Übungen zur Analysis II für Physiker

Universität Regensburg, Sommersemester 2012
Dr. Nicolas Ginoux / Dr. Mihaela Pilca
Übungsblatt 5 - Musterlösung

---

1. Aufgabe

Sei f die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$.

i) Zeigen Sie, dass die Abbildung f stetig ist und ihre Einschränkung auf die Teilmenge $D :=]0, +\infty[\times] - \pi, \pi]$, $f|_D : D \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, bijektiv ist.

ii) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung $f|_D^{-1}$ von $f|_D$. Ist $f|_D^{-1}$ stetig?

iii) Zeigen Sie, dass $f|_{\overset{\circ}{D}} : \overset{\circ}{D} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \,|\, x \leq 0\}$ ein Homöomorphismus ist.

Lösung:

i) Die Abbildung f, die die Polarkoordinaten angibt, ist stetig, weil die Komponenten von f, $f_1(r, \phi) = r \cos \phi$ und $f_2(r, \phi) = r \sin \phi$, stetig sind, als Produkt von stetigen Funktionen.

Die Einschränkung $f|_D : D \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist:

- injektiv: Für alle $(r_1, \phi_1), (r_2, \phi_2) \in D$ mit $f(r_1, \phi_1) = f(r_2, \phi_2)$ folgt $r_1 = |f(r_1, \phi_1)| = |f(r_2, \phi_2)| = r_2$ und damit auch $\cos \phi_1 = \cos \phi_2$ und $\sin \phi_1 = \sin \phi_2$. Da $\phi_1, \phi_2 \in]-\pi, \pi]$, folgt aus den letzten zwei Gleichungen, dass $\phi_1 = \phi_2$. Also $(r_1, \phi_1) = (r_2, \phi_2)$.
- surjektiv: Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Dann lässt sich der Vektor (x, y) in Polarkoordinaten schreiben als $(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2} \cos(\phi(x, y)), \sqrt{x^2 + y^2} \sin(\phi(x, y)))$, wobei das Argument/der Winkel $\phi(x, y) \in] - \pi, \pi]$ gegeben ist durch:

$$\phi(x, y) = \begin{cases} \arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}), \text{ falls } y \geq 0 \\ -\arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}), \text{ falls } y < 0, \end{cases}$$

wobei $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ die Funktion Arkuskosinus bezeichnet (die Umkehrfunktion der Funktion Kosinus eingeschränkt auf den Intervall $[0, \pi]$). Damit ist $(\sqrt{x^2 + y^2}, \phi(x, y)) \in D$ (da $r = \sqrt{x^2 + y^2} \in]0, +\infty[$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ und $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to] - \pi, \pi]$ nach Definition mittels der Funktion Arkuskosinus) und $(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}, \phi(x, y))$, also f ist surjektiv.

Eine andere mögliche Lösung ist direkt die Umkehrabbildung zu finden, wie in ii).

ii) Nach i) können wir folgende Funktion definieren:

$$g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to D, \quad g(x, y) = \begin{cases} (\sqrt{x^2 + y^2}, \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)), \text{ falls } y \geq 0 \\ (\sqrt{x^2 + y^2}, -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)), \text{ falls } y < 0. \end{cases}$$

Wir zeigen, dass g die Umkehrabbildung von $f|_D$ ist: $g = f|_D^{-1}$. Es gibt mehrere Fälle zu betrachten.

1) Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $y \geq 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f(g(x,y)) &= f(\sqrt{x^2+y^2}, \arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})) \\
&= (\sqrt{x^2+y^2}\cos(\arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})), \sqrt{x^2+y^2}\sin(\arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}))) \\
&= (x, |y|) = (x,y)
\end{aligned}
$$

2) Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $y < 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f(g(x,y)) &= f(\sqrt{x^2+y^2}, -\arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})) \\
&= (\sqrt{x^2+y^2}\cos(-\arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})), \sqrt{x^2+y^2}\sin(-\arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}))) \\
&= (x, -|y|) = (x,y)
\end{aligned}
$$

Analog zeigen wir, dass $g \circ f|_D = \mathrm{id}|_D$. Hier sind folgende Fälle zu betrachten:

1') Für $(r,\theta) \in D$, $\phi \in [0,\pi]$ gilt:

$$
g(f(x,y)) = g(r\cos\phi, r\sin\phi) = (\sqrt{r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi}, \arccos\left(\frac{r\cos\phi}{r}\right)) = (r,\phi).
$$

2') Für $(r,\phi) \in D$, $\phi \in]-\pi, 0[$ gilt:

$$
\begin{aligned}
g(f(x,y)) &= g(r\cos\phi, r\sin\phi) = (r, -\arccos\left(\frac{r\cos\phi}{r}\right)) \\
&= (r, -\arccos(\cos(-\phi))) = (r,\phi).
\end{aligned}
$$

