Übungen zur Analysis II

Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dr. Nicolas Ginoux
Abgabe am 20.6.2014 bis 12 Uhr
Bitte **jedes Blatt** mit **Ihrem Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** versehen und alle Blätter zusammenheften.

Übungsblatt 11

1. Aufgabe (4 Punkte)
Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^T = A$ betrachte man die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{2}x^T Ax.$$

(a) Bestimmen Sie die regulären Werte von f.

(b) Skizzieren Sie die Teilmenge $f^{-1}(\{y\}) \subset \mathbb{R}^2$ im Fall $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $y \in \{-1, 0, 1\}$.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte man folgende Gleichung im $\mathbb{R}^3$:

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} = xyz. \tag{G1}$$

(a) Zeigen Sie, dass offene Umgebungen U von $(1, -1)$ in $\mathbb{R}^2$ und V von 0 in $\mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft existieren: für alle $(x, y) \in U$ gibt es ein eindeutiges $z = g(x, y) \in V$ so, dass (x, y, z) die Gleichung (G1) löst.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $g\colon U \to V$ differenzierbar ist und berechnen Sie $g'(1, -1)$.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Man betrachte folgendes Gleichungssytem im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} e^x - y + x - z & = -1 \\ ye^{-z} - e^{-1} & = 0 \end{cases}. \tag{G2}$$

(a) Sei $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \in \mathbb{R}^3$ eine beliebige Lösung von (G2). Zeigen Sie, dass eine offene Umgebung U von $\hat{x}$ in $\mathbb{R}$ und C^1-Funktionen $g, h\colon U \to \mathbb{R}$ existieren mit $g(\hat{x}) = \hat{y}$, $h(\hat{x}) = \hat{z}$ und so, dass für $y = g(x)$ und $z = h(x)$ das Tripel $(x, g(x), h(x))$ für alle $x \in U$ das Gleichungssystem (G2) löst.

(b) Sei nun $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (0, 1, 1)$ und $g, h\colon U \to \mathbb{R}$ wie in Aufgabenteil (a). Bestimmen Sie $g'(0)$ und $h'(0)$.

Bitte wenden

4. Aufgabe (4 Punkte)
Für ein $R \in (0;1)$ betrachten wir

$$\mathbb{T}_R := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2+y^2} - 1 \right)^2 + z^2 = R^2 \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{T}_R$ eine zwei-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.