Spinoren

Nicolas Ginoux

Universität Hamburg - Sommersemester 2003

26. November 2009

Im Wesentlichen beruht diese Einführung auf [4], siehe auch [1], [2] und [3].

Notationen: Für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ setzen wir

$$\begin{array}{rcl} q_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (z, z') & \longmapsto & \sum_{j=1}^{n} z_j z'_j. \end{array}$$

Für $x \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ bezeichne $|x| := \sqrt{q_{\mathbb{C}}(x,x)}$. In den Teilen 1, 2 und 3 stellen die Vektoren $e_1, \ldots, e_n$ die kanonische Basis von $\mathbb{C}^n$ dar.

1 Die Clifford Algebra

Definition 1.1 *Die* komplexe Clifford Algebra *von* $(\mathbb{C}^n, q_{\mathbb{C}})$ *ist definiert durch*

$$\mathrm{Cl}_n := \otimes\mathbb{C}^n / \mathcal{I}.$$

Hierbei bezeichnet $\otimes\mathbb{C}^n := \oplus_{j\geq 0} \otimes^j \mathbb{C}^n$ *die Tensor-Algebra von* $\mathbb{C}^n$ *und* $\mathcal{I}$ *das zweitseitige Ideal, das von Elementen der Form* $x \otimes x + q_{\mathbb{C}}(x,x)1$ *mit* $x \in \mathbb{C}^n$ *erzeugt wird.*

Notation: Für $\psi, \varphi \in \mathrm{Cl}_n$ wird die Äquivalenzklasse $[\psi \otimes \varphi]$ von $\psi \otimes \varphi$ stets wie folgt bezeichnet:

$$\psi \cdot \varphi := [\psi \otimes \varphi].$$

Dieses Produkt heißt *Clifford-Multiplikation.*

Proposition 1.2 *Das Tripel* $(\mathrm{Cl}_n, +, \cdot)$ *ist eine assoziative Algebra mit Eins, die* $\mathbb{C}^n$ *enthält, und so dass für alle* x, y *aus* $\mathbb{C}^n$ *gilt:*

$$x \cdot y + y \cdot x = -2q_{\mathbb{C}}(x,y)1. \tag{1}$$

Beweis: Dass $(\mathrm{Cl}_n, +, \cdot)$ eine assoziative Algebra mit Eins ist, ist klar. Wegen $\mathbb{C}^n \cap \mathcal{I} = \{0\}$ folgt, dass die Einschränkung der kanonischen Projektion $\otimes\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathrm{Cl}_n$ auf $\mathbb{C}^n$ eine injektive lineare Abbildung ist. $\square$

Bemerkungen 1.3
1) Aus dieser Proposition kann man eine andere Definition von Cl_n herleiten: Cl_n ist die von $\mathbb{C}^n$ und 1 erzeugte assoziative komplexe Algebra zusammen mit der Relation (1).
2) Insbesondere bekommt man folgende Identitäten:

$$\begin{array}{rcll} e_j \cdot e_k & = & -e_k \cdot e_j & \forall j \neq k, \\ e_j \cdot e_j & = & -1. & \end{array}$$

Proposition 1.4 *Es existiert ein linearer Isomorphismus*

$$\mathbb{C}\mathrm{l}_n \cong \bigwedge \mathbb{C}^n,$$

so, dass für alle x aus $\mathbb{C}^n$ und alle φ aus $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ die Identität

$$x \cdot \varphi \simeq x \wedge \varphi - x \lrcorner \varphi$$

erfüllt ist (für das innere Produkt identifiziert man x mit $q_{\mathbb{C}}(x, \cdot) \in (\mathbb{C}^n)^*$). Insbesondere hat $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ eine Basis der Form

$$\left\{1, \quad e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k} \quad / \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n, 1 \leq k \leq n\right\} \tag{2}$$

und $\dim_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}\mathrm{l}_n) = 2^n$.

Beweis: Siehe [4, Prop. 1.3 Chap.1]. □

Proposition 1.5 (Universelle Eigenschaft) *Sei A eine assoziative komplexe Algebra mit Eins und $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow A$ eine lineare Abbildung mit*

$$f(x) \cdot f(x) = -q_{\mathbb{C}}(x, x)1,$$

für alle $x \in \mathbb{C}^n$. Dann existiert ein eindeutiger *Algebrenhomomorphismus $\widetilde{f} : \mathbb{C}\mathrm{l}_n \longrightarrow A$ mit $\widetilde{f}_{|\mathbb{C}^n} = f$. Außerdem ist $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ die einzige komplexe assoziative Algebra, die diese Eigenschaft besitzt.*

Beweis: Definiere die lineare Abbildung $\widetilde{f}$ auf der Basis (2) durch $\widetilde{f}(e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k}) := f(e_{i_1}) \cdot \ldots \cdot f(e_{i_k})$. Man prüft direkt nach, dass $\widetilde{f}$ ein Algebrenhomomorphismus ist; die zweite Behauptung folgt sofort. □

2 Spin und Spin^c Gruppen

Definition 2.1 *Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*
1) $\mathrm{Spin}_n := \{v_1 \cdot \ldots \cdot v_{2k} \quad | \quad k \in \mathbb{N}, \quad v_j \in \mathbb{R}^n, \quad |v_j| = 1 \quad \forall\, 1 \leq j \leq n\}$
2) $\mathrm{Spin}_n^c := \mathrm{Spin}_n \times U_1/\mathbb{Z}_2$, *wobei* $U_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ *und* $\mathbb{Z}_2 \cong \{(1,1), (-1,-1)\}$.

