Übungen zur Analysis II für Physiker

Universität Regensburg, Sommersemester 2012

Dr. Nicolas Ginoux / Dr. Mihaela Pilca

Übungsblatt 10, Abgabe am 27.06.2012 bis 12 Uhr

Bitte **jedes Blatt** mit **Ihrem Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** versehen und alle Blätter zusammenheften.

---

1. Aufgabe

Berechnen Sie für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ folgendes Integral

$$I_n(x) := \int_0^x t^n e^{-t} dt$$

durch Differenzieren des Parameter-abhängigen Integrals $F(y) := \int_0^x e^{-ty} dt$.

2. Aufgabe

i) Berechnen Sie den Flächeninhalt einer Ellipse mit Halbachsen $a, b > 0$.

ii) Berechnen Sie das Integral der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := z$ über die Hälfte $z \geq 0$ einer Vollkugel vom Radius $r > 0$ und Zentrum 0. Hinweis: Benutzen Sie die Kugelkoordinaten.

3. Aufgabe

Für eine beschränkte Menge $A \in \mathcal{L}_n$, ist der Schwerpunkt $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ von A definiert durch:

$$z_j = \frac{1}{\lambda_n(A)} \int_A x_j \, \mathrm{d}x, \text{ für alle } 1 \leq j \leq n,$$

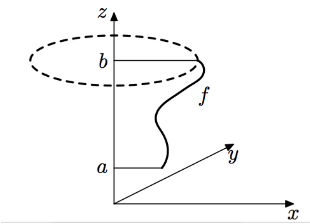
wobei $\lambda_n(A)$ das Volumen von A bezeichnet. Berechnen Sie den Schwerpunkt

i) der Halbkugel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$,

ii) des Tetraeders $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

4. Aufgabe

i) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to [0, +\infty[$ eine stetige Funktion. Der Graph von f werde um die z-Achse rotiert. Berechnen Sie das Volumen des so entstehenden Rotationskörpers.



ii) Welcher Körper ergibt sich für $f : [0, 1] \to [0, +\infty[$, $f(x) = x$? Welches Volumen hat er?