Übungen zur Analysis II

Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dr. Nicolas Ginoux
Abgabe am 25.4.2014 bis 12 Uhr
Bitte **jedes Blatt** mit **Ihrem Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** versehen und alle Blätter zusammenheften.

Übungsblatt 3

1. Aufgabe (4 Punkte)
Sei für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n : [-1;1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } -1 \leq x \leq 0 \\ x^{\frac{n+1}{n}} & \text{sonst} \end{cases}$.

(a) Bestimmen Sie das Maximum von $[0;1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - x^{\frac{n+1}{n}}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_n$ auf $[-1;1]$ gleichmäßig konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion f.

(c) Zeigen Sie, dass jedes f_n auf $[-1;1]$ stetig differenzierbar ist und dass die Folge $(f'_n)_n$ auf $[-1;1]$ punktweise gegen eine zu bestimmende Funktion g konvergiert.

(d) Ist f differenzierbar? Begründen Sie, warum Theorem 5.4 aus Kapitel 5 angewendet bzw. nicht angewendet werden kann.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Sei

$$f : [0;1] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \cos(\frac{1}{x}) & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ziel der Aufgabe ist, $f \in \mathcal{R}[0;1]$ zu beweisen.

(a) Warum können Sätze 3.1 und 4.4 aus der Vorlesung nicht angewendet werden, um diese Aussage zu beweisen?

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $\delta \in (0;1)$ die Funktion $f_{|[\delta;1]}$ auf $[\delta;1]$ Riemann-integrierbar ist.

(c) Leiten Sie daraus her, dass $f \in \mathcal{R}[0;1]$ gilt.

(Hinweis: Konstruieren Sie mit Hilfe des Aufgabenteils (b) *Treppenfunktionen g_u, g_o auf $[0;1]$ mit $g_u \leq f \leq g_o$ und $\int_0^1 (g_o - g_u)(x)\,dx \leq 3\delta$.)*

Bitte wenden

3. Aufgabe (4 Punkte)
Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konvex*, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $t \in [0; 1]$ die Ungleichung

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

erfüllt ist. Zeigen Sie:

(a) Ist f konvex und differenzierbar, so gilt $f'(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(y)$ für alle $x < y$ aus $\mathbb{R}$.

(b) Ist f konvex und zweimal differenzierbar, so gilt $f'' \geq 0$.

(c) Ist $g : [0; 1] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $g(0) = g(1) = 0$ sowie $g'' \geq 0$, so gilt $g \leq 0$.

(Hinweis: Nehmen Sie an, dass $g(x_0) = \max g([0; 1]) > 0$ für ein $x_0 \in [0; 1]$ gilt und zeigen Sie, dass dann $g(x) = g(x_0) + \int_{x_0}^{x} g'(t)dt \geq g(x_0)$ für alle $x \in [0; 1]$ gilt.)

(d) Ist f zweimal differenzierbar mit $f'' \geq 0$, so ist f konvex.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Seien $p, q \in (1; \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Ungleichung $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ gilt.

(Hinweis: zeigen Sie, dass die Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{p} + \frac{x^q}{q} - x$ zweimal differenzierbar und konvex ist; berechnen Sie $f(1)$, $f'(1)$ und leiten Sie daraus her, dass $f \geq 0$ gilt. Folgern Sie die gewünschte Ungleichung.)

(b) Für $r \in [1; \infty)$ und $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\|z\|_r := \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^r \right)^{\frac{1}{r}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Zeigen Sie für alle $z \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\|\lambda \cdot z\|_r = |\lambda| \cdot \|z\|_r$.

(c) Seien $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. Zeigen Sie mit Hilfe des Aufgabenteils (a), dass $\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq 1$ gilt.

(d) Leiten Sie die *Höldersche Ungleichung* her: für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q.$$