Übungen zur Analysis II

Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dr. Nicolas Ginoux
Abgabe am 16.4.2014 bis 12 Uhr
Bitte **jedes Blatt** mit **Ihrem Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** versehen und alle Blätter zusammenheften.

Übungsblatt 2

1. Aufgabe (4 Punkte)
Seien f und g zwei Riemann-integrierbare Funktionen auf einem Intervall $[a;b]$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann die Funktion $\lambda f + \mu g : [a;b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda f(x) + \mu g(x)$, Riemann-integrierbar ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Seien f und g zwei nichtnegative Riemann-integrierbare Funktionen auf einem Intervall $[a;b]$. Zeigen Sie, dass dann die Funktion $f \cdot g : [a;b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Für $a < b$ betrachte man die Abbildung

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : \mathcal{R}[a;b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|dx. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $f \in \mathcal{R}[a;b]$ gilt $\|f\|_1 \geq 0$. Gibt es $f \in \mathcal{R}[a;b]$, $f \neq 0$, mit $\|f\|_1 = 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{R}[a;b]$ gilt $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \cdot \|f\|_1$.

(c) Für alle $f \in \mathcal{R}[a;b]$ und $g \in \mathcal{R}[a;b]$ gilt $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.

Bitte wenden

4. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $(f_n)_n$ eine Folge reellwertiger Riemann-integrierbarer Funktionen auf einem Intervall $[a;b]$.

(a) Angenommen, die Funktionenfolge $(f_n)_n$ konvergiere gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a;b] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann f Riemann-integrierbar ist und dass $\int_a^b f_n(x)dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)dx$ gilt.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachte man die Funktion

$$\begin{aligned} f_n : [0;1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} n & \text{für } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad . \end{aligned}$$

Ist $f_n \in \mathcal{R}[0;1]$? Zeigen Sie, dass $(f_n)_n$ punktweise auf $[0;1]$ gegen die Nullfunktion konvergiert. Gelten die Aussagen des ersten Aufgabenteils für diese Folge? Begründen Sie Ihre Antwort.