Remarques sur les spineurs de Killing transversaux

Nicolas Ginoux [*], Georges Habib[†]

Résumé Nous montrons des conditions nécessaires d'existence de spineurs de Killing transversaux sur une variété spinorielle munie d'un flot riemannien.

Remarks on transversal Killing spinors

Abstract We show necessary conditions for the existence of transversal Killing spinors on a spin manifold endowed with a Riemannian flow.

Soit $(M, g, \mathcal{F})$ une variété riemannienne munie d'un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$. Soient Q le fibré normal du feuilletage et ∇ la connexion de Levi-Civita transversale. Dans [7], nous définissons la notion de spineurs de Killing transversaux, qui sont des champs de spineurs basiques satisfaisant pour tout $Z \in \Gamma(Q)$ l'identité $\nabla_Z\psi = \beta Z \cdot \psi$ où β est un nombre complexe et "$\cdot$" désigne la multiplication de Clifford du fibré des spineurs de Q (supposé spinoriel). Ces spineurs se manifestent naturellement dans l'étude du spectre de l'opérateur de Dirac basique. Dans [6], nous étudions les conditions d'intégrabilité de ces spineurs sur les flots riemanniens (feuilletages de dimension 1) et donnons une classification partielle sur les variétés de Sasaki et de dimension 3.

Dans cette note, nous montrons d'une part la non-existence de spineurs de Killing transversaux imaginaires non nuls sur une variété compacte, d'autre part nous étendons la classification en dimension 3 sans hypothèses de minimalité ni de courbure.

Les auteurs remercient le SFB 647, l'institut Max-Planck pour les Mathématiques dans les Sciences de Leipzig, Oussama Hijazi et Christian Bär pour leur soutien ainsi que le rapporteur pour ses remarques pertinentes.

[*]Institut für Mathematik - Geometrie, Universität Potsdam, Am Neuen Palais 10, D-14469 Potsdam, E-mail : ginoux@math.uni-potsdam.de

[†]Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Inselstr. 22, D-04103 Leipzig, E-mail : Georges.Habib@mis.mpg.de

1 Préliminaires

Dans cette partie, on rappelle quelques éléments de base des feuilletages spinoriels (cf. [3, 11, 4, 7]). Soit $(M, g, \mathcal{F})$ une variété riemannienne de dimension n munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ donné par un sous-fibré $L \subset TM$. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est dit riemannien si la métrique g est quasi-fibrée, i.e., la métrique induite par g sur le fibré normal $Q := L^{\perp}$, de rang q, satisfait la condition d'invariance d'holonomie. Cette condition est caractérisée par l'existence d'une connexion métrique à torsion nulle ∇ sur Q. La courbure transversale R^{∇} est une forme basique au sens qu'elle s'annule le long des feuilles. On peut ainsi associer à ∇ la courbure de Ricci transversale Ric^{∇} et sectionnelle transversale K^{∇}. Dans toute la suite, on considère des feuilletages riemanniens.
Supposons maintenant que Q porte une structure spinorielle (en tant que fibré vectoriel feuilleté) et notons par ΣQ son fibré des spineurs. L'opérateur de Dirac basique D_b agit sur les sections basiques du fibré des spineurs ΣQ par

$$D_b\psi = \sum_{i=1}^{q} e_i \cdot \nabla_{e_i}\psi - \frac{1}{2}\kappa \cdot \psi, \tag{1.1}$$

pour tout ψ, où $\{e_i\}_{i=1,\cdots,q}$ est un repère local de Q et κ est la courbure moyenne des feuilles. Ici, " $\cdot$ " désigne l'action de Q sur le fibré des spineurs ΣQ par la multiplication de Clifford. Cet opérateur est transversalement elliptique et auto-adjoint si M est compacte et donc a un spectre discret [4].