Die Funktion $f|_D^{-1} = g$ ist nicht stetig in $(-1,0)$, wie es aus folgender Rechnung folgt. Für die Folge $(x_n,y_n) := (-\cos\left(\frac{1}{n}\right), -\sin\left(\frac{1}{n}\right))$, die gegen $(-1,0)$ konvergiert, gilt:

$$
\lim_{n\to\infty} g\left(-\cos\left(\frac{1}{n}\right), -\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}(1, -\pi + \frac{1}{n}) = (1,-\pi) \neq g(-1,0) = (1,\pi).
$$

iii) Das Innere von D ist $\overset{\circ}{D} =]0,\infty[\times]-\pi,\pi[$ und es folgt aus ii), dass die Abbildung $f|_{\overset{\circ}{D}} : \overset{\circ}{D} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \,|\, x \leq 0\}$ bijektiv ist, mit Umkehrfunktion gegeben durch die Einschränkung der Abbildung g, die wir oben definiert haben: $g|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\,|\,x\leq 0\}}$. Damit $f|_{\overset{\circ}{D}}$ ein Homöomorphismus ist, müssen wir noch zeigen, dass $g|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\,|\,x\leq 0\}}$ stetig ist. Aus der Definition von g folgt, dass g stetig ist auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$ und $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y < 0\}$, als Verknüpfung von Elementarfunktionen. Es bleibt also noch zu zeigen, dass g in allen Punkten der Form $(x,0)$, mit $x > 0$, stetig ist.

Sei $(x,0)$ mit $x > 0$ und sei (x_n,y_n) eine Folge aus $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \,|\, x \leq 0\}$, die gegen $(x,0)$ konvergiert. Nach der Definition von g, gilt:

$$
g(x_n,y_n) = \begin{cases} (\sqrt{x_n^2+y_n^2}, \arccos\left(\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}\right)), & \text{falls } y_n \geq 0 \\ (\sqrt{x_n^2+y_n^2}, -\arccos\left(\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}\right)), & \text{falls } y_n < 0. \end{cases}
$$

Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n, y_n) = (x, 0) = g(x, 0)$, da $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \arccos\left(\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}\right) = \arccos 1 = 0$. Damit ist $f|_{\overset{\circ}{D}}^{-1} = g|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\,|\,x\leq 0\}}$ stetig und $f|_{\overset{\circ}{D}}$ ein Homöomorphismus.

Vorsicht: Um zu zeigen, dass $f|_{\overset{\circ}{D}}$ ein Homöomorphismus ist, könnte man auch den Umkehrsatz anwenden (Satz 2.76 aus der Vorlesung). Aus diesem Satz kann aber **nur** die Stetigkeit der Umkehrabbildung $f|_{\overset{\circ}{D}}^{-1}$ folgen. Man muss mit anderen Methoden zeigen, dass $f|_{\overset{\circ}{D}}$ bijektiv ist, da aus dem Umkehrsatz nur die Existenz einer **lokalen** Umkehrabbildung folgt, d.h. um jeden Punkt, an dem das Differential invertierbar ist, existiert eine offene Umgebung, so dass die Einschränkung der Abbildung auf dieser Umgebung eine Umkehrabbildung besitzt (die dann auch eine C^1-Abbildung ist). Im Allgemeinen ist die Umkehrabbildung **nicht global** definiert. Um den Umkehrsatz anwenden zu dürfen, muss man überprüfen, dass die Voraussetzungen erfüllt sind:

i) $\overset{\circ}{D}$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und $f|_{\overset{\circ}{D}}$ ist eine C^1-Abbildung (das folgt direkt aus der Definition, da jede Komponente eine C^1-Funktion ist).

ii) Das Differential von $f|_{\overset{\circ}{D}}$ an jedem Punkt in $\overset{\circ}{D}$ ist invertierbar (eine direkte Rechnung der Jacobi-Matrix zeigt, dass $J_f(r, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix}$, also die Determinante der Jacobi-Matrix ist gleich $r > 0$ und damit ist in jedem Punkt das Differential von $f|_{\overset{\circ}{D}}$ invertierbar).

2. Aufgabe

Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy - x^2 + y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

Lösung:

Die Funktion f ist stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ als Verknüpfung stetiger Funktionen (als Quotient von Elementarfunktionen, wobei die Funktion im Nenner nirgendwo auf diesem Definitionsbereich verschwindet). Wir zeigen, dass die Funktion f auch an der Stelle $(0, 0)$ stetig ist.

Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &= \frac{|xy - x^2 + y^2|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|x| \cdot |y| + (x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &\leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2\sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Damit folgt $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, also f ist stetig in $(0, 0)$.

3. Aufgabe

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2} e^{-|\frac{y}{x^2}|}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass:

i) f eine beschränkte Funktion ist und stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

ii) f eingeschränkt auf eine beliebige Gerade in $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

iii) f nicht stetig im Ursprung ist.

iv) die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) := xf(x,y)$ stetig auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Lösung:

i) Betrachten wir folgende Funktionen auf $\mathbb{R}$:

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = xe^{-|x|},$$

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} e^{-|\frac{1}{x}|}, \text{ für } x \neq 0, \\ 0, \text{ für } x = 0. \end{cases}$$

Behauptung: Die Funktionen φ und $\tilde{\varphi}$ sind stetig auf $\mathbb{R}$ und beschränkt.

