq 1$).
Aus $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty$ folgt, dass man bei der zweiten Summe $\lim\limits_{t\to+\infty}$ mit $\sum\limits_n$ vertauschen darf; da für jedes $n \geq N+1$ gilt $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{N-n} a_n \rho(\frac{t}{2^{\|a_n\|+n}}) = 0$ muss dann auch

$$\lim_{t\to+\infty} \sum_{n\geq N+1} a_n \rho(\frac{t}{2^{\|a_n\|+n}}) t^{N-n} = 0$$

gelten und somit $\lim\limits_{t\to+\infty} t^N(f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^{-n}) = 0$, d.h. $f \sim \sum\limits_n a_n t^{-n}$. Daraus folgt (im Fall V Banach), dass die betrachtete Abbildung auch surjektiv ist.

$\square$

Es wurde eigentlich bewiesen, dass im Fall, wenn V Banach-Raum ist, es sogar für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *glatte* Abbildung $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow V$ so gibt, dass $f \sim \sum\limits_n a_n t^{-n}$.

2.2 Asymptotische Operatoren

Lemma 2.8 *Seien V, W topologische Vektorräume und $L \in L(V,W)$. Dann induziert L lineare Abbildungen $As(V) \longrightarrow As(W)$ bzw. $A_E(V) \longrightarrow A_E(W)$.*

Beweis: Gilt $v_1 \,\mathcal{R}\, v_2$ für $v_1, v_2 \in V^{\mathbb{R}_+}$, so gilt $Lv_1 \,\mathcal{R}\, Lv_2$, denn $t^N(v_1(t) - v_2(t)) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ impliziert $t^N(L(v_1(t)) - L(v_2(t))) = L(t^N(v_1(t) - v_2(t))) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (die Abbildung L ist stetig). Somit ist $[Lv_1]$ wohldefiniert für jedes $v_1 \in V^{\mathbb{R}_+}$; die von L induzierte Abbildung $As(V) \longrightarrow As(W)$ ist trivialerweise linear.
Andererseits ist es auch leicht, zu zeigen, dass $Lv \sim \sum_n L(a_n)t^{-n}$ falls $v \sim \sum_n a_n t^{-n}$.

□

Bemerkung 2.9 In [2, S. 28-29] wird behauptet, Lemma 2.8 gelte auch für stetige *bilineare* Abbildungen: “ist $B : U \times V \longrightarrow W$ stetige bilineare Abbildung, so induziert B bilineare Abbildungen $As(U) \times As(V) \longrightarrow As(W)$ bzw. $A_E(U) \times A_E(V) \longrightarrow A_E(W)$.” Dies ist natürlich falsch, wie man an einem einfachen Beispiel sehen kann: sei $U = V = W := \mathbb{R}$, $B : U \times V \longrightarrow W$ die übliche Multiplikation, und setze $u_1(t) := t + e^{-t}$, $u_2(t) := t$, $v_1(t) := e^t$ und $v_2(t) := e^t + e^{-t}$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt $u_1 \,\mathcal{R}\, u_2$ bzw. $v_1 \,\mathcal{R}\, v_2$, aber

$$(u_1v_1 - u_2v_2)(t) = 1 - te^{-t},$$

insbesondere $B(u_1, v_1)$ und $B(u_2, v_2)$ sind nicht asymptotisch gleich im Unendlichen.

Die zuletzt zitierte Behauptung kann man allerdings dadurch retten, dass man sich auf

$$As^b(V) := \{f \in V^{\mathbb{R}_+},\ f \text{ beschränkt im Unendlichen}\}/\mathcal{R} \subset As(V)$$

einschränkt[2]. Hierbei ist ein $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow V$ genau dann *beschränkt im Unendlichen*, wenn ein $M \in \mathbb{R}_+$ so existiert, dass $f_{|[M,+\infty[}$ beschränkt ist.
Zur Erinnerung: eine Teilmenge T eines topologischen Vektorraumes V heißt genau dann beschränkt, *wenn für jede Umgebung U von $0 \in V$ ein $r > 0$ so existiert, dass $tU \supset T$ für alle $t \geq r$.*
Bemerke, dass falls V *lokal beschränkt* ist (d.h., es existiert eine beschränkte Umgebung von 0 in V), ist jedes $[f] \in A_E(V)$ beschränkt im Unendlichen, denn: sei U eine beschränkte Umgebung von 0 in V und $a_0 := \lim_{t\to+\infty} f(t)$ (existiert wegen $[f] \in A_E(V)$), dann existiert es ein $M > 0$ s.d. $f(t) \in a_0 + U$ für alle $t \geq M$, und $a_0 + U$ ist beschränkt, QED.
Insbesondere gilt $A_E(V) \subset As^b(V)$.