Bemerkung 2.2 Spin_n und Spin_n^c sind Untergruppen von

$$\mathbb{C}\mathrm{l}_n^\times := \{\varphi \in \mathbb{C}\mathrm{l}_n \mid \exists\, \psi \in \mathbb{C}\mathrm{l}_n \text{ s.d. } \varphi \cdot \psi = \psi \cdot \varphi = 1\}.$$

Für Spin_n folgt diese Behauptung aus (1), da jeder nichtverschwindende Vektor aus $\mathbb{R}^n$ ein invertierbares Element von $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ ist. Für Spin_n^c betrachtet man den Gruppenhomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Spin}_n \times \mathbb{U}_1 & \longrightarrow & \mathbb{C}\mathrm{l}_n^\times \\ (u, z) & \longmapsto & uz, \end{array}$$

dessen Kern genau $\{(1,1), (-1,-1)\}$ ist, denn $\mathrm{Spin}_n \cap \mathbb{U}_1 = \{\pm 1\}$. Somit induziert diese Abbildung einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Spin}_n^c \hookrightarrow \mathbb{C}\mathrm{l}_n^\times$.

Satz 2.3 *Es existieren exakte Sequenzen*

$$\begin{array}{ccccccccc} \{1\} & \longrightarrow & \{\pm 1\} & \longrightarrow & \mathrm{Spin}_n & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & \mathrm{SO}_n & \longrightarrow & \{1\} \\ \{1\} & \longrightarrow & \{\pm 1\} & \longrightarrow & \mathrm{Spin}_n^c & \xrightarrow{\mathrm{Ad}^c} & \mathrm{SO}_n \times \mathbb{U}_1 & \longrightarrow & \{1\} \end{array}$$

Beweis: Sei Ad die adjungierte Abbildung:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ad} : \mathbb{C}\mathrm{l}_n^\times & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_{\mathrm{Lie}}\left(\mathbb{C}\mathrm{l}_n\right) \\ a & \longmapsto & \mathrm{Ad}_a \left(\varphi \longmapsto a \cdot \varphi \cdot a^{-1}\right). \end{array}$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ s.d. $|x| = 1$, und für jedes $y \in \mathbb{R}^n$, gilt

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Ad}_x(y) & = & x \cdot y \cdot x^{-1} & \text{wobei } x^{-1} = -x \\ & = & -x \cdot y \cdot x & \\ & = & x \cdot x \cdot y + 2q_{\mathbb{C}}(x,y)x & \text{nach (1)} \\ & = & -\left(y - 2q_{\mathbb{C}}(x,y)x\right), & \end{array}$$

d.h., $\mathrm{Ad}_x(y) \in \mathbb{R}^n$ und $\mathrm{Ad}_{x|_{\mathbb{R}^n}} = -\mathrm{s}_{x^\perp}$ (wobei $\mathrm{s}_{x^\perp}$ die orthogonale Spiegelung an $x^\perp := \{v \in \mathbb{R}^n \mid q_{\mathbb{C}}(x,v) = 0\}$ ist). Man kann daraus folgern, dass für jedes $u \in \mathrm{Spin}_n$ die Abbildung $\mathrm{Ad}_{u|_{\mathbb{R}^n}}$ in SO_n liegt, d.h., man bekommt einen Gruppenhomomorphismus (der noch mit Ad bezeichnet wird) $\mathrm{Ad} : \mathrm{Spin}_n \longrightarrow \mathrm{SO}_n$. Noch zu beweisen ist die Surjektivität von Ad sowie die Identität $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) = \{\pm 1\}$.
Aus dem Satz von Cartan-Dieudonné (*"die Gruppe* SO_n *ist von Produkten in gerader Zahl von Spiegelungen erzeugt"*) folgt die erste Behauptung sofort, denn das Bild von Ad enthält alle Produkte in gerader Zahl von Spiegelungen. Sei nun $u \in \mathrm{Spin}_n$ s.d. $\mathrm{Ad}_u = \mathrm{Id}$ $(= \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$. Die grundsätzliche Bermerkung ist folgende: in der Basis (2) verschwindet die Komponente des Elements u auf $e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_{2l+1}}$, d.h., u kann nur Komponenten auf Produkten in gerader Zahl von e_{i_j}'s haben. Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$ fest. Dann lässt sich u in der Basis (2) schreiben als

$$u = a + e_j \cdot b,$$

wobei a und b Elemente aus $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ sind, die "*kein* e_j enthalten", d.h. jede Komponente von a oder b auf einem $e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_j \cdot \ldots \cdot e_{i_k}$ ist Null (bemerke dazu, dass b nur Komponenten auf Produkten von e_{i_l}, $i_l \neq j$ in *ungerader* Zahl, hat). Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ad}_u(e_j) = e_j & \Longleftrightarrow & u \cdot e_j \cdot u^{-1} = e_j \\ & \Longleftrightarrow & u \cdot e_j = e_j \cdot u \\ & \Longleftrightarrow & a \cdot e_j + e_j \cdot b \cdot e_j = e_j \cdot a + e_j \cdot e_j \cdot b \\ & \Longleftrightarrow & a \cdot e_j + e_j \cdot b \cdot e_j = e_j \cdot a - b. \end{array}$$

Da b nur Komponenten auf Produkten von e_{i_l}, $i_l \neq j$, in ungerader Zahl hat, folgt

$$\begin{array}{rcl} e_j \cdot b \cdot e_j & = & -e_j \cdot e_j \cdot b \\ & = & b, \end{array}$$

und somit

$$a \cdot e_j + b = e_j \cdot a - b.$$

Die Elemente a und b enthalten aber kein e_j, so dass nach Identifikation gilt

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a \cdot e_j & = & e_j \cdot a \\ b & = & -b, \end{array} \right.$$

und daraus folgt $b = 0$ und $u = a$. Das Element u enthält also kein e_j; da dies für jedes e_j gilt, folgt, dass $u \in \mathbb{R}$ gilt und wegen $u \in \mathrm{Spin}_n$ folgt sogar $u = 1$ oder $u = -1$. Somit gilt $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Ad}) = \{\pm 1\}$.