2 Résultats

Soient $(M, g, \mathcal{F})$ une variété riemannienne et $\mathcal{F}$ un feuilletage spinoriel. On rappelle, que si M est compacte, la courbure moyenne κ - que l'on peut voir comme une 1-forme - peut être choisie basique et harmonique [9]. Supposons que le fibré normal admet un spineur Killing transversal non nul pour $\beta \in \mathbb{C}$. En utilisant la formule de Ricci transversale, on montre que le feuilletage est transversalement Einstein et on a $\mathrm{Ric}^{\nabla} Z = 4(q-1)\beta^2 Z$ pour tout $Z \in \Gamma(Q)$ [7]. Donc une première conséquence est que β est réel ou imaginaire pur.

Proposition 2.1 *Soit $(M, g, \mathcal{F})$ une variété riemannienne compacte munie d'un feuilletage spinoriel $\mathcal{F}$ et admettant un spineur de Killing transversal non nul pour la constante β. Alors $\beta \in \mathbb{R}$ et, si de plus $\beta \neq 0$, le feuilletage est minimal.*

Preuve. Supposons d'abord, par l'absurde, que $\beta \in i\mathbb{R}^*$. Par (1.1) on obtient $D_b\psi = -q\beta\psi - \frac{1}{2}\kappa \cdot \psi$. L'intégrale sur M du produit hermitien de cette identité avec ψ donne, après avoir identifié les parties imaginaires pures, $\beta = -\frac{1}{2q}\frac{\int_M (\kappa\cdot\psi,\psi)v_g}{\int_M |\psi|^2 v_g}$. Calculons maintenant le terme $D_b^2\psi$ à l'aide de la formule de Schrödinger-Lichnerowicz transversale. On a $\nabla^*\nabla\psi = q\beta^2\psi + \beta\kappa\cdot\psi$, par suite on trouve d'une part $D_b^2\psi = (q^2\beta^2 + \frac{1}{4}|\kappa|^2)\psi + \beta\kappa\cdot\psi$, et d'autre part $|D_b\psi|^2 = q^2|\beta|^2|\psi|^2 + q(\kappa\cdot\psi,\beta\psi) + \frac{1}{4}|\kappa|^2|\psi|^2$. En comparant l'intégrale sur M de cette dernière identité avec $\int_M (D_b^2\psi,\psi)v_g$, on en déduit que

$$\int_M [(q^2\beta^2+\frac{1}{4}|\kappa|^2)|\psi|^2+\beta(\kappa\cdot\psi,\psi)]v_g = \int_M [q^2|\beta|^2|\psi|^2+q(\kappa\cdot\psi,\beta\psi)+\frac{1}{4}|\kappa|^2|\psi|^2]v_g.$$

En reportant cette identité dans l'égalité ci-dessus on trouve $q\beta^2 = 0$, contradiction. Pour $\beta \in \mathbb{R}^*$ la positivité de Ric^∇ implique l'annulation du groupe de cohomologie basique $H_B^1(\mathcal{F})$ [8] et ainsi l'annulation du noyau du laplacien basique restreint aux 1-formes basiques [5, Cor. 4.8]. □

On suppose désormais M de dimension 3 et munie d'un flot riemannien, i.e., d'un feuilletage de dimension 1 défini par un champ de vecteurs unitaires ξ.

Proposition 2.2 *Soit (M^3, g, ξ) une variété riemannienne complète munie d'un flot riemannien. Supposons que M admet un spineur de Killing transversal non nul associé à la constante β, alors on a :*

1. *Cas où $\beta = 0$: Le revêtement universel de M est difféomorphe à $\mathbb{R}^3$. Si de plus M est compacte, alors c'est le tore plat $\mathbb{T}^3$ ou une fibration de Seifert à fibres $\mathbb{S}^1$ avec $\chi(M/\mathbb{S}^1) = 0$, et si en outre $M/\mathbb{S}^1$ est spin, alors M est un fibré en cercles sur $\mathbb{T}^2$.*
2. *Cas où $\beta \neq 0$: Le revêtement universel de M est une fibration sur $\mathbb{S}^2$ (cas où $\beta \in \mathbb{R}$) ou une fibration sur $\mathbb{H}^2$ (cas où $\beta \in i\mathbb{R}$). Si de plus M est compacte, alors elle est soit le produit riemannien $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, soit une fibration de Seifert à fibres $\mathbb{S}^1$ avec $\chi(M/\mathbb{S}^1) > 0$. Si de plus $M/\mathbb{S}^1$ est spin, alors M est un fibré en cercles sur $\mathbb{S}^2$.*

