Übungen zur Analysis II

Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dr. Nicolas Ginoux
Abgabe am 4.7.2014 bis 12 Uhr
Bitte **jedes Blatt** mit **Ihrem Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** versehen und alle Blätter zusammenheften.

Übungsblatt 13

1. Aufgabe (4 Punkte)
Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^T = A$ und $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Funktion

$$f \colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{2}x^t Ax.$$

(a) Zeigen Sie: die stationären Punkte von f sind genau die Eigenvektoren mit Norm 1 von A.

(b) Bestimmen Sie das Minimum und das Maximum von $f(\mathbb{S}^{n-1})$.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Bestimmen Sie, ob folgende Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ Untermannigfaltigkeiten sind oder nicht.

(a) $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ y = 0 \text{ oder } (x^2 + y^2 = 1 \text{ und } y \geq 0)\}$.

(b) $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2 + y^2 + 2xy = 0\}$.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Sei $E \colon U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass E genau dann eine Erhaltungsgröße von f ist, wenn

$$E'(x) \cdot f(x) = 0$$

für alle $x \in U$ gilt.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld und M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit $M \subset U$. Man nehme an, dass f *tangential an* M sei, d.h., es gelte $f(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$. Zeigen Sie:

(a) Ist $c \colon (a; b) \to U$ eine Integralkurve von f mit $c(t_0) \in M$ für ein $t_0 \in (a; b)$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass $(t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon) \subset (a; b)$ und $c(t) \in M$ für alle $t \in (t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon)$ gilt.

(b) Ist $c \colon (a; b) \to U$ eine Integralkurve von f mit $c(t_0) \in M$ für ein $t_0 \in (a; b)$, so gilt $c((a; b)) \subset M$, sofern M abgeschlossen in U ist.