Übungen zur Analysis II für Physiker

Universität Regensburg, Sommersemester 2012
Dr. Nicolas Ginoux / Dr. Mihaela Pilca
Übungsblatt 12, Abgabe am 11.07.2012 bis 12 Uhr
Bitte **jedes Blatt** mit **Ihrem Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** versehen und alle Blätter zusammenheften.

---

1. Aufgabe

i) Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen folgender Differentialgleichung:

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2 + \dfrac{e^{3t}}{t} \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - \dfrac{e^{3t}}{t^2} \end{cases}$$

ii) Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung aus i) mit dem Cauchy-Datum $y_1(1) = 2e^3$ und $y_2(1) = e^3$.

2. Aufgabe

i) Finden die allgemeinen Lösungen folgender Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}.$$

ii) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung aus i) mit dem Cauchy-Datum $y_1(0) = y_3(0) = 0$, $y_2(0) = 1$.

3. Aufgabe

Sei R eine reelle Zahl, $0 < R < 1$ und T folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^3$:

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 = R^2\}$$

i) Skizzieren Sie T.

ii) Zeigen Sie, dass T eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

iii) Berechnen Sie das Volumen folgenden Körpers:

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 \leq R^2\}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Parametrisierung:

$(r, \theta, \phi) \in]0, R[\times]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\mapsto ((1+r\cos\theta)\cos\phi, (1+r\cos\theta)\sin\phi, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^3$.

4. Aufgabe

Sei M die Teilmenge von $\mathbb{R}^4$, die durch folgende Gleichungen definiert ist:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3^2 + x_4^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$ ist und bestimmen Sie den Tangentialraum zu M an der Stelle $p = (0, 1, 0, 1)$.