Für Spin_n^c leitet man das Ergebnis aus der ersten Behauptung und dem folgenden kommutativen Diagramm her:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spin}_n \times \mathbb{U}_1 \arrow[r, "\mathrm{Ad}\times\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Proj.}"] & \mathrm{SO}_n \times \mathbb{U}_1 \arrow[d, "\mathrm{Id}\times(z\mapsto z^2)"] \\
\mathrm{Spin}_n^c \arrow[r, "\mathrm{Ad}^c"] & \mathrm{SO}_n \times \mathbb{U}_1
\end{tikzcd}$$

□

Korollar 2.4 *Die Gruppe* Spin_n *ist eine kompakte Lie-Gruppe und*
1) zusammenhängend falls $n \geq 2$.
2) einfach-zusammenhängend falls $n \geq 3$. *Außerdem ist* $\mathrm{Spin}_n \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{SO}_n$ *die universelle Überlagerung von* SO_n.

Beweis: Die erste Behauptung ist klar nach Satz 2.3.
1) Die Lie-Gruppe SO_n ist zusammenhängend; nach Satz 2.3 besitzt also Spin_n höchstens zwei Zusammenhangskomponenten, die in diesem Fall unter $\{\pm 1\}$ vertauscht werden. Wenn die Zusammenhangskomponente von einem $u \in \mathrm{Spin}_n$ das Element $-u$ enthalten würde, könnte man folgern, dass diese Komponente die gesamte Gruppe Spin_n ist, d.h., dass Spin_n zusammenhängend ist. Dies ist offensichtlich unmöglich in Dimension 1 wegen $\mathrm{SO}_1 = \{1\}$ und somit $\mathrm{Spin}_1 = \{\pm 1\}$. Für $n \geq 2$ gilt die Behauptung aus dem folgenden Grund: wähle ein orthonormales Paar von Vektoren (x, y) aus $\mathbb{R}^n$ (möglich wegen $n \geq 2$). Setze

$$\begin{array}{rcl} c : [0, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathrm{Spin}_n \\ t & \longmapsto & \cos(2t) - \sin(2t) x \cdot y. \end{array}$$

Für jedes t ist $c(t)$ wohldefiniert, denn $c(t) = (\cos(t)y + \sin(t)x) \cdot (-\cos(t)y + \sin(t)x)$, und die Vektoren $\cos(t)y + \sin(t)x$ und $-\cos(t)y + \sin(t)x$ haben beide Länge 1. Desweiteren ist c glatt und verbindet 1 mit -1 ($c(0) = 1$, $c(\frac{\pi}{2}) = -1$): deshalb hat Spin_n tatsächlich nur eine Zusammenhangskomponente, d.h., Spin_n ist zusammenhängend.
2) Die Liftungseigenschaft von Wegen in eine Überlagerung liefert folgende exakte Sequenz:

$$\{1\} \longrightarrow \pi_1(\mathrm{Spin}_n) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{SO}_n) \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \{1\}.$$

Für $n \geq 3$ ist $\pi_1(\mathrm{SO}_n) = \{\pm 1\}$, somit ist der dritte Pfeil in der obigen exakten Sequenz nicht nur ein surjektiver Homomorphismus sondern ein *Isomorphismus*, daher ist sein Kern $\{1\}$. Da der zweite Pfeil ein Isomorphismus von $\pi_1(\mathrm{Spin}_n)$ auf diesen Kern ist, schließt man daraus, dass $\pi_1(\mathrm{Spin}_n) = \{1\}$ gilt, d.h., Spin_n ist einfach-zusammenhängend. Zusammen mit der Definition der universellen Überlagerung folgt die letzte Behauptung. □

Bemerkung 2.5 Korollar 2.4 impliziert, dass Spin_n^c eine kompakte Lie-Gruppe ist, die falls $n \geq 2$ zusammenhängend ist mit

$$\pi_1\left(\mathrm{Spin}_n^c\right) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \text{für } n = 2 \\ \mathbb{Z} & \text{für } n \geq 3 \end{cases}$$

Wir betrachten nun die Lie-Algebra von Spin_n und Spin_n^c.

Proposition 2.6 *Sei* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
1) Die Lie-Algebra $\underline{\mathrm{Spin}_n}$ *von* Spin_n *kann mit* $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e_j \cdot e_k \,|\, 1 \leq j < k \leq n\} \subset \mathrm{Cl}_n$ *identifiziert werden mit* $\mathrm{Ad}_*(e_j \cdot e_k) = 2e_j \wedge e_k \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^n \cong \underline{\mathrm{SO}_n}$ *für alle* j,k *mit* $j<k$.
2) Die Lie-Algebra $\underline{\mathrm{Spin}_n^c}$ *von* Spin_n^c *zerlegt sich in* $\underline{\mathrm{Spin}_n^c} = \underline{\mathrm{Spin}_n} \oplus i\mathbb{R}$ *und es gilt* $\mathrm{Ad}_*^c = \mathrm{Ad}_* \oplus 2\mathrm{Id}_{i\mathbb{R}}$.

Beweis: Siehe z.B. [4, Prop. 6.1 & 6.2 Chap. 1]. □

3 Die Spin-Darstellung

In diesem Abschnitt sucht man nach den irreduziblen (komplexen) Darstellungen von Spin_n und Spin_n^c. Zu diesem Zweck beschreiben wir zunächst die Darstellungen von Cl_n.

Satz 3.1 *Sei* $\Sigma_n := \mathbb{C}^{2^{[\frac{n}{2}]}}$. *Dann existiert ein Algebrenisomorphismus*

$$\mathrm{Cl}_n \cong \begin{cases} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n) & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n) \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n) & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Insbesondere gibt es genau eine (bzw. zwei) Äquivalenzklasse(n) irreduzibler komplexer Algebrendarstellungen von Cl_n *falls* n *gerade (bzw. ungerade) ist.*

Beweis: Wir beweisen nur den Fall "n gerade" (siehe z.B. [2] oder [4, Abschn. 1.4] für einen allgemeinen Beweis), d.h., $n = 2m$. In diesem Fall kann Σ_n als expliziter Unterraum von Cl_n beschrieben werden.
Notationen: Für ein $j \in \{1,\ldots,m\}$ setze $z_j := \frac{1}{2}(e_j - ie_{j+m})$ und $\overline{z}_j := \frac{1}{2}(e_j + ie_{j+m})$. Die Vektoren $z_1,\ldots,z_m,\overline{z}_1,\ldots,\overline{z}_m$ stellen die zur kanonischen Basis $(e_1,\ldots,e_{2m})$ assoziierte *Witt-Basis* von $\mathbb{C}^{2m}$ dar. Seien auch $\omega := z_1 \cdot \ldots \cdot z_m$ und $\overline{\omega} := \overline{z}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{z}_m$. Für $r \in \{0,\ldots,m\}$ und $L_r := (l_1,\ldots,l_r) \in \{1,\ldots,m\}^r$ mit $1 \leq l_1 < \ldots < l_r \leq m$, setze $z_{L_r} := z_{l_1} \cdot \ldots \cdot z_{l_r}$ bzw. $\overline{z}_{L_r} := \overline{z}_{l_1} \cdot \ldots \cdot \overline{z}_{l_r}$ (in unserer Konvention gilt $z_{L_r} = 1$ falls $r = 0$).

