Übungen zur Analysis II für Physiker

Universität Regensburg, Sommersemester 2012
Dr. Nicolas Ginoux / Dr. Mihaela Pilca

Übungsblatt 8, Abgabe am 13.06.2012 bis 12 Uhr

Bitte **jedes Blatt** mit **Ihrem Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** versehen und alle Blätter zusammenheften.

---

1. Aufgabe

Bestimmen Sie die Maxima und Minima der Funktion

$$f : \overline{B}_1(0) \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = y^2 - 5xy,$$

wobei $\overline{B}_1(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ der abgeschlossene Ball vom Radius 1 um den Ursprung ist. Hinweis: Berechnen Sie zuerst die lokalen Extrema von f im Inneren von $\overline{B}_1(0)$ und dann auf dem Rand, d.h. unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

2. Aufgabe

Untersuchen Sie, ob für $x, y \in]0, +\infty[$ die Gleichung $x^y = y^x$ in der Nähe des Punktes $(2, 4)$ nach einer der beiden Variablen auflösbar ist. Falls ja, zeigen Sie, dass die implizit definierte Funktion stetig differenzierbar ist und berechnen Sie ihre erste Ableitung.

3. Aufgabe

In einem metrischen Raum (X, d) ist der Abstand eines Punktes $p \in X$ zu einer Teilmenge $Y \subset X$ definiert wie folgt: $d(p, Y) := \inf\limits_{y \in Y} d(p, y)$.

Betrachten wir jetzt $\mathbb{R}^3$ versehen mit der Standardmetrik, den Punkt $p = (1, -1, 0) \in \mathbb{R}^3$ und das Rotationshyperboloid $H := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}$.

i) Zeigen Sie, dass ein Punkt $x^0 \in H$ existiert, so dass $d(p, H) = d(p, x^0)$. Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Menge H abgeschlossen ist.

ii) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes p zu H. Hinweis: Benutzen Sie die Lagrange-Multiplikatoren.

4. Aufgabe

Untersuchen Sie, ob folgende Vektorfelder ein Potential besitzen:

i) $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad v(x,y) = (ye^{xy} + e^y, xe^{xy} + xe^y),$

ii) $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad v(x,y) = (x - y, x + y),$

iii) $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad v(x,y) = (x^2 - y^2 - 1, -2xy),$

und berechnen Sie $\int_c v$ für die Vektorfelder definiert in i)-iii) und für folgende Kurven:

a) $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (r\cos t, r\sin t)$, für ein $r > 0$,

b) $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (t, t),$

c) $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (t, t^2).$