Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dr. Nicolas Ginoux

Zentralübung zur Analysis II am 27.5.2014

1. Aufgabe
Richtig oder falsch?

(a) Sei A eine zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes X, dann ist $\mathring{A}$ ebenfalls zusammenhängend.

(b) Seien A, B zusammenhängende Teilmengen eines topologischen Raumes X, dann ist $A \cap B$ zusammenhängend.

(c) Seien A, B zusammenhängende Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, dann ist $A + B := \{z \in \mathbb{R}^n \,|\, \exists\, (x, y) \in A \times B \text{ mit } z = x + y\}$ zusammenhängend.

2. Aufgabe
[1] Ein topologischer Raum X heißt *lokal zusammenhängend* (bzw. *lokal wegzusammenhängend*), wenn jeder Punkt von X eine zusammenhängende (bzw. wegzusammenhängende) Umgebung besitzt. Zeigen Sie:

(a) Ist ein topologischer Raum X lokal zusammenhängend, so ist jede Zusammenhangskomponente $C(x)$, $x \in X$, offen in X.

(b) Ist ein topologischer Raum X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, so ist X bereits wegzusammenhängend.

3. Aufgabe
[2] *(Mittelwertsatz für vektorwertige Funktionen)*
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar und $p, q \in U$ so, dass $[p; q] \subset U$, wobei $[p; q] := \{z \in \mathbb{R}^n \,|\, \exists\, t \in [0; 1] \text{ mit } z = (1 - t)p + tq\} \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\|f(q) - f(p)\|_2 \leq \left(\sup_{z \in [p;q]} \|f'(z)\|_{2,2} \right) \cdot \|q - p\|_2,$$

wobei $\|f'(z)\|_{2,2} := \sup\limits_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|f'(z) \cdot v\|_2}{\|v\|_2}$.

4. Aufgabe
Für $A \in \mathrm{M}_{k \times n}(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^k$ sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $p \mapsto A \cdot p + b$. Zeigen Sie, dass f zweimal differenzierbar ist und berechnen Sie $f'(p)$ und $f''(p)$ in jedem $p \in \mathbb{R}^n$.

---

[1] Diese Aufgabe wurde nicht behandelt.
[2] Dieser Satz wurde in der heutigen Zentralübung nicht bewiesen.

5. Aufgabe

Seien $f\colon (0;\infty) \times (-\pi;\pi) \to \mathbb{R}^2$, $(r,\varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))^T$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$.

(a) Bestimmen Sie das Bild U von f und zeigen Sie, dass $f\colon (0;\infty) \times (-\pi;\pi) \to U$ differenzierbar und bijektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass $g \circ f\colon (0;\infty) \times (-\pi;\pi) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie das Differential von $g \circ f$ in jedem Punkt.

6. Aufgabe

[3] Es bezeichne $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ das kanonische euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Für eine *symmetrische* reelle $n \times n$-Matrix A betrachten wir die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad p \mapsto \frac{1}{2}\langle A \cdot p, p \rangle.$$

Zeigen Sie, dass f zweimal differenzierbar ist und berechnen Sie $f'(p)$ und $f''(p)$ in jedem $p \in \mathbb{R}^n$.

[3] Diese Aufgabe wurde nicht behandelt.