Übungen zur Analysis II

Universität Regensburg, Sommersemester 2014

Prof. Dr. Bernd Ammann / Dr. Nicolas Ginoux

Abgabe am 23.5.2014 bis 12 Uhr

Bitte **jedes Blatt** mit **Ihrem Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** versehen und alle Blätter zusammenheften.

Übungsblatt 7

1. Aufgabe (4 Punkte)
In dieser Aufgabe betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ in alle Richtungen differenzierbar ist und berechnen Sie die Richtungsableitungen.

(b) Ist f in $(0,0)$ stetig?

(c) Ist f in $(0,0)$ differenzierbar?

2. Aufgabe (4 Punkte)
Für eine reelle $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n)^T \mapsto \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von f in jedem $p \in \mathbb{R}^n$, falls diese existieren.

(b) Überprüfen Sie mit Hilfe der Definition 2.1 aus Kapitel 8, dass f in jedem $p \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung von f in p. *(Hinweis: Aufgabenteil (a) ist dabei hilfreich, um die Ableitung von f zu bestimmen.)*

Bitte wenden

3. Aufgabe (4 Punkte)
Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A, B \subset M$ nichtleere disjunkte abgeschlossene Teilmengen von M.

(a) Sei

$$f : M \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)},$$

wobei $d(x, C) := \inf \{d(x, y) \,|\, y \in C\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ für jede Teilmenge $C \subset M$. Zeigen Sie, dass f wohldefiniert und stetig ist und bestimmen Sie die Teilmengen $f^{-1}(\{0\})$ sowie $f^{-1}(\{1\})$ von M.

(b) Leiten Sie daraus her, dass disjunkte offene Teilmengen U und V von M existieren mit $A \subset U$ und $B \subset V$.
(Hinweis: Benutzen Sie die Abbildung f aus Aufgabenteil (a) und die Tatsache, dass Urbilder offener Teilmengen unter stetigen Abbildungen offen sind.)

4. Aufgabe (4 Punkte)
Seien X und Y topologische Räume. Der Produktraum $X \times Y$ trage die Produkttopologie (vgl. Übungsblatt 6).

(a) Zeigen Sie: ist $X \times Y$ zusammenhängend, so sind X und Y auch zusammenhängend.

(b) Von hier aus nehmen wir umgekehrt an, dass X und Y zusammenhängend sind. Ziel dieses Aufgabenteils ist es, zu beweisen, dass $X \times Y$ dann zusammenhängend ist. Dazu seien U und V disjunkte offene Teilmengen von $X \times Y$ mit $X \times Y = U \cup V$.

(b1) Sei $x \in X$ beliebig. Zeigen Sie, dass entweder $(\{x\} \times Y) \cap U = \{x\} \times Y$ oder $(\{x\} \times Y) \cap V = \{x\} \times Y$ gilt.

(b2) Zeigen Sie, dass $\Omega_U := \{x \in X \,|\, (\{x\} \times Y) \cap U = \{x\} \times Y\}$ und $\Omega_V := \{x \in X \,|\, (\{x\} \times Y) \cap V = \{x\} \times Y\}$ disjunkte offene Teilmengen von X sind mit $\Omega_U \cup \Omega_V = X$.

(b3) Leiten Sie daraus her, dass entweder $X \times Y = U$ oder $X \times Y = V$ gilt.