Preuve. L'existence d'un spineur de Killing transversal associé à β implique $K^\nabla = 4\beta^2$. Quitte à effectuer une homothétie sur la métrique transversale on peut supposer que $\beta \in \{\pm\frac{1}{2}, 0, \pm\frac{i}{2}\}$. Lorsque $\beta = 0$ le fibré normal de $\mathcal{F}$ est plat, par conséquent le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M est difféomorphe à $\mathbb{R}^3$ [2, Cor. 3.2]. Pour $\beta \neq 0$, la courbure transversale R^∇ vérifiant $\nabla R^\nabla = 0$, on déduit de [2] que $\widetilde{M}$ est une fibration riemannienne sur $N = \mathbb{S}^2$ (lorsque $\beta = \pm\frac{1}{2}$) ou sur $N = \mathbb{H}^2$ (lorsque $\beta = \pm\frac{i}{2}$). Lorsque M est compacte une version transversale de la formule de Gauss-Bonnet [10, Prop. 4] implique que $\chi(M/\mathbb{S}^1)$ est proportionnel à la courbure sectionnelle transversale totale sur

M ; par la classification de Y. Carrière [3] on en déduit les différents types de géométrie de M. En particulier le quotient $M/\mathbb{S}^1$ est toujours une orbisurface. Si ce quotient est en outre supposé spin, alors c'est une orbisurface orientable dont les singularités - en nombre fini - sont de type $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_k$, où k est un entier impair [1]. D'autre part le spineur de Killing transversal de M descend dans ce cas sur $M/\mathbb{S}^1$. Or la condition d'équivariance de ce spineur en chaque point singulier se traduit par la dichotomie suivante : soit cette singularité n'en est pas une (i.e., $k = 1$), soit elle est un zéro du spineur. Mais un spineur de Killing non trivial n'a pas de zéro, par conséquent $M/\mathbb{S}^1$ est soit $\mathbb{T}^2$ soit $\mathbb{S}^2$.
$\square$

Références

[1] F. Belgun, N. Ginoux and H.-B. Rademacher, *A singularity theorem for twistor spinors*, Ann. Inst. Fourier **57** (2007), 1135–1159.

[2] R. Blumenthal, *Foliations with locally reductive normal bundle*, Illinois J. Math. **28** (1984), 691–702.

[3] Y. Carrière, *Flots riemanniens*, Structure transverse des feuilletages, Toulouse, Astérique **116** (1984), 31–52.

[4] A. El Kacimi, *Opérateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications*, Compo. Math. **73** (1990), 57–106.

[5] A. El Kacimi and G. Hector, *Décomposition de Hodge basique pour un feuilletage riemannien*, Ann. Inst. Fourier **36** (1986), 207–227.

[6] N. Ginoux, G. Habib, *Geometric aspects of transversal Killing spinors on Riemannian flows*, Preprint (2008).

[7] G. Habib, *Tenseur d'impulsion-énergie et feuilletages*, Thèse de doctorat (2006), Université Henri Poincaré, Nancy.

[8] J. Hebda, *Curvature and focal points in Riemannian foliations*, Indiana Univ. Math. J. **35** (1986), 321–331.

[9] P. March, M. Min-Oo and A. E. Ruh, *Mean curvature of Riemannian foliations*, Canad. Math. Bull. **39** (1996), 95–105.

[10] M. Nicolau and A. Reventos, *On some geometrical properties of Seifert bundles*, Israel J. Math. **47** (1984), 323–334.

[11] Ph. Tondeur, *Foliations on Riemannian manifolds*, Springer, New York, 1988.