Von hier aus betrachten wir nur *lokal beschränkte* topologische Vektorräume (für unsere Anwendungen werden nur *metrisierbare* topologische Vektorräume betrachtet, die natürlich lokal beschränkt sind).

[2]Danke Frank!

Lemma 2.10 *Seien U, V, W (lokal beschränkte) topologische Vektorräume und $B : U \times V \longrightarrow W$ bilinear und stetig. Dann induziert B bilineare Abbildungen $As^b(U) \times As^b(V) \longrightarrow As^b(W)$ bzw. $A_E(U) \times A_E(V) \longrightarrow A_E(W)$.*

Beweis: Seien $u_1, u_2 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow U$ beschränkt im Unendlichen mit $u_1 \mathcal{R} u_2$ und analog $v_1, v_2 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow V$ beschränkt im Unendlichen mit $v_1 \mathcal{R} v_2$. Dann gilt, für alle $N \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} t^N \left(B(u_1(t), v_1(t)) - B(u_2(t), v_2(t))\right) &= B(u_1(t), t^N(v_1(t) - v_2(t))) \\ &\quad + B(t^N(u_1(t) - u_2(t)), v_2(t)). \end{aligned}$$

Behauptung: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folge von U und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von V mit $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, so gilt auch $B(x_n, y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Beweis der Behauptung: Sei ω_W eine offene Umgebung von 0 in W, dann existiert eine offene Umgebung ω_U von $0 \in U$ bzw. ω_V von $0 \in V$ s.d. $B(\omega_U \times \omega_V) \subset \omega_W$ (denn B ist stetig). Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in U ist, existiert ein $r > 0$ s.d. $t\omega_U \supset \{x_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ für alle $t \geq r$. Wegen $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $y_n \in \frac{1}{r}\omega_V$ für alle $n \geq n_0$. Es gilt dann, für alle $n \geq n_0$:

$$B(x_n, y_n) \in B(r\omega_U, \frac{1}{r}\omega_V) = B(\omega_U, \omega_V) \subset \omega_W,$$

was die Behauptung beweist.

$\checkmark$

Aus der Behauptung folgt $t^N \left(B(u_1(t), v_1(t)) - B(u_2(t), v_2(t))\right) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d.h.

$$B(u_1, v_1) \,\mathcal{R}\, B(u_2, v_2),$$

und somit induziert B eine Abbildung $As^b(U) \times As^b(V) \longrightarrow As^b(W)$. Es ist leicht, zu zeigen, dass dies bilinear ist.
Die Einschränkung von dieser Bilinearform auf $A_E(U) \times A_E(V)$ landet in $A_E(W)$:

Behauptung: Seien $u \in U^{\mathbb{R}_+}$ und $v \in V^{\mathbb{R}_+}$ (beschränkt im Unendlichen) mit $u \sim \sum\limits_n a_n t^{-n}$ bzw. $v \sim \sum\limits_n b_n t^{-n}$. Dann gilt $B(u, v) \sim \sum\limits_n c_n t^{-n}$ mit $c_n := \sum_{k=0}^n B(a_k, b_{n-k})$.

Beweis der Behauptung: für alle $N \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\begin{aligned} t^N\Big(B(u(t), v(t)) - \sum_{n=0}^N (\sum_{k=0}^n B(a_k, b_{n-k}))t^{-n}\Big) &= t^N\Big\{B(u(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^{-n}, v(t)) \\ &\quad + B(\sum_{k=0}^N a_n t^{-n}, v(t) - \sum_{n=0}^N b_n t^{-n}) \\ &\quad + B(\sum_{n=0}^N a_n t^{-n}, \sum_{n=0}^N b_n t^{-n}) \\ &\quad - \sum_{n=0}^N B(a_k, b_{n-k})t^{-n}\Big\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & B(t^N(u(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^{-n}), v(t)) \\
& + \sum_{k=0}^{N} t^{-k} B(a_k, t^N(v(t) - \sum_{n=0}^{N} b_n t^{-n})) \\
& + t^N \sum_{k,l=0}^{N} B(a_k, b_l) t^{-k-l} \\
& - t^N \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} B(a_k, b_{n-k}) t^{-n}.
\end{aligned}
$$

