Übungen zur Analysis II für Physiker

Universität Regensburg, Sommersemester 2012
Dr. Nicolas Ginoux / Dr. Mihaela Pilca

Übungsblatt 9, Abgabe am 20.06.2012 bis 12 Uhr

Bitte **jedes Blatt** mit **Ihrem Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** versehen und alle Blätter zusammenheften.

---

1. Aufgabe

Bestimmen Sie ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind[1]:

i) Jede Teilmenge eines metrischen Raumes ist entweder offen oder abgeschlossen.

ii) Das Urbild einer kompakten Teilmenge unter einer stetigen Funktion ist kompakt.

iii) Jede stetige Abbildung auf einem kompakten metrischen Raum ist gleichmäßig stetig.

iv) Der Durchschnitt zusammenhängender Teilmengen ist zusammenhängend.

v) Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ist differenzierbar, falls alle ihre ersten partiellen Ableitungen existieren.

vi) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ kann die Hesse-Matrix einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an der Stelle $(0, 0)$ sein.

vii) Jede C^2-Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f(1, -2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $H_f(1, -2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ hat ein lokales Minimum in $(1, -2)$.

viii) Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Jedes C^1-Vektorfeld $v : U \to \mathbb{R}^n$, $v(x) = (v_1(x), \ldots, v_n(x))$ mit $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$, für alle $1 \leq i, j \leq n$, besitzt ein Potential.

2. Aufgabe

Untersuchen Sie folgende Funktion auf Differenzierbarkeit:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} yx^2 \sin(\frac{1}{x}) + x + 2y, & \text{falls } x \neq 0, \\ 2y, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

3. Aufgabe

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema folgender Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\langle Ax, x \rangle}{2},$$

mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, unter der Nebenbedingung $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{|x|^2 - 1}{2}$.

---

[1] Es ist nicht nötig die Begründung anzugeben, aber Sie sollten Ihre Antwort in der Übungsgruppe begründen können.

4. Aufgabe

i) Bestimmen Sie, ob folgendes Vektorfeld ein Potential besitzt:

$$v : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n, \quad v(x) := \frac{x}{|x|^{2012}}.$$

Falls ja, geben Sie ein Potential an.

ii) Sei v ein C^2-Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$ und f eine differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie folgende Identitäten:

$$\operatorname{rot}(fv) = f\operatorname{rot}(v) + \operatorname{grad}(f) \times v,$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(v)) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(v)) - \Delta v,$$

wobei Δ den Laplace-Operator bezeichnet.