Lemma 3.2 *Sei* $\Sigma_{2m} := \mathrm{Span}\{z_{L_r} \cdot \overline{\omega} \,|\, 0 \leq r \leq m, \quad 1 \leq l_1 < \ldots < l_r \leq m\}$. *Dann wirkt* Cl_{2m} *auf* Σ_{2m} *von links (mittels der Clifford-Multiplikation) und diese Wirkung liefert einen Algebrenisomorphismus* $\mathrm{Cl}_{2m} \cong \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_{2m})$.

Beweis von Lemma 3.2:

Behauptung 1: Für jedes $\varphi \in \mathrm{Cl}_{2m}$ gilt $\varphi \cdot \Sigma_{2m} \subset \Sigma_{2m}$: Benutze dafür folgende Eigenschaften: für alle j,k gilt $q_{\mathbb{C}}(z_j,z_k) = q_{\mathbb{C}}(\overline{z}_j,\overline{z}_k) = 0$ und $q_{\mathbb{C}}(z_j,\overline{z}_k) = q_{\mathbb{C}}(\overline{z}_j,z_k) = \frac{1}{2}\delta_{jk}$, somit gilt

$$\left| \begin{array}{rcl} z_j \cdot z_k + z_k \cdot z_j & = & \overline{z}_j \cdot \overline{z}_k + \overline{z}_k \cdot \overline{z}_j = 0 \\ z_j \cdot \overline{z}_k + \overline{z}_k \cdot z_j & = & -\delta_{jk}. \end{array} \right.$$

Es folgt $\overline{z}_j \cdot \overline{z}_j = z_k \cdot z_k = 0$ für alle j,k, somit gilt für jedes $k \in \{1,\ldots,m\}$:

$$\overline{z}_k \cdot \overline{\omega} = 0.$$

Da jedes Element von Cl_{2m} eine Linearkombination von (komplexen) Vektoren der Form $z_{L_p} \cdot \overline{z_{L'_q}}$ ist, folgt die Behauptung 1. So bekommt man eine Abbildung $\mathrm{Cl}_{2m} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_{2m})$, die offensichtlich ein Algebrenhomomorphismus ist.

Behauptung 2: Dieser Homomorphismus ist surjektiv: Bemerke zuerst, dass die Elemente $z_{L_r} \cdot \overline{\omega}$ eine Basis von Σ_{2m} darstellen (insbesondere gilt $\dim_{\mathbb{C}}(\Sigma_{2m}) = 2^m$). Im nächsten Schritt zeigt man, dass für feste L_p und L'_q der Endomorphismus $E_{L_p L'_q}$ von Σ_{2m}, der $z_L \cdot \overline{\omega}$ auf $z_{L'_q} \cdot \overline{\omega}$ abbildet falls $L = L_p$ und auf 0 sonst, im Bild vom obigen Homomorphismus liegt. Konstruiere dafür das folgende Element φ von $\mathbb{C}\mathrm{l}_{2m}$:

$$\varphi := z_{L_p} \cdot \omega \cdot \overline{\omega} \cdot \overline{z}_{L'_q}.$$

Die obigen Eigenschaften der z_j und $\overline{z}_j$ implizieren dann, dass $E_{L_p L'_q}$ die Clifford-Multiplikation mit φ ist. Der obige Homomorphismus ist also surjektiv, denn der Vektorraum $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_{2m})$ wird von Endomorphismen der Form $E_{L_p L'_q}$ erzeugt. Wegen $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_{2m})) = (2^m)^2 = 2^n = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\mathrm{l}_n)$ muss der surjektive Homomorphismus ein Isomorphismus sen. □

Der erste Teil von Satz 3.1 wird mit Lemma 3.2 bewiesen. Der zweite folgt aus Darstellungstheorie: Es existiert bis auf Äquivalenz eine einzige komplexe irreduzible Darstellung von $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$, und sie ist die klassische Wirkung von einem $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$ auf Σ_n. Desweiteren existieren genau zwei nichtäquivalente komplexe irreduzible Darstellungen von $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n) \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$: die obige Standardwirkung verknüpft mit einer der Projektionen auf einen der beiden Faktoren.

□ □

Was passiert nun, wenn man diese Darstellung(en) von $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ auf Spin_n einschränkt? Dafür braucht man, weitere Eigenschaften dieser Darstellung(en) zu beschreiben. Für jedes $\varphi \in \mathbb{C}\mathrm{l}_n$ und jedes $\sigma \in \Sigma_n$ bezeichnet man mit $\varphi \cdot \sigma$ die Wirkung von φ auf σ durch den Isomorphismus von Satz 3.1.

Proposition 3.3 *Setze* $\omega_n^{\mathbb{C}} := i^{[\frac{n+1}{2}]} e_1 \cdot \ldots \cdot e_n \in \mathbb{C}\mathrm{l}_n$ *(die* komplexe Volumenform *von* $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$*).*
1) Ist n gerade, so zerlegt sich Σ_n *in* $\Sigma_n = \Sigma_n^+ \oplus \Sigma_n^-$*, wobei*

$$\Sigma_n^{\pm} := \{\sigma \in \Sigma_n \,|\, \omega_n^{\mathbb{C}} \cdot \sigma = \pm 1\}.$$

Außerdem vertauscht jedes $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *die Unterräume* Σ_n^+ *und* Σ_n^-*, d.h.,* $x \cdot \Sigma_n^{\pm} = \Sigma_n^{\mp}$*.*
2) Ist n ungerade, so wird $\omega_n^{\mathbb{C}}$ *durch den Isomorphismus von* Satz (3.1) *auf*

$$\mathrm{Id}_{\Sigma_n} \oplus -\mathrm{Id}_{\Sigma_n}$$

abgebildet.

