Übungen zur Analysis II

Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dr. Nicolas Ginoux
Abgabe am 2.5.2014 bis 12 Uhr
Bitte **jedes Blatt** mit **Ihrem Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** versehen und alle Blätter zusammenheften.

Übungsblatt 4

1. Aufgabe (4 Punkte)
Seien $k, l \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(lx)\,dx = \begin{cases} \pi & \text{falls } k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

(b) $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\sin(lx)\,dx = 0$.

(Mögliche Lösungswege: 1. Verwenden Sie $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$*. 2. Integrieren Sie partiell und nutzen Sie* $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$, $\cos(x)\sin(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$*.)*

2. Aufgabe (4 Punkte)
Berechnen Sie durch Substitution eine Stammfunktion für folgende Funktionen:

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2+bx+c}$ mit $b, c \in \mathbb{R}$ so, dass $b^2 - 4c < 0$.
(Hinweis: Nutzen Sie die Stammfunktion von $(x^2+1)^{-1}$ *und eine affin-lineare Substitution.)*

(b) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$.

(c) $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{9-\sin^2(x)}}$.

(d) $f(x) = \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$.
(Hinweis: Substituieren Sie $y = \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}$*.)*

3. Aufgabe (4 Punkte)
Bestimmen Sie in den folgenden Fällen eine Stammfunktion für die Funktion f und begründen Sie, ob $\int_0^1 f(x)\,dx$ sowie $\int_0^2 f(x)\,dx$ existieren oder nicht.

(a) $f(x) := e^{2x}\cos(x)$.
(Mögliche Lösungswege: wie in der 1. Aufgabe)

(b) $f(x) := \frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}$.
(Hinweis: Schreiben Sie f *in der Form* $\frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$ *und bestimmen Sie* a, b *und* c*.)*

Bitte wenden

4. Aufgabe (4 Punkte)

1. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sei $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche auf $(a; b)$ differenzierbar ist.

   (a) Zeigen Sie: existiert $\lim\limits_{x \searrow a} f'(x)$, so gilt

   $$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \searrow a} f'(x).$$

   (Hinweis: 1. Mittelwertsatz)

   (b) Gilt diese Gleichung immer noch, wenn man an Stelle von $\lim\limits_{x \searrow a} f'(x)$ die Existenz von $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ verlangt?

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{sonst} \end{cases}$. Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist.

3. *(2 Bonuspunkte)* Ist die Funktion f aus Aufgabenteil 2 glatt?