Übungen zur Analysis II

Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dr. Nicolas Ginoux
Abgabe am 11.4.2014 bis 12 Uhr
Bitte **jedes Blatt** mit **Ihrem Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** versehen und alle Blätter zusammenheften.

Übungsblatt 1

1. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $A \subset X$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes X. Zeigen Sie: A ist genau dann abgeschlossen in X, wenn jede Folge in A, die in X konvergiert, ihren Grenzwert in A hat.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $A \subset X$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes X. Der *Abschluss* von A in X wird definiert als

$$\overline{A} := \bigcap \{B \subset X \mid A \subset B \text{ und } B \text{ abgeschlossen in } X\},$$

Zeigen Sie:

1. Der Abschluss von A in X ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die A enthält.
2. Der Abschluss von A in X ist die Menge aller Grenzwerte von in X konvergenten Folgen aus A.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $(f_n)_n$ die Funktionenfolge auf $[0,1]$ durch

$$f_n(x) := n^2 \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right)$$

für alle $x \in [0,1]$ gegeben.

1. Untersuchen Sie $(f_n)_n$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.
2. Untersuchen Sie $(f'_n)_n$ ebenfalls auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. Kann Theorem 5.4 aus Kapitel 5 der Vorlesung angewendet werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes X heißt genau dann *zusammenhängend*, wenn sie sich nicht als disjunkte Vereinigung nichtleerer offener Teilmengen schreiben lässt. Sei $I \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge.

1. Angenommen, I sei kein Intervall. Zeigen Sie, dass dann I nicht zusammenhängend ist.

2. Angenommen, I sei ein Intervall. Wir wollen durch Widerspruch zeigen, dass dann I zusammenhängend ist. Wir nehmen an, es gäbe $U, V \subset I$ nichtleere offene Teilmengen von I mit $U \cup V = I$ und $U \cap V = \emptyset$. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ durch $f_{|U} := 0$ und $f_{|V} := 1$ definiert.

   2a. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

   2b. Leiten Sie unter Benutzung des Zwischenwertsatzes einen Widerspruch her.