Übungen zur Analysis II für Physiker

Universität Regensburg, Sommersemester 2012
Dr. Nicolas Ginoux / Dr. Mihaela Pilca

Übungsblatt 2, Abgabe am 02.05.2012 bis 12 Uhr

Bitte **jedes Blatt** mit **Ihrem Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** versehen und alle Blätter zusammenheften.

---

1. Aufgabe

i) Zeigen Sie, dass die Länge einer regulär parametrisierten ebenen Kurve invariant unter euklidischen Bewegungen im $\mathbb{R}^2$ ist. D.h. für jede regulär parametrisierte Kurve $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ und jede euklidische Bewegung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der Form $x \mapsto A \cdot x + a$ (siehe Vorlesung) gilt:
$$L[c] = L[F \circ c].$$

ii) Zeigen Sie, dass unter den Voraussetzungen von $i)$ auch $\kappa_c = \kappa_{F \circ c}$ für die entsprechenden Krümmungen gilt, sobald F orientierungserhaltend ist.

iii) Sei $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte ebene Kurve, die in Polarkoordinaten gegeben ist, d.h. $c(t) = r(t)(\cos\phi(t), \sin\phi(t))$, wobei $r, \phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ beliebige differenzierbare Funktionen sind. Zeigen Sie, dass die Länge von c gegeben ist durch:
$$L[c] = \int_0^1 \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2}\, dt.$$

2. Aufgabe

i) Finden Sie eine differenzierbare Parametrisierung der Kurve, die durch die Punktmenge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^3 - x^4 = 0\}$ gegeben ist.

ii) Ist die von Ihnen angegebene Parametrisierung regulär?

3. Aufgabe

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < b < a$ und $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ die Menge, die eine Ellipse mit Halbachsen a und b beschreibt.

i) Sei $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (a\cos t, b\sin t)$ die Standardparametrisierung der Ellipse. Finden Sie eine Parametrisierung der Ellipse nach Bogenlänge. Hinweis: Verwenden Sie dazu die Funktion $E_k(t) := \int_0^t \sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}\, d\phi$, für $k \in (0,1)$ (unvollständiges elliptisches Integral 2. Art).

ii) Berechnen Sie die Krümmung der Ellipse.

4. Aufgabe

Die Helix oder die Schraubenlinie ist die Kurve, die sich mit konstanter Steigung um den Mantel eines Zylinders windet und durch folgende Parametrisierung beschrieben ist:
$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt),\ a, b > 0.$$

Ist diese Parametrisierung nach Bogenlänge? Wenn nicht, parametrisieren Sie die Helix nach Bogenlänge um.