Beweis: Eine kurze Rechnung liefert $\left(\omega_n^{\mathbb{C}}\right)^2 = 1$; somit zerlegt sich Σ_n in

$$\Sigma_n = \underbrace{\left(\omega_n^{\mathbb{C}} + 1\right) \cdot \Sigma_n}_{\Sigma_n^+} \oplus \underbrace{\left(\omega_n^{\mathbb{C}} - 1\right) \cdot \Sigma_n}_{\Sigma_n^-}. \tag{3}$$

1) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ antikommutieren die Elemente x und $\omega_n^{\mathbb{C}}$ von $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$, d.h., $x \cdot \omega_n^{\mathbb{C}} = -\omega_n^{\mathbb{C}} \cdot x$, so dass $x \cdot \Sigma_n^{\pm} \subset \Sigma_n^{\mp}$ gilt. Die Gleichheit ist wegen $x^{-1} = -\frac{x}{|x|^2}$ erfüllt.
2) In diesem Fall kommutiert jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\omega_n^{\mathbb{C}}$, d.h., $x \cdot \omega_n^{\mathbb{C}} = \omega_n^{\mathbb{C}} \cdot x$, so dass die Zerlegung (3) von $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ erhalten wird. Die Darstellung von $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ auf Σ_n ist aber irreduzibel, somit gilt

$$\Sigma_n = \Sigma_n^+ \qquad \text{oder} \qquad \Sigma_n = \Sigma_n^-,$$

d.h., die Wirkung von $\omega_n^{\mathbb{C}}$ auf Σ_n ist entweder Id oder −Id. Man kann auch zeigen, dass beide Möglichkeiten auftauchen (siehe [2]). □

Notationen

• Für n gerade schreibt man $\delta_n : \mathbb{C}l_n \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$ für die irreduzible Darstellung von $\mathbb{C}l_n$. Für n ungerade und für ein $j \in \{0,1\}$ bezeichnet man mit $\delta_n^j : \mathbb{C}l_n \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$ die irreduzible Darstellung von $\mathbb{C}l_n$, die $\delta_n^j(\omega_n^{\mathbb{C}}) = (-1)^j \mathrm{Id}_{\Sigma_n}$ erfüllt.

• Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\sigma \in \Sigma_n$ nennen wir $\delta_n^{(0)}(x)\sigma$ von Σ_n *die Clifford-Multiplikation von σ mit x*. Wir schreiben kurz "$x \cdot \sigma$".

Proposition 3.4
1) Ist n gerade, so gilt

$$\delta_{n|\mathrm{Spin}_n} = \delta_n^+ \oplus \delta_n^-,$$

wobei $\delta_n^\pm : \mathrm{Spin}_n \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n^\pm)$ *eine irreduzible Darstellung von* Spin_n *ist. Ferner sind* δ_n^+ *und* δ_n^- *nicht äquivalent.*
2) Ist n ungerade, so sind $\delta^0_{n|\mathrm{Spin}_n}$ *und* $\delta^1_{n|\mathrm{Spin}_n}$ *äquivalent und irreduzibel.*

Beweis: Man betrachtet nur den Fall "n gerade". Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $\delta_n(x \cdot y)\Sigma_n^\pm = (\delta_n(x) \circ \delta_n(y))\,\Sigma_n^\pm = \delta_n(x)\Sigma_n^\mp = \Sigma_n^\pm$ nach Proposition 3.3, so dass δ_n die Zerlegung (3) erhält. Setze dann $\delta_n^\pm(u)\sigma := \delta_n(u)\sigma^\pm$ für alle $u \in Spin_n$, wobei $\sigma = \sigma^+ \oplus \sigma^- \in \Sigma_n^+ \oplus \Sigma_n^-$. Man bekommt zwei Darstellungen δ_n^+ und δ_n^- von Spin_n, die irreduzibel und nicht äquivalent und sind (siehe [2] oder [4, Prop. 5.9 Chap. 1]). □

Definition 3.5 *Die* Spin-Darstellung *wird definiert durch*

$$\delta_n := \begin{cases} \delta_{n|\mathrm{Spin}_n} & \textit{falls } n \textit{ gerade} \\ \delta^0_{n|\mathrm{Spin}_n} & \textit{falls } n \textit{ ungerade} \end{cases}$$

Der Vektorraum Σ_n *heißt der* Spinorraum*.*

Bemerkungen 3.6

1) Im Fall n ungerade ist die Spin-Darstellung irreduzibel; falls aber n gerade ist, ist sie *nicht* irreduzibel, da nach Proposition 3.4 die Darstellung δ_n die Summe der beiden irreduziblen (und nicht äquivalenten) Darstellungen δ_n^+ und δ_n^- ist.
2) Beachte, dass δ_n (oder $\delta_n^\pm$) nicht die *einzige* irreduzible Darstellung von Spin_n ist: man kann Darstellungen auf Spin_n dadurch definieren, dass man eine irreduzible Darstellung von SO_n mit Ad verknüpft; da Ad eine Überlagerung ist, bleibt eine solche Darstellung von Spin_n irreduzibel. Allerdings kann die Spin-Darstellung so charakterisiert werden: ist n ungerade (bzw. gerade), so ist δ_n (bzw. sind δ_n^+ und δ_n^-) die einzige (bzw. die beiden einzigen) irreduzible(n) Darstellung(en) *mit kleinstem höchstem Gewicht* von Spin_n, die nicht aus SO_n kommt (kommen), d.h., es existiert keine irreduzible Darstellung $\rho : \mathrm{SO}_n \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$ s.d. $\delta_n^{(\pm)} = \rho \circ \mathrm{Ad}$.
3.) Da δ_n eine *komplexe* Darstellung ist, lässt sie sich auf Spin_n^c auf kanonische Weise fortsetzen.

