Übungen zur Analysis II für Physiker

Universität Regensburg, Sommersemester 2012

Dr. Nicolas Ginoux / Dr. Mihaela Pilca

Übungsblatt 3, Abgabe am 09.05.2012 bis 12 Uhr

Bitte **jedes Blatt** mit **Ihrem Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** versehen und alle Blätter zusammenheften.

---

1. Aufgabe

Wenn man ein Seil an seinen Enden befestigt und frei herabhängen lässt, dann bildet sich im Idealfall eine Kurve, die durch folgende Parametrisierung gegeben ist:

$$c : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (t, \cosh(t)),$$

wobei Cosinus Hyperbolicus definiert ist als $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.

i) Skizzieren Sie den Graphen von c und bestimmen Sie das Normalenfeld n zu c.

ii) Berechnen Sie die Länge von c.

iii) Berechnen Sie die Krümmung von c in 0.

iv) Erfüllt das Paar $(\dot{c}, n)$ die Frenet-Gleichungen? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Aufgabe

i) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume. Zeigen Sie, dass folgende Abbildung

$$d : (X \times Y) \times (X \times Y) \to [0, \infty[$$
$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

eine Metrik auf $X \times Y$ definiert. Diese heißt die *Produktmetrik* von d_X und d_Y.

ii) Betrachten Sie $\mathbb{R}^2$ einmal mit der in i) definierten Produktmetrik d_1 für $(X, d_X) = (Y, d_Y) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ und einmal mit der Standardmetrik $d_2(x, y) := |x - y|$ (wobei $|\cdot|$ die euklidische Norm bezeichnet). Zeigen Sie, dass folgende Ungleichungen gelten:

$$d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \sqrt{2} d_1(x, y), \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^2.$$

3. Aufgabe

Bestimmen Sie ob folgende Mengen offen oder abgeschlossen im $\mathbb{R}^2$ (versehen mit der Standardmetrik) sind:

i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1, |y| \leq 1\}$

iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$

Bestimmen Sie für jede dieser Mengen das Innere, den Abschluss und den Rand.

4. Aufgabe

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass diese Folge in $(\mathbb{R}^2, d_1)$ genau dann konvergent ist, wenn sie in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ konvergent ist. Hier bezeichnen d_1 und d_2 die Metriken, die in der 2. Aufgabe, ii) definiert wurden. Hinweis: Benutzen Sie die Ungleichung ii) aus der 2. Aufgabe.