Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dr. Nicolas Ginoux

Zentralübung zur Analysis II am 24.6.2014

1. Aufgabe

Sei die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y,z) := (x+y+z-1)^3$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die regulären Punkte und die regulären Werte von f.

(b) Bestimmen Sie die Werte w von f, für die die Niveaumenge $f^{-1}(\{w\})$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

2. Aufgabe

[1]Für ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sei $c\colon I \to \mathbb{R}^k$ eine C^1-Abbildung mit $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ und so, dass $c\colon I \to c(I)$ ein Homöomorphismus ist. Zeigen Sie, dass $M := c(I) \subset \mathbb{R}^k$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$ ist und bestimmen Sie den Tangentialraum an M in jedem Punkt.

3. Aufgabe

Für ein $R \in (0;1)$ betrachten wir die 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$M := \mathbb{T}_R := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2 + z^2 = R^2\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

und $F\colon (-\pi;\pi)\times(-\pi;\pi) \to \mathbb{R}^3$, $(\theta,\varphi) \mapsto ((1+R\cos(\theta))\cos(\varphi), (1+R\cos(\theta))\sin(\varphi), R\sin(\theta))$.

(a) Zeigen Sie, dass F eine 2-dimensionale lokale Parametrisierung von M ist.

(b) [2] Geben Sie eine Basis des Tangentialraumes an M in jedem Punkt $p \in M$ der Form $F(\theta,\varphi)$ an.

4. Aufgabe

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto x^2$, unter der Nebenbedingung g, wobei $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2-1)$.

Lösung: Beachte zuerst, dass f und g glatt (also C^∞) sind und dass $0 \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von g ist mit $g^{-1}(\{0\}) = \mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon \|(x,y,z)\|_2 = 1\}$, siehe Beispiel 6.3 aus Kapitel 8. Die lokalen Extrema von f unter der Nebendingung g sind daher die lokalen Extrema von $f_{|M}$, wobei $M := g^{-1}(\{0\}) = \mathbb{S}^2$. Da nach Proposition 7.2 aus Kapitel 8 lokale Extrema – mit oder ohne Nebenbedingungen – immer stationäre Punkte sind, suchen wir zuerst die stationären Punkte von $f_{|M}$, d.h., die Punkte $p \in M$ mit $f'(p)_{|T_pM} = 0$, wobei $T_pM \subset \mathbb{R}^3$ den

---

[1]Diese Aufgabe wurde nicht behandelt.
[2]Dieser Aufgabenteil wurde nicht behandelt.

Tangentialraum an M im Punkt p bezeichnet. Nach dem Satz über Lagrange-Multiplikatoren (Korollar 7.3 aus Kapitel 8) ist $p \in M$ genau dann ein stationärer Punkt von $f_{|M}$, wenn ein (notwendigerweise eindeutiges) $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit $f'(p) = \lambda g'(p)$. Für $p = (x, y, z) \in M$ gelten $f'(p) = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $g'(p) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$; damit ist $f'(p) = \lambda g'(p)$ äquivalent zum Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2x & = \lambda x \\ 0 & = \lambda y \\ 0 & = \lambda z \end{cases} . \tag{G}$$

Im Fall $\lambda = 2$ ist (G) äquivalent zu $y = z = 0$ und daher zu $p = (-1, 0, 0)^T$ oder $p = (1, 0, 0)^T$ (denn beachte, dass $(x, 0, 0)^T \in \mathbb{S}^2 \iff x^2 = 1 \iff x = -1$ oder $x = 1$). Im Fall $\lambda \neq 2$ ist (G) äquivalent zu $x = 0$ und $\lambda y = 0 = \lambda z$; im Fall $\lambda \neq 0$ liefert dies $y = z = 0$, was $p = (0, 0, 0)^T$ impliziert, Widerspruch zu $p \in \mathbb{S}^2$, somit kann dieser Fall nicht auftreten; im Fall $\lambda = 0$ gibt es keine weiteren Bedingungen an y und z außer der, dass $y^2 + z^2 = 1$ gelten muss (wegen $p = (0, y, z)^T \in \mathbb{S}^2$). Insgesamt folgt, dass die Menge der stationären Punkte von $f_{|M}$

$$S = \left\{(-1, 0, 0)^T,\ (1, 0, 0)^T,\ (0, y, z)^T \text{ wobei } y, z \in \mathbb{R} \text{ mit } y^2 + z^2 = 1\right\}$$

ist. Die Menge S besteht aus einem sogenannten Großkreis in $\mathbb{S}^2$ (die Menge der Punkte der Form $(0, y, z)^T$ wie oben) und zwei isolierten Punkten, dem *Nordpol* $(1, 0, 0)^T$ und dem *Südpol* $(-1, 0, 0)^T$.
Es bleibt, jeden stationären Punkt von $f_{|M}$ auf *Extremalität* zu untersuchen, d.h., zu bestimmen, ob der ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum von $f_{|M}$ ist. Dazu beachte man, dass für jedes $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ die Ungleichungen

$$0 \leq f(x, y, z) = x^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

gelten, d.h., $f(p) \in [0; 1]$ für alle $p \in M$. Nun gilt $f(p) = 0$ für jedes $p \in A := \left\{(0, y, z)^T \colon y, z \in \mathbb{R} \text{ und } y^2 + z^2 = 1\right\} \subset S$ und $f(p) = 1$ für $p = \pm(1, 0, 0)^T$. Daraus folgt, dass die Menge der lokalen Minima (es sind tatsächlich *globale* Minima) von f die Menge A ist und die Menge der lokalen Maxima (und da auch sind es *globale* Maxima) von f die Menge $\{(-1, 0, 0)^T, (1, 0, 0)^T\}$ ist.

5. Aufgabe

[3]Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A^T = A$ und $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Funktion

$$f \colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{2} x^t A x.$$

(a) Zeigen Sie: die stationären Punkte von f sind die Eigenvektoren mit Norm 1 von A.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

[3]Diese Aufgabe wurde nicht behandelt.