Übungen zur Analysis II für Physiker

Universität Regensburg, Sommersemester 2012
Dr. Nicolas Ginoux / Dr. Mihaela Pilca
Übungsblatt 4, Abgabe am 16.05.2012 bis 12 Uhr
Bitte **jedes Blatt** mit **Ihrem Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** versehen und alle Blätter zusammenheften.

---

1. Aufgabe

Zeigen Sie, dass folgende Abbildung

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty[, \quad d(x, y) = \arctan(|x - y|)$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert und dass die offenen Mengen bezüglich dieser Metrik dieselben sind wie bezüglich der Standardmetrik vom $\mathbb{R}$. Hier bezeichnet $\arctan : \mathbb{R} \to] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ die trigonometrische Funktion Arkustangens.

2. Aufgabe

Betrachten Sie in $\mathbb{R}$ folgende Mengen:

$$A_n := \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right], \text{ für } n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Ist die Vereinigung dieser Mengen, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, kompakt? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Aufgabe

Überprüfen Sie, ob folgende Funktionen stetig in $(0, 0)$ sind.

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y^2}, & (x, y) \notin M \\ 0, & (x, y) \in M, \end{cases}$

wobei $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y^2\}$.

4. Aufgabe

Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik. Sei W der offene Würfel in $\mathbb{R}^n$:

$$W := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| < 1, \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$$

und $B_1(0)$ die Einheitskugel:

$$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}.$$

Konstruieren Sie einen Homöomorphismus, *d.h.* eine stetige bijektive Abbildung mit stetiger Umkehrfunktion, zwischen W und $B_1(0)$.

Hinweis: Konstruieren Sie einen Homöomorphismus zwischen $\mathbb{R}^n$ und W (z.B. mit Hilfe der Funktion $f : \mathbb{R} \to] - 1, 1[\,, f(x) = \frac{x}{1+|x|}$) und einen Homöomorphismus zwischen $\mathbb{R}^n$ und $B_1(0)$.