Übungen zur Analysis II

Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dr. Nicolas Ginoux
Abgabe am 11.7.2014 bis 12 Uhr
Bitte **jedes Blatt** mit **Ihrem Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** versehen und alle Blätter zusammenheften.

Übungsblatt 14

1. Aufgabe (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Lösungen folgender Differentialgleichungen und geben Sie jeweils das maximale Lösungs-Intervall an.[1]

(a) $x'(t) = a\frac{x(t)}{t}$, $x(1) = 1$ für $a \in \mathbb{Z}$.

(b) $x'(t) = \frac{x(t)}{t} + t^2$, $x(1) = 2$. *Tipp: Ansatz* $x(t) = f(t)t$

(c) $x'(t) = \frac{\sqrt{2-x(t)^2}}{x(t)}$, $x(0) = 1$. *Tipp: Umformen und* $y(t) = 2 - x(t)^2$ *substituieren.*

2. Aufgabe (4 Punkte)
Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sei $h\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Man nehme an, dass ein $\omega \in \mathbb{R}$ existiere mit $h'(t) \leq \omega h(t)$ für alle $t \in [a; b]$. Zeigen Sie, dass

$$h(t) \leq h(a)e^{\omega(t-a)}$$

für alle $t \in [a; b]$ gilt.
(Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $t \mapsto h(t)e^{-\omega t}$*.)*

3. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lokal Orts-Lipschitz-stetige und stetige Abbildung mit

$$f(-t, x) = -f(t, x)$$

für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Für ein $T \in (0; \infty)$ sei $\varphi\colon (-T; T) \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Differentialgleichung $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$. Zeigen Sie, dass

$$\varphi(-t) = \varphi(t)$$

für alle $t \in (-T; T)$ gilt.
(Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $t \mapsto \varphi(-t)$*.)*

Bitte wenden

[1] Wenn eine Aufgabe in dieser Form gestellt ist, müssen Sie immer begründen, wieso es keine weiteren Lösungen gibt.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Für $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und stetige Funktionen $g, h\colon I \to \mathbb{R}$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \cdot \varphi(t)^{\alpha}$$

auf I, wobei $\varphi(t) > 0$ vorausgesetzt wird.

(a) Zeigen Sie, dass eine positive Funktion φ genau dann eine Lösung dieser Differentialgleichung ist, wenn die Funktion $\psi := \varphi^{1-\alpha}$ die Differentialgleichung

$$\psi'(t) = (1-\alpha)(g(t) \cdot \psi(t) + h(t))$$

löst.

(b) Bestimmen Sie eine positive Lösung der Differentialgleichung $x' = \frac{x}{3t} + tx^4$ mit $x(1) = 1$.