Beweis: Die Funktion φ ist stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen. Damit φ beschränkt ist, genügt es also zu zeigen, dass der Limes der Funktion φ gegen $\pm\infty$ endlich ist. Es gilt: $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-|x|} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \underset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-|x|} = -\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-|x|} = 0$.

Die Funktion $\tilde{\varphi}$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ als Verknüpfung stetiger Funktionen und im Ursprung gilt: $\lim\limits_{x\to 0} \tilde{\varphi}(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} e^{-|\frac{1}{x}|} = 0 = \tilde{\varphi}(0)$ (da $\lim\limits_{x\to 0, x>0} \frac{1}{x} e^{-|\frac{1}{x}|} = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0, x<0} \frac{1}{x} e^{-|\frac{1}{x}|} = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$), also $\tilde{\varphi}$ ist auch im Ursprung stetig. Analog gilt: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \tilde{\varphi}(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} e^{-|\frac{1}{x}|} = 0$ und damit ist auch $\tilde{\varphi}$ eine beschränkte Funktion.

Die Einschränkung von f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) \,|\, y \in \mathbb{R}\}$ lässt sich Verknüpfung folgender Funktionen schreiben: $f(x,y) = \varphi(\frac{y}{x^2})$. Somit ist $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) \,|\, y \in \mathbb{R}\}}$ stetig und beschränkt. Die Einschränkung von f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ lässt sich Verknüpfung folgender Funktionen schreiben: $f(x,y) = \tilde{\varphi}(\frac{x^2}{y})$. Somit ist $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \,|\, x \in \mathbb{R}\}}$ stetig und beschränkt.

Es folgt also, dass f eine beschränkte Funktion ist und stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

ii) Nach i), ist die Einschränkung von f auf eine beliebige Gerade, die nicht durch den Ursprung läuft, stetig. Die Einschränkung von f auf die y-Achse (und auch auf die x-Achse) ist nach Definition identisch Null, also stetig. Für jede andere Gerade der Form $y = ax$, mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ist die Enschränkung von f gegeben durch: $f(x,y) = f(x,ax) = \tilde{\varphi}(\frac{x}{a})$ und damit stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen.

iii) Man kann z.B. folgende Folge betrachten: $(x_n, y_n) := (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$, die gegen $(0,0)$ konvergiert. Es gilt: $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) = e^{-1}$, also $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = e^{-1} \neq f(0,0) = 0$. Daraus folgt, dass f nicht stetig in $(0,0)$ ist.

iv) Die Funktion g ist stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ als Produkt stetiger Funktionen (da f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nach i) stetig ist). Nach i) ist die Funktion f auch beschränkt. Sei c eine positive Konstante, so dass $|f(x,y)| \leq c$, für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$$|g(x,y)| \leq c|x|.$$
Daraus folgt $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 = g(0,0)$, also g ist auch im Ursprung stetig.

4. Aufgabe

Seien K und L kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass auch die Menge
$$K + L := \{x + y \,|\, x \in K, y \in L\}$$
kompakt ist.

Lösung:

Wir zeigen, dass $K + L$ eine kompakte Menge ist direkt mit der Definition einer kompakten Menge, indem wir zeigen dass jede Folge aus $K + L$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge aus $K+L$. Jedes Element x_n der Folge ist von der Form $x_n = y_n + z_n$, mit $y_n \in K$ und $z_n \in L$. Da K eine kompakte Menge ist, besitzt die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus K eine konvergente Teilfolge $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (mit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion), die gegen ein $y \in K$ konvergiert. Jetzt betrachten wir die entsprechende Teilfolge $(z_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ aus L. Da L auch eine kompakte Menge ist, existiert eine Teilfolge dieser Folge $(z_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (mit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion), die gegen ein z in L konvergiert. Damit folgt, dass die Teilfolge $(x_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (y_{\varphi\circ\psi(n)} + z_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $y + z \in K + L$ konvergiert, da $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\varphi\circ\psi(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} y_{\varphi\circ\psi(n)} + \lim\limits_{n\to\infty} z_{\varphi\circ\psi(n)}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_{\varphi\circ\psi(n)} = y$ (als Teilfolge einer Folge, die gegen y konvergiert) und $\lim\limits_{n\to\infty} z_{\varphi\circ\psi(n)} = z$.

Bemerkung: Eine andere mögliche Lösung ist die Charakterisierung von Heine-Borel von kompakten Mengen in $\mathbb{R}^n$ (versehen mit der Standardmetrik) anzuwenden (Satz 2.28 aus der Vorlesung). Dann sollte man zeigen, dass die Menge $K + L$ beschränkt und abgeschlossen ist. Die Beschränktheit folgt direkt aus der Dreiecksungleichung und die Abgeschlossenheit kann man z.B. mit Folgen zeigen (d.h. indem man zeigt, dass der Limes jeder konvergenten Folge aus $K+L$ ein Element aus $K+L$ ist; das folgt aus einer ähnlichen Begründung wie oben, wenn man die Folge aus $K + L$ als Summe von zwei Folgen aus K und L schreibt und benutzt, dass K und L abgeschlossene Mengen von $\mathbb{R}^n$ sind).