Übungen zur Analysis II

Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dr. Nicolas Ginoux
Abgabe am 13.6.2014 bis 12 Uhr
Bitte **jedes Blatt** mit **Ihrem Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** versehen und alle Blätter zusammenheften.

Übungsblatt 10

1. Aufgabe (4 Punkte)
In dieser Aufgabe betrachten wir die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \|x\|_2 \cdot x$, wobei $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ für alle $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$ ist und geben Sie ihre Jacobi-Matrix an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ an.

(b) Ist f zweimal differenzierbar?

2. Aufgabe (4 Punkte)
Man betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2 - xy - 2x + y$.

(a) Zeigen Sie, dass f ein eindeutiges lokales Minimum besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass dieses lokale Minimum ein globales Minimum von f ist.

(Hinweis: leiten Sie aus der Taylor-Formel folgende Identität her:

$$f(x,y) + 1 = \frac{1}{2}(x-1, y) \cdot f''(1,0) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, wobei $f''(x,y)$ die Hesse-Matrix von f an der Stelle (x,y) bezeichnet; folgern Sie die Behauptung.)

3. Aufgabe (4 Punkte)
Untersuchen Sie Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y,z) \mapsto \frac{x^4}{2} + 2y^2 - 2xy - 2yz + z^2$$

auf lokale Extrema und Sattelpunkte.

4. Aufgabe (4 Punkte)
In dieser Aufgabe betrachten wir die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) \mapsto (\frac{x^3 y}{3}, -x + y).$$

Bestimmen Sie alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, die eine Umgebung U besitzen so, dass $f_{|_U}\colon U \to f(U)$ bijektiv ist und ein differenzierbares Inverses hat.