Auf jedem Darstellungsraum einer *kompakten* Lie-Gruppe kann man ein Hermitesches Skalarprodukt konstruieren, das invariant unter der Gruppe ist. In unserem Fall kann man sogar Besseres erreichen:

Proposition 3.7 *Der Spinorraum Σ_n besitzt ein Hermitesches Skalarprodukt "$\langle \cdot\,,\cdot \rangle$", das die Clifford-Multiplikation mit Vektoren schiefhermitesch macht, d.h., für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\psi, \varphi \in \Sigma_n$ gilt*

$$\langle x \cdot \psi, \varphi \rangle = -\langle \psi, x \cdot \varphi \rangle. \tag{4}$$

Beweis: Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ ein beliebiges Hermitesches Skalarprodukt auf Σ_n und setze, für alle $\psi,\varphi\in\Sigma_n$:

$$\langle\psi,\varphi\rangle := \sum_{g\in G}\langle g\cdot\psi, g\cdot\varphi\rangle',$$

wobei G die von den Vektoren $e_1,\ldots,e_n$ erzeugte (endliche) Untergruppe von $\mathbb{C}\mathrm{l}_n^\times$ ist. Dass "$\langle\cdot\,,\cdot\rangle$" ein Hermitesches Skalarprodukt ist, ist klar. Ferner gilt, für jedes e_j,

$$\begin{aligned}\langle e_j\cdot\psi, e_j\cdot\varphi\rangle &= \sum_{g\in G}\langle\underbrace{g\cdot e_j}_{g'\in G}\cdot\psi, g\cdot e_j\cdot\varphi\rangle'\\ &= \sum_{g'\in G}\langle g'\cdot\psi, g'\cdot\varphi\rangle'\\ &= \langle\psi,\varphi\rangle,\end{aligned}$$

somit gilt

$$\begin{aligned}\langle e_j\cdot\psi,\varphi\rangle &= -\langle e_j\cdot\psi, e_j\cdot e_j\cdot\varphi\rangle\\ &= -\langle\psi, e_j\cdot\varphi\rangle.\end{aligned}$$

Da diese Relation in der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^n$ erfüllt ist, gilt die Behauptung. $\square$

Bemerkungen 3.8
1) Insbesondere ist "$\langle\cdot\,,\cdot\rangle$" unter Spin_n invariant, d.h., es gilt

$$\langle u\cdot\psi, u\cdot\varphi\rangle = \langle\psi,\varphi\rangle$$

für alle $u\in\mathrm{Spin}_n$ und $\psi,\varphi\in\Sigma_n$.
2) Bis auf ein positives Vielfach ist das Skalarprodukt "$\langle\cdot\,,\cdot\rangle$" durch die Bedingung (4) eindeutig bestimmt (siehe [2]).

4 $\mathrm{Spin}^{(c)}$-Strukturen und Spinorbündel

Sei (M^n,g) eine n-dimensionale *orientierte* Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $\mathrm{SO}(TM)\longrightarrow M$ das SO_n-Hauptfaserbündel der positiv-orientierten orthonormalen Basen (p.o.n.B.) des Tangentialbündels $TM\longrightarrow M$. Um jeden Punkt p von M existiert eine Umgebung $U\subset M$ mit

$$\mathrm{SO}(TM)_{|U}\cong U\times\mathrm{SO}_n.$$

Sei s ein Schnitt von $\mathrm{SO}(TM)_{|U}$, d.h., s ist eine glatte Abbildung $U\xrightarrow{s}\mathrm{SO}_n$. Wann kann s in Spin_n geliftet werden, d.h., wann existiert eine glatte Abbildung $U\xrightarrow{\widetilde{s}}\mathrm{Spin}_n$ mit $\mathrm{Ad}\circ\widetilde{s}=s$? Die Existenz von $\widetilde{s}$ wird sichergestellt, sobald U einfach-zusammenhängend ist, und man kann o.B.d.A. U einfach-zusammenhängend annehmen. Dies kann man um jedes $p\in M$ machen; kann aber diese Konstruktion *global* gemacht werden, d.h., liefern diese lokalen Schnitte ein globales *Faserbündel* auf M? Die Antwort lautet genau dann "Ja", wenn M eine Spin-*Struktur* zulässt:

Definition 4.1 *Sei (M^n,g) eine n-dimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit.*
1) Eine Spin-Struktur *auf (M^n,g) ist ein Spin_n-Hauptfaserbündel* $\mathrm{Spin}(TM)\longrightarrow M$ *zusammen mit einer zweifachen Überlagerung* $\mathrm{Spin}(TM)\xrightarrow{\eta}\mathrm{SO}(TM)$, *so dass folgendes Diagramm*

kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spin}(TM) \times \mathrm{Spin}_n \arrow[r] \arrow[d, "\eta\times\mathrm{Ad}"] & \mathrm{Spin}(TM) \arrow[d, "\eta"] \arrow[dr] & \\
 & & M \\
\mathrm{SO}(TM) \times \mathrm{SO}_n \arrow[r] & \mathrm{SO}(TM) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

2) Eine Spin^c-Struktur *auf* (M^n, g) *ist ein* Spin^c_n*-Hauptfaserbündel* $\mathrm{Spin}^c(TM) \longrightarrow M$ zusammen mit *einem* $\mathbb{U}_1$*-Hauptfaserbündel* $\mathbb{U}_1 M \longrightarrow M$ *und einer zweifachen Überlagerung* $\mathrm{Spin}^c(TM) \xrightarrow{\eta^c} \mathrm{SO}(TM) \times \mathbb{U}_1 M$*, so dass folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spin}^c(TM) \times \mathrm{Spin}^c_n \arrow[r] \arrow[d, "\eta^c\times\mathrm{Ad}^c"] & \mathrm{Spin}^c(TM) \arrow[d, "\eta^c"] \arrow[dr] & \\
 & & M \\
\mathrm{SO}(TM) \times \mathbb{U}_1 M \times (\mathrm{SO}_n \times \mathbb{U}_1) \arrow[r] & \mathrm{SO}(TM) \times \mathbb{U}_1 M \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

