Übungen zur Analysis II

Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dr. Nicolas Ginoux
Abgabe am 9.5.2014 bis 12 Uhr
Bitte **jedes Blatt** mit **Ihrem Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** versehen und alle Blätter zusammenheften.

Übungsblatt 5

1. Aufgabe (4 Punkte)
Eine Menge M sei mit der diskreten Metrik d_{disc} versehen. Zeigen Sie: eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus M konvergiert in (M, d_{disc}) genau dann, wenn ein $N \in \mathbb{N}$ so existiert, dass die Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}_{\geq N}}$ konstant ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Sei N eine Teilmenge eines metrischen Raumes (M, d) und sei $\tilde{d}$ die induzierte Metrik auf N. Zeigen Sie:

(a) Ist $(N, \tilde{d})$ vollständig, so ist N abgeschlossen in M.

(b) Ist (M, d) vollständig, so gilt:

$$(N, \tilde{d}) \text{ ist vollständig} \iff N \text{ ist abgeschlossen in } M.$$

3. Aufgabe (4 Punkte)
Sei X ein topologischer Raum, $N \subset X$ eine Teilmenge und $x \in X$ ein Punkt. Zeigen Sie:

(a) $\mathring{N} = X \setminus (\overline{X \setminus N})$ und $\overline{N} = X \setminus (\overbrace{X \setminus N}^{\circ})$.

(b) $x \in \mathring{N} \iff N$ ist eine Umgebung von x.

(c) $x \in \overline{N} \iff$ für alle Umgebungen U von x gilt: $U \cap N \neq \varnothing$.

(d) $x \in \partial N \iff$ für alle Umgebungen U von x gilt: $U \cap N \neq \varnothing$ und $U \cap (X \setminus N) \neq \varnothing$.

(Hinweis: es kann nicht mit Folgen argumentiert werden, da wir hier topologische – und nicht nur metrische – Räume betrachten.)

Bitte wenden

4. Aufgabe (4 Punkte)
Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Ist $A \subset X$ zusammenhängend, so ist der Abschluss von A ebenfalls zusammenhängend.

(b) Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie zusammenhängender Teilmengen von X mit $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \neq \varnothing$, so ist $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ zusammenhängend.