Übungen zur Analysis II

Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dr. Nicolas Ginoux
Abgabe am 27.6.2014 bis 12 Uhr
Bitte **jedes Blatt** mit **Ihrem Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** versehen und alle Blätter zusammenheften.

Übungsblatt 12

1. Aufgabe (4 Punkte)
Bestimmen Sie die stationären Punkte von $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x^2 + yz$, wobei $\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon \|(x, y, z)\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Für ein $R \in (0; 1)$ betrachten wir $f\colon \mathbb{T}_R \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x$, wobei

$$\mathbb{T}_R := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right)^2 + z^2 = R^2 \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

(a) Bestimmen Sie die stationären Punkte von f.

(b) Bestimmen Sie, welche dieser stationären Punkte lokale Minima und Maxima von f sind.

(Hinweis: Aufgabenteil (b) *kann mit elementaren Methoden gelöst werden.)*

3. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $F\colon \mathbb{R} \times (-1; 1) \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(x, y) := \begin{pmatrix} \cos(x) + y\cos(x)\cos(\frac{x}{2}) \\ \sin(x) + y\sin(x)\cos(\frac{x}{2}) \\ y\sin(\frac{x}{2}) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $S := F(\mathbb{R} \times (-1; 1))$ eine zwei-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Tangentialraumes an S in jedem Punkt.

Bitte wenden

4. Aufgabe (4 Punkte)
Für ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine glatte Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir die Abbildung

$$F\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} f(x)\cos(y) \\ f(x)\sin(y) \\ x \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $S := F(I \times \mathbb{R})$ eine zwei-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Tangentialraumes an S in jedem Punkt.