Aus der letzten Behauptung folgt, dass die beiden ersten Summanden (Summen) der obigen rechten Seite im Unendlichen verschwinden. Die zwei letzten Summanden (Summen) bringt man zusammen und bekommt

$$
t^N \Big\{ \sum_{n=0}^{2N} \sum_{k=0}^{n} B(a_k, b_{n-k}) t^{-n} - \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} B(a_k, b_{n-k}) t^{-n} \Big\} \quad = \quad \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{k=0}^{n} B(a_k, b_{n-k}) t^{N-n},
$$

was auch im Unendlichen verschwindet ($N - n < 0$ für $n \geq N + 1$). Somit gilt

$$
t^N \Big(B(u(t), v(t)) - \sum_{n=0}^{N} c_n t^{-n} \Big) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0,
$$

QED.

$\checkmark$

Somit wird das Lemma bewiesen.

$\square$

Wir wollen nun Lemma 2.10 auf die bilineare Abbildung “Auswertung”

$$
\begin{aligned}
L(V, W) \times V & \longrightarrow W \\
(L, v) & \longmapsto L(v)
\end{aligned}
$$

anwenden. Dafür muss man eine Topologie auf $L(V, W)$ definieren.
Die allgemeinste natürliche Topologie auf $L(V, W)$ ist die der punktweisen Konvergenz.

Zur Erinnerung: seien V und W topologische ($\mathbb{K}$-)Vektorräume, dann ist die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ *die, deren eine Basis von Umgebungen von* 0 *gegeben ist durch*

$$
\{\cap_{i=1}^{n} \Omega_{v_i, \omega_i},\ v_i \in V,\ \omega_i \text{ offene Umgebung von } 0 \in W \text{ und } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\},
$$

wobei $\Omega_{v_i, \omega_i} := \{L \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W),\ L(v_i) \in \omega_i\}$.

Die Auswertung muss allerdings nicht immer stetig sein. Schon klar ist der Fall, wenn V und W normiert sind, denn dann $\|L(v)\| \leq \|L\| \cdot \|v\|$, woraus die Stetigkeit der Auswertungsabbildung unmittelbar folgt. Wir wollen aber für V und W allgemeinere topologische Vektorräume.
Aus dem Satz von Banach-Steinhaus folgt, dass wenn V *Baire* ist (d.h., für jede Folge $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von dichten offenen Teilmengen von V, die Teilmenge $\bigcap\limits_n \Omega_n$ liegt noch dicht in V), ist die Auswertung *folgenstetig*: gilt $L_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \in L(V,W)$ und $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v \in V$, so gilt auch $L_n(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L(v) \in W$. Dies beweist aber die *Stetigkeit* der Auswertung *nicht*.

Für unsere Zwecke brauchen wir, eine Topologie nur auf dem Raum der Differentialoperatoren von Ordnung höchstens k so zu definieren, dass die Auswertung stetig ist. Proposition 1.19 erlaubt es aber, eine natürliche Topologie von Fréchet-Raum auf $\mathcal{D}_k(E,F)$ zu definieren (und daher auch eine Topologie von topologischem Vektorraum auf $\mathcal{D}(E,F)$): ziehe durch den Isomorphismus (6) die Fréchet-Raum-Topologie von $C^\infty(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{J}_k(E),F))$ auf $\mathcal{D}_k(E,F)$ zurück. Definiere dann die Topologie auf $\mathcal{D}(E,F)$, deren offene Mengen genau diejenigen sind, deren Durchschnitte mit allen Unterräumen $\mathcal{D}_k(E,F)$'s offen sind. Dies definiert wiederum eine Topologie von topologischem Vektorraum auf $\mathcal{D}(E,F)$.
Beachte, dass diese Topologie von Fréchet-Raum auf $\mathcal{D}_k(E,F)$ i.A. *nicht* mit der von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C^\infty(E), C^\infty(F))$ induzierten Topologie der einfachen Konvergenz übereinstimmt.

Lemma 2.11 *Der Vektorraum $\mathcal{D}_k(E,F)$ trage die durch den Isomorphismus (6) induzierte Fréchet-Raum-Topologie von $C^\infty(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{J}_k(E),F))$. Dann ist die Auswertung $\mathcal{D}_k(E,F) \times C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ stetig.*

Beweis: Arbeite in lokalen Koordinaten mit Hilfe von Proposition 1.17 und wende die folgende Bemerkung an: ist L (lokal) der Form $\sum\limits_{|\alpha|\leq k} A_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$ und $s = \sum_{i=1}^m s_i u_i$, so sind alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung $l \in \mathbb{N}$ von Ls "klein", so bald alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung $l \in \mathbb{N}$ bzw. $k+l$ aller A_α's bzw. s_i's auch "klein" sind.