3) Die Mannigfaltifkeit (M^n, g) *heißt spin (bzw. spin*^{c}*) falls sie eine* Spin- *(bzw.* Spin^c*-)Struktur zulässt.*

Bemerkungen 4.2
1) Mit anderen Worten existiert eine Spin-Struktur existiert auf M genau dann, wenn es eine Reduktion des Hauptfaserbündels $\mathrm{SO}(TM)$ durch den Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Spin}_n \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{SO}_n$ gibt.
2) Besitzt (M^n, g) eine Spin-Struktur, so lässt sie auch eine Spin^c-Struktur zu: für das $\mathbb{U}_1$-Bündel wähle man das *triviale* Bündel $M \times \mathbb{U}_1 \longrightarrow M$, und das Spin^c_n-Bündel wird definiert durch

$$\mathrm{Spin}(TM) \times \mathbb{U}_1 / \{\pm 1\},$$

wobei die Gruppe $\{\pm 1\}$ auf beide Faktoren nichttrivial operiert. Beachte aber, dass es spin^c-Mannigfaltigkeiten gibt, die nicht spin sind (siehe Beispiele 4.3 und [4, Ex. 2.4 Chap.2]).
3) Ist (M^n, g) spin bzw. spin^c, so gibt es im allgemeinen mehrere Spin- bzw. Spin^c-Strukturen auf M, siehe Beispiele 4.3.
4) Die Definition einer Spin- bzw. Spin^c-Struktur hängt von der Metrik g ab; allerdings ist die Bedingung für eine Mannigfaltigkeit, spin bzw. spin^c zu sein, *topologischer Natur*. Eine Mannigfaltigkeit ist nämlich genau dann spin, wenn die zwei ersten Stiefel-Whitney Klassen von M verschwinden (siehe [4, Thm 1.7 Chap.2] und [4, Thm D.2 App.D]).

Beispiele 4.3
1) Sei $(M^n, g) := (\mathbb{R}^n, \mathrm{can})$. Es gilt $\mathrm{SO}(T\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n \times \mathrm{SO}_n$ und $\mathrm{Spin}(T\mathbb{R}^n) := \mathbb{R}^n \times \mathrm{Spin}_n$ ist die einzige Spin-Struktur von $(\mathbb{R}^n, \mathrm{can})$.
2) Sei $(M^n, g) := (S^1, \mathrm{can})$, wobei $S^1 := \mathbb{U}_1$ (diesmal als Mannigfaltigkeit betrachtet). Wegen $\mathrm{SO}(S^1) = S^1 \times \{1\} \cong S^1$ ist jede Spin-Struktur auf S^1 eine zweifache Überlagerung von S^1 selber. Wähle einen Punkt x aus $\mathrm{Spin}(S^1)$; aus der Liftungseigenschaft von Wegen in eine Überlagerung liftet sich der Weg

$$\begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & e^{2i\pi t} \end{array}$$

in eine Kurve, die von x startet und in einem Punkt y endet. Da die Bilder von x und y übereinstimmen und $\mathrm{Spin}(S^1) \longrightarrow S^1$ zweifache Überlagerung ist, gibt es zwei Möglichkeiten: es gilt entweder $y = x$ oder $y = x \cdot (-1)$. Im ersten Fall folgert man, dass die obige Kurve ein Weg ist. Bemerke, dass in diesem Fall die Kurve in y enden würde, wenn sie von y starten würde. Das bedeutet, dass $\mathrm{Spin}(S^1)$ aus zwei Kopien von S^1 besteht, d.h., $\mathrm{Spin}(S^1) = S^1 \times \{\pm 1\}$ und die Überlagerung ist die Projektion auf den ersten Faktor. Im anderen Fall ist die obige Kurve kein Weg und der Totalraum $\mathrm{Spin}(S^1)$ ist *diffeomorph* zu S^1. Als zweifache zusammenhängende Überlagerung von S^1 ist sie isomorph zu

$$\begin{array}{rcl} S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ z & \longmapsto & z^2. \end{array}$$

So hat S^1 genau zwei Spin-Strukturen, die zueinander nicht isomorph sind, denn sogar die Spin_1-Bündel sind nicht homöomorph.
3) Jede 2- oder 3-dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit ist spin. Dies gilt in Dimension 4 nicht mehr, da z.B. $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ (der 2-dimensionale komplexe projektive Raum) nicht spin ist, sondern spin^c.

Definition 4.4 *Sei (M^n, g) eine Riemannsche spin^c Mannigfaltigkeit (mit fester* Spin^c*-Struktur).*
1) Das Spinorbündel *von (M^n, g) ist das zu $\mathrm{Spin}^c(TM) \longrightarrow M$ assoziierte Vektorbündel mittels der* Spin*-Darstellung $\delta_n : \mathrm{Spin}_n \longrightarrow \mathbb{U}(\Sigma_n)$, d.h.,*

$$\begin{array}{rcl} \Sigma M & := & \mathrm{Spin}^c(TM) \times_{\delta_n} \Sigma_n \\ & = & \mathrm{Spin}^c(TM) \times \Sigma_n / \mathrm{Spin}^c_n, \end{array}$$

wobei

$$(p, \sigma) \cdot u := (p \cdot u, \delta_n(u^{-1})\sigma).$$

2) Schnitte von $\Sigma M \longrightarrow M$ heißen Spinoren.

