Übungen zur Analysis II

Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dr. Nicolas Ginoux
Abgabe am 16.5.2014 bis 12 Uhr
Bitte **jedes Blatt** mit **Ihrem Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** versehen und alle Blätter zusammenheften.

Übungsblatt 6

1. Aufgabe (4 Punkte)
Sei X ein kompakter topologischer Raum, Y ein Hausdorff-Raum und $f : X \to Y$ eine stetige bijektive Abbildung.
Zeigen Sie, dass die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls stetig ist.
(Hinweis: Zeigen Sie, dass f abgeschlossene Teilmengen auf abgeschlossene Teilmengen abbildet.)

2. Aufgabe (4 Punkte)
Seien X und Y topologische Räume. Die *Produkttopologie* $\mathcal{O}_{X\times Y}$ auf $X \times Y$ wird folgendermaßen definiert: eine Teilmenge $U \subset X \times Y$ gehört zu $\mathcal{O}_{X\times Y}$, wenn Familien $(U_i)_{i\in I}$ und $(V_i)_{i\in I}$ existieren mit $U_i \in \mathcal{O}_X$, $V_i \in \mathcal{O}_Y$ für alle $i \in I$ und $U = \bigcup\limits_{i\in I} U_i \times V_i$.

(a) Zeigen Sie, dass die Produkttopologie eine Topologie auf $X \times Y$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $X \times Y$ ein Hausdorff-Raum ist, sofern X und Y Hausdorff-Räume sind.

(c) Zeigen Sie, dass in dem Fall $X = Y = \mathbb{R}$ (beide versehen mit der Standardtopologie) die Produkttopologie von $X \times Y$ mit der Standardtopologie von $\mathbb{R}^2$ übereinstimmt.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Sei (M, d) ein metrischer Raum. Für Teilmengen $A, B \subset M$ wird der Abstand zwischen A und B definiert durch

$$d(A, B) := \inf \{d(a, b) \,|\, a \in A,\, b \in B\}.$$

(a) Zeigen Sie: ist $A \subset M$ eine nichtleere kompakte Teilmenge und $B \subset M$ eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge mit $A \cap B = \varnothing$, so gilt $d(A, B) > 0$.

(b) Gilt diese Aussage, wenn die Kompaktheit von A durch die Abgeschlossenheit von A ersetzt wird?

Bitte wenden

4. Aufgabe (4 Punkte)
Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$ ein Punkt. Die *Zusammenhangskomponente* von x in X wird definiert durch

$$C(x) := \bigcup \{Z \subset X \mid x \in Z \text{ und } Z \text{ zusammenhängend}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $C(x)$ die größte zusammenhängende Teilmenge von X ist, die x enthält.

(b) Zeigen Sie, dass folgende Relation eine Äquivalenzrelation auf X definiert: $y \sim z \iff z \in C(y)$. Was ist dann die Äquivalenzklasse von x?

(c) Zeigen Sie, dass $C(x)$ abgeschlossen in X ist. Ist $C(x)$ offen in X?