$\square$

Wir kommen zum allgemeinen Fall zurück und setzen die Auswertung stetig voraus.

Definition 2.12 *Seien V, W topologische Vektorräume und $U \subset L(V,W)$ Untervektorraum s.d. die Auswertungsabbildung $U \times V \longrightarrow W$* stetig *ist bzgl. einer festen Topologie auf U. Dann heißt ein Element $[L] \in As^b(U)$* asymptotischer Operator *von V nach W und die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} As^b(U) \times As^b(V) & \longrightarrow & As^b(W) \\ ([L],[v]) & \longmapsto & [L(v)] \end{array}$$

die asymptotische Paarung.

2.3 Asymptotische Differentialoperatoren

Der Vektorraum $\mathcal{D}(E,F)$ trage die im letzten Abschnitt beschriebene Topologie von topologischem Vektorraum[3] (bzgl. der die Auswertung $\mathcal{D}(E,F)\times C^\infty(E)\to C^\infty(F)$ stetig ist, siehe Lemma 2.11).

Definition 2.13 *Ein* asymptotischer Differentialoperator *von E nach F ist ein Element $[L]\in A_E\left(\mathcal{D}(E,F)\right)$ mit*

$$L\sim\sum_n \frac{L_n}{(it)^n},$$

wobei $L_n\in\mathcal{D}_n(E,F)$ für alle n und $d^oL_n - L_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Das Ziel in den folgenden Vorträgen ist, Gleichungen der Form

$$[L][u]=0$$

- *wenn dies Sinn hat* - zu lösen, wobei $[L]$ ein asymptotischer Differentialoperator ist.

Nun wollen wir einen asymptotischen Differentialoperator *lokal* beschreiben. Sei $U\subset M$ eine nichtleere offene Teilmenge. Da die Einschränkung

$$\mathcal{D}(E,F)\to\mathcal{D}(E_{|U},F_{|U})$$

stetig ist (dies ist leicht zu beweisen, z.B. mit Hilfe von lokalen Koordinaten), gilt $L_{|U}\mathcal{R}L'_{|U}$ so bald $L\mathcal{R}L'$, für alle $L,L'\in\mathcal{D}(E,F)^{\mathbb{R}_+}$ beschränkt im Unendlichen. Somit existiert es eine lineare Abbildung, die auch "Einschränkung" benannt wird

$$\begin{array}{rcl} A_E(\mathcal{D}(E,F)) & \longrightarrow & A_E(\mathcal{D}(E_{|U},F_{|U})) \\ {[L]} & \longmapsto & [L]_{|U}:=[L_{|U}]. \end{array}$$

Proposition 2.14 *Sei $[L]\in A_E\left(\mathcal{D}(E,F)\right)$ ein asymptotischer Differentialoperator und $U\subset M$ eine nichtleere offene Teilmenge mit Koordinaten, die E und F trivialisiert. Dann gilt:*

$$[L]_{|U}\sim\sum_n\frac{L_n}{(it)^n},$$

mit

$$\begin{cases} L_n=\sum\limits_{|\alpha|\le n} A_{\alpha n}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \quad (A_{\alpha n}\in C^\infty(U,\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^m,\mathbb{K}^n))) \\ \forall\, M<0,\ \exists\, n_0\in\mathbb{N}\ s.d.\ \forall\, n\ge n_0,\ A_{\alpha n}=0\ \text{für alle}\ \alpha\ \text{mit}\ |\alpha|\le n+M. \end{cases}$$

Beweis: Wende vorige Bemerkung und Proposition 1.17 an; die zweite Bedingung an den $A_{\alpha n}$'s kommt aus $d^oL_n-L_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$.

[3]Ist $\mathcal{D}(E,F)$ *metrisierbar* - oder sogar nur *lokal beschränkt* - bzgl. dieser Topologie?

$\square$

Literatur

[1] Y. Eliashberg, N. Mishachev, *Introduction to the h-principle*, A.M.S. Graduate Studies in Mathematics **48** (2002).

[2] V. Guillemin, S. Sternberg, *Geometric Asymptotics*, A.M.S. Surveys **14** (1977).

[3] H.B. Lawson, M.-L. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press (1989).