

Übungen zur Analysis II für Physiker

Universität Regensburg, Sommersemester 2012

Dr. Nicolas Ginoux / Dr. Mihaela Pilca

Übungsblatt 5, Abgabe am 23.05.2012 bis 12 Uhr

Bitte jedes Blatt mit Ihrem Namen und der Nummer Ihrer

Übungsgruppe versehen und alle Blätter zusammenheften.



1. Aufgabe

Sei f die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$.

- i) Zeigen Sie, dass die Abbildung f stetig ist und ihre Einschränkung auf die Teilmenge $D :=]0, \infty[\times]-\pi, \pi]$, $f|_D : D \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, bijektiv ist.
- ii) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung $f|_D^{-1}$ von $f|_D$. Ist $f|_D^{-1}$ stetig?
- iii) Zeigen Sie, dass $f|_{\mathring{D}} : \mathring{D} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$ ein Homöomorphismus ist.

2. Aufgabe

Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy - x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

3. Aufgabe

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2} e^{-\frac{y}{x^2}}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass:

- i) f eine beschränkte Funktion ist und stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- ii) f eingeschränkt auf eine beliebige Gerade in \mathbb{R}^2 stetig ist.
- iii) f nicht stetig im Ursprung ist.
- iv) die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) := xf(x, y)$ stetig auf \mathbb{R}^2 ist.

4. Aufgabe

Seien K und L kompakte Teilmengen von \mathbb{R}^n . Zeigen Sie, dass auch die Menge

$$K + L := \{x + y \mid x \in K, y \in L\}$$

kompakt ist.