Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dr. Nicolas Ginoux

Zentralübung zur Analysis II am 13.5.2014

1. Aufgabe

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Zeigen Sie: f ist genau dann stetig auf X, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge A von Y die Teilmenge $f^{-1}(A)$ von X abgeschlossen ist.

2. Aufgabe

Sei X ein Hausdorff-Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen einen Punkt $x \in X$ konvergierende Folge aus X. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$K := \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subset X$$

kompakt ist.

3. Aufgabe

Sei X ein kompakter topologischer Raum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener Teilmengen von X mit $A_{n+1} \subset A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $A_n = \varnothing$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$.

(b) Es gilt $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$.

4. Aufgabe

Eine auf einem topologischen Raum X definierte Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ heißt *lokal konstant*, wenn jeder Punkt aus X eine Umgebung besitzt, auf der f konstant ist. Beweisen Sie im Fall eines zusammenhängenden Raumes X die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) f ist konstant.

(b) f ist lokal konstant.

5. Aufgabe

Für zwei topologische Räume X und Y sei der Produktraum $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen (vgl. 6. Übungsblatt). Zeigen Sie:

(a) Die Abbildungen $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$, $(x, y) \mapsto x$ sowie $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$, $(x, y) \mapsto y$, sind stetig.

(b) Für alle $(x_0, y_0) \in X \times Y$ sind die Abbildungen $\iota_{x_0} : Y \to X \times Y$, $y \mapsto (x_0, y)$ sowie $j_{y_0} : X \to X \times Y$, $x \mapsto (x, y_0)$, stetig.

(c) Eine Folge $(u_n = (x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ aus $X \times Y$ ist genau dann konvergent in $X \times Y$, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent in X bzw. Y sind.

6. Aufgabe

[1] Für drei topologische Räume X, Y und Z seien die Produkträume $X \times Y$ und $Y \times Z$ mit der Produkttopologie versehen (vgl. 6. Übungsblatt). Zeigen Sie: versehen wir $(X \times Y) \times Z$ und $X \times (Y \times Z)$ ebenfalls mit den Produkttopologien, so ist die Identitätabbildung $(X \times Y) \times Z \to X \times (Y \times Z)$ ein Homöomorphismus.

7. Aufgabe

[2] Für zwei topologische Räume X und Y sei der Produktraum $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen (vgl. 6. Übungsblatt).

(a) Sei $f : X \times Y \to Z$, wobei Z ein weiterer topologischer Raum ist. Zeigen Sie: ist f stetig, so sind für jedes $(x_0, y_0) \in X \times Y$ die Abbildungen $Y \to Z$, $y \mapsto f(x_0, y)$ sowie $X \to Z$, $x \mapsto f(x, y_0)$, stetig.

(b) In diesem Aufgabenteil seien $X = Y = \mathbb{R}$ und $f : X \times Y \to \mathbb{R}$,

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

Zeigen Sie, dass für jedes $(x_0, y_0) \in X \times Y$ die Abbildungen $Y \to Z$, $y \mapsto f(x_0, y)$ sowie $X \to Z$, $x \mapsto f(x, y_0)$, stetig sind, dass aber f selbst nicht stetig ist.

(c) Sei nun $g : Z \to X \times Y$ eine Abbildung, wobei X, Y, Z wieder beliebige topologische Räume sind. Zeigen Sie: g ist genau dann stetig, wenn die Abbildungen $\mathrm{pr}_X \circ g : Z \to X$ und $\mathrm{pr}_Y \circ g : Z \to Y$ stetig sind.

8. Aufgabe

[3] Für zwei topologische Räume X und Y sei der Produktraum $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen (vgl. 6. Übungsblatt). Zeigen Sie:

(a) $X \times Y$ ist genau dann kompakt, wenn X und Y kompakt sind.

(b) $X \times Y$ ist genau dann zusammenhängend, wenn X und Y zusammenhängend sind.

---

[1] Diese Aufgabe wurde nicht behandelt.
[2] Diese Aufgabe wurde nicht behandelt.
[3] Diese Aufgabe wurde nicht behandelt.