Übungen zur Analysis II

Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dr. Nicolas Ginoux
Abgabe am 6.6.2014 bis 12 Uhr
Bitte **jedes Blatt** mit **Ihrem Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** versehen und alle Blätter zusammenheften.

Übungsblatt 9

1. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene, sternförmige Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ eine differenzierbare Abbildung.
Zeigen Sie: ist $f'\colon U \to \mathbb{R}^{k\times n}$ beschränkt, so ist $f(U) \subset \mathbb{R}^k$ auch beschränkt.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \cos(x)\cdot\sin(y)$$

und geben Sie an, welche Extremalstellen sind.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sin(x^2 y)$. Bestimmen Sie das Taylor-Polynom dritten Grades von f im Punkt $0 \in \mathbb{R}^2$.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Abbildung mit $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sowie $\left|\frac{\partial^3 f}{(\partial x)^{\alpha_1}(\partial y)^{\alpha_2}}(q)\right| < \frac{3}{8\sqrt{2}}$ für alle $q \in \overline{B}_2(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T \in \mathbb{N}_0^2$ mit $|\alpha| = 3$.
Zeigen Sie, dass ein Punkt $p \in B_2(0)$ existiert mit $f(p) < -1$.

(Hinweis: Taylor-Formel)