Übungen zur Analysis II

Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dr. Nicolas Ginoux
Abgabe am Mittwoch, den 28.5.2014 bis 12 Uhr
Bitte **jedes Blatt** mit **Ihrem Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** versehen und alle Blätter zusammenheften.

Übungsblatt 8

1. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Sei $g\colon (0;\infty)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $(r,\varphi,z)\mapsto(r\cos(\varphi),r\sin(\varphi),z)^T$. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von g in einem beliebigen Punkt.

(b) Sei $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ differenzierbar und $\tilde f := f\circ g\colon (0;\infty)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Bestimmen Sie das Differential von $\tilde f$ in Abhängigkeit von partiellen Ableitungen von f.

2. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle differenzierbaren Abbildungen $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^k$ so, dass $\partial_{p,e_1+e_2}f=0$ und $\partial_{p,e_2}f=0$ für alle $p\in\mathbb{R}^2$ erfüllt sind.

(b) Bestimmen Sie alle zweimal differenzierbaren Abbildungen $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^k$ so, dass $f''(p)=0$ für alle $p\in\mathbb{R}^2$ erfüllt ist.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Für ein $k\in\mathbb{N}_0$ sei $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ein Polynom k-ten Grades, d.h., für jedes $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{N}_0^n$ mit $\alpha_1+\cdots+\alpha_n\leq k$ existiere eine Konstante $c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\in\mathbb{R}$ mit

$$f(x)=\sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_n\leq k}} c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$$

für alle $x=(x_1,\ldots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie: für jedes $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{N}_0^n$ mit $\alpha_1+\cdots+\alpha_n\leq k$ gilt

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}(0)=\alpha_1!\cdots\alpha_n!\,c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}.$$

(b) Leiten Sie daraus her, dass f auf $\mathbb{R}^n$ identisch verschwindet, sobald f auf einer Umgebung der $0\in\mathbb{R}^n$ verschwindet.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U\to\mathbb{R}^k$ eine differenzierbare Abbildung und $p\in U$ ein Punkt. Existiert immer der Grenzwert $\lim\limits_{\|h\|\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{\|h\|}$?