Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dr. Nicolas Ginoux

Zentralübung zur Analysis II am 29.4.2014

1. Aufgabe

Bestimmen Sie eine Stammfunktion für folgende Funktionen.

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2-2x+3}$.

(b) $f(x) = \frac{1}{(1-x^2)^2}$.

(c) $f(x) = e^{3x}\sin(x)$.[1]

(d) $f(x) = x^3 e^{-x^2}$.[2]

2. Aufgabe

Sei $f : [0;\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{falls } x > 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$.

(a) Ist f an der Stelle 0 stetig?

(b) Ist $\int_0^\infty f(x)\,dx$ konvergent?

(c) Ist $\int_0^\infty f(x)\,dx$ absolut konvergent?

Lösung:

(a) Ja wegen $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} \underset{x\searrow 0}{\longrightarrow} \sin'(0) = \cos(0) = 1 = f(0)$.

(b) Wir zeigen, dass $\int_0^\infty f(x)\,dx$ konvergiert, d.h. (da f an der Stelle 0 bereits stetig ist), dass $\lim\limits_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\,dx$ existiert. Dazu setzen wir, für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$a_n := \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(x)|\,dx \in [0;\infty).$$

Wegen $\sin(x) \geq 0$ für alle $x \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$ und $\sin(x) \leq 0$ für alle $x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\,dx = \begin{cases} a_n & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -a_n & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases},$$

[1] Wurde in der Zentralübung nicht gelöst.
[2] Wurde in der Zentralübung nicht gelöst.

d.h., $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\,dx = (-1)^n a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Daraus folgt

$$\int_0^{(n+1)\pi} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k.$$

Nun ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge: nach Substitution $u := x - \pi$ und unter Verwendung von $\sin(x-\pi) = -\sin(x)$ gilt, für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx \\
&= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(u+\pi)|}{u+\pi}\,du \\
&= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(u)|}{u+\pi}\,du \\
&\leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(u)|}{u}\,du \qquad \text{wegen } \frac{1}{u+\pi} \leq \frac{1}{u},
\end{aligned}$$

d.h., $a_{n+1} \leq a_n$; schließlich gilt, für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq a_n \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{u}\,du \leq \frac{1}{n\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} du = \frac{1}{n},$$

woraus $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ folgt. Insgesamt ist die Reihe $\sum_n (-1)^n a_n$ eine alternierende Reihe mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nichtnegativ, monoton fallend und gegen 0 konvergierend, daher konvergiert $\sum_n (-1)^n a_n$. Die Konvergenz von $\int_0^\infty f(x)\,dx$ ergibt sich unmittelbar aus dieser Tatsache: sei nämlich $\varepsilon > 0$ beliebig, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ und $|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k| \leq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ gilt. Für alle $b \geq (N+1)\pi$ gilt dann: es gibt ein $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ mit $b \in [(n+1)\pi, (n+2)\pi]$ und damit

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^b f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k + \int_{(n+1)\pi}^{b} f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k\right| + \int_{(n+1)\pi}^{b} |f(x)|\,dx \\
&\leq \varepsilon + \frac{1}{n} \\
&\leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Dies beweist $\lim\limits_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ und damit die Konvergenz des Integrals.

(c) Wir zeigen durch einen Vergleich mit einer nicht absolut konvergenten Reihe, dass $\lim\limits_{b\to\infty} \int_0^b |f(x)|\,dx = \infty$ gilt. Wir betrachten wieder die im Aufgabenteil (b) definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Dann gilt analog, für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\int_0^{(n+1)\pi} |f(x)|\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k. \tag{0.1}$$

Nun zeigen wir, dass die Reihe $\sum_n a_n$ divergiert. Dazu sei angemerkt, dass für alle n gerade eine partielle Integration

$$\begin{aligned}
\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(x)|\,dx &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx \\
&= \left[\frac{-\cos(x)}{x}\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx \\
&= \frac{(-1)^n}{(n+1)\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi} - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{(n+1)\pi} + \frac{1}{n\pi} - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx
\end{aligned}$$

liefert. Analog gilt für n ungerade:

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(x)|\,dx = \frac{1}{(n+1)\pi} + \frac{1}{n\pi} + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx.$$

Wegen $|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx| \leq \frac{1}{\pi n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n\geq 1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$$

absolut, insbesondere konvergiert sie. Da aber die harmonische Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ divergiert, divergiert auch die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)\pi} + \frac{1}{n\pi}$: für alle $M \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\pi} + \frac{1}{k\pi} \geq M$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$. Daraus folgt, dass die Reihe $\sum_n a_n$ divergiert. Schließlich folgt aus (0.1), dass $\int_0^\infty |f(x)|\,dx$ divergiert.

3. Aufgabe

Die *Eulersche Gammafunktion* wird definiert als

$$\Gamma : (0;\infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion Γ wohldefiniert ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ für alle $x \in (0;\infty)$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

4. Aufgabe

Für $p \in [1;\infty]$ betrachte man

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0;\infty), x = (x_1,\ldots,x_n) \mapsto \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{falls } p < \infty \\ \max\limits_{1\le i\le n} |x_i| & \text{falls } p = \infty \end{cases}.$$

Ziel der Aufgabe ist es, die *Minkowski-Ungleichung* zu beweisen: für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p.$$

(a) Zeigen Sie die Minkowski-Ungleichung für $p = 1$ und $p = \infty$.

(b) Von nun an sei $p \in (1;\infty)$. Seien $x = (x_1,\ldots,x_n)$ und $y = (y_1,\ldots,y_n)$ aus $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung:

$$\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p \le (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot \left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

wobei $q \in (1;\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(Hinweis: Schreiben Sie $|x_i+y_i|^p = |x_i+y_i| \cdot |x_i+y_i|^{p-1}$.)

(c) Leiten Sie die Minkowski-Ungleichung her.