Übungen zur Analysis II für Physiker

Universität Regensburg, Sommersemester 2012
Dr. Nicolas Ginoux / Dr. Mihaela Pilca
Übungsblatt 7, Abgabe am 6.06.2012 bis 12 Uhr
Bitte **jedes Blatt** mit **Ihrem Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** versehen und alle Blätter zusammenheften.

---

1. Aufgabe

i) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f\ :]0,\infty[\times]0,\infty[\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

im Punkt $(1,1)$ bis zur zweiten Ordnung.

ii) Geben Sie alle partiellen Ableitungen im Ursprung von folgender Funktion

$$g:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R},\quad g(x,y,z,t)=x^3y^5(z^3-2zt^2)$$

an.

2. Aufgabe

Sei $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch:

$$F(x,y,z)=z^3+2xy-4xz+2y-1.$$

i) Zeigen Sie, dass durch $F(x,y,z)=0$ in einer Umgebung von $(x,y)=(1,1)$ eine differenzierbare Funktion $z=\varphi(x,y)$ mit $\varphi(1,1)=1$ implizit definiert ist.

ii) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ im Punkt $(1,1)$.

3. Aufgabe

Zeigen Sie, dass für ein festes $x_0\in\mathbb{R}^n$ die Funktion

$$\psi:\mathbb{R}^n\times]0,\infty[\to\mathbb{R},\quad \psi(x,t)=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4t}},$$

auf dem Gebiet $\mathbb{R}^n\times]0,\infty[$ die Wärmeleitungsgleichung erfüllt:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t)=\Delta\psi(x,t),$$

wobei Δ den Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet: $\Delta=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.
Hinweis: Benutzen Sie die Kettenregel und die Produktregel.

4. Aufgabe

Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima der Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=(4x^2+y^2)e^{-x^2-4y^2}.$$