Beispiele 4.5
1) Falls $(M^n, g) := (\mathbb{R}^n, \mathrm{can})$ gilt $\Sigma\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \Sigma_n$, somit sind Spinoren glatte Funktionen $\mathbb{R}^n \longrightarrow \Sigma_n$.
2) Ist $(M^n, g) := (S^1, \mathrm{can})$ mit trivialer Spin-Struktur (d.h., $\mathrm{Spin}(S^1) = S^1 \times \{\pm 1\}$), so gilt $\Sigma S^1 = S^1 \times \Sigma_1$, wobei $\Sigma_1 = \mathbb{C}$. Spinoren sind in diesem Fall glatte Funktionen $S^1 \longrightarrow \mathbb{C}$, d.h., 2π-periodische glatte Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Ist die Spin-Struktur auf S^1 nicht trivial (d.h., $\mathrm{Spin}(S^1) = S^1$ und $\eta = (z \mapsto z^2)$), so gilt $\Sigma S^1 = S^1 \times \mathbb{C}/\{\pm 1\}$; in diesem Fall können Spinoren mit glatten Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ identifiziert werden, die $f(t + 2\pi) = -f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllen.

Proposition 4.6 *Sei (M^n, g) eine Riemannsche spin^c Mannigfaltigkeit. Dann ist das Bündel $\Sigma M \longrightarrow M$ ein komplexes Vektorbündel vom Rang $2^{[\frac{n}{2}]}$, das folgende Eigenschaften besitzt:*
1) Es existiert eine (punktweise) bilineare Abbildung (die Clifford Multiplikation*)*

$$\begin{array}{rcl} TM \times_M \Sigma M & \stackrel{\mu}{\longrightarrow} & \Sigma M \\ (X, \psi) & \longmapsto & X \cdot \psi, \end{array}$$

die erfüllt: für jede $X, Y \in TM$, für jedes $\psi \in \Sigma M$,

$$X \cdot (Y \cdot \psi) + Y \cdot (X \cdot \psi) = -2g(X, Y)\psi.$$

2) Es existiert ein Hermitesches Skalarprodukt "$\langle \cdot , \cdot \rangle$" auf ΣM, so dass

$$\langle X \cdot \psi, \varphi \rangle = -\langle \psi, X \cdot \varphi \rangle, \tag{5}$$

für alle $X \in TM$ und $\psi, \varphi \in \Sigma M$.

Beweis: Da $\mathrm{Spin}^c(TM) \longrightarrow M$ eine Reduktion von $\mathrm{SO}(TM) \times \mathbb{U}_1 M$ ist, gilt

$$\begin{aligned} TM &= (\mathrm{SO}(TM) \times \mathbb{U}_1 M) \times_{p_1} \mathbb{R}^n \\ &= \mathrm{Spin}^c(TM) \times_{p_1 \circ \mathrm{Ad}^c} \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

wobei $\mathrm{SO}_n \times \mathbb{U}_1 \xrightarrow{p_1} \mathrm{SO}(\mathbb{R}^n)$ die Nacheinanderausführung der ersten Projektion mit der klassischen Darstellung von SO_n auf $\mathbb{R}^n$ ist.
1) Definiere μ durch

$$\begin{array}{rcl} \big(\mathrm{Spin}^c(TM) \times_{p_1 \circ \mathrm{Ad}^c} \mathbb{R}^n\big) \times (\mathrm{Spin}^c(TM) \times_{\delta_n} \Sigma_n) & \stackrel{\mu}{\longrightarrow} & \mathrm{Spin}^c(TM) \times_{\delta_n} \Sigma_n \\ ([p,x],[p,\sigma]) & \longmapsto & [p, \delta_n(x)\sigma] \end{array}$$

(zur Erinnerung ist $\delta_n(x) := \delta_n^0(x)$ für n ungerade). Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn für alle $u \in \mathrm{Spin}_n$ und $z \in \mathbb{U}_1$ gilt

$$\begin{aligned} \delta_n\left(p_1 \circ \mathrm{Ad}^c(z^{-1}u^{-1})(x)\right) \delta_n\left(z^{-1}u^{-1}\right)\sigma &= \delta_n\left(\mathrm{Ad}(u^{-1})(x)\right) \delta_n\left(z^{-1}u^{-1}\right)\sigma \\ &= z^{-1}\delta_n\left(u^{-1}\cdot x \cdot u\right) \delta_n\left(u^{-1}\right)\sigma \\ &= z^{-1}\delta_n\left(u^{-1}\cdot x \cdot u \cdot u^{-1}\right)\sigma \\ &= z^{-1}\delta_n\left(u^{-1}\cdot x\right)\sigma \\ &= \delta_n\left(z^{-1}u^{-1}\right)\delta_n(x)\sigma. \end{aligned}$$

Die letzte Behauptung folgt direkt aus (1) und der Tatsache, dass δ_n die Einschränkung auf Spin_n einer Algebrendarstellung von $\mathbb{Cl}_n$ ist.
2) Definiere analog

$$\langle [p,\sigma],[p,\sigma'] \rangle := \langle \sigma, \sigma' \rangle_{\Sigma_n},$$

wobei "$\langle \cdot\,,\cdot \rangle_{\Sigma_n}$" ein Hermitesches Skalarprodukt auf Σ_n ist, das die Bedingung (4) erfüllt. Die Wohldefiniertheit von "$\langle \cdot\,,\cdot \rangle$" folgt unmittelbar aus der Spin_n-Invarianz von "$\langle \cdot\,,\cdot \rangle_{\Sigma_n}$"; aus (4) folgt (5). $\square$

5 Der Spinor-Zusammenhang

Proposition 5.1 *Sei (M^n, g) eine Riemannsche spin$^{(c)}$-Mannigfaltigkeit (mit fester* $\mathrm{Spin}^{(c)}$*-Struktur).*
1) Ist M spin ist, so induziert der Levi-Civita Zusammenhang von g auf TM eine Zusammenhangs-1-Form auf $\mathrm{Spin}(TM) \longrightarrow M$.
2) Ist M spin^c, so induzieren der Levi-Civita Zusammenhang von g auf TM und *eine Zusammenhangs 1-Form auf $\mathbb{U}_1 M \longrightarrow M$ eine Zusammenhangs-1-Form auf* $\mathrm{Spin}^c(TM) \longrightarrow M$.

Beweis: Sei $\omega \in \Gamma\left(T^*\mathrm{SO}(TM) \otimes \underline{\mathrm{SO}_n}\right)$ die Zusammenhangs-1-Form des Levi-Civita Zusammenhangs von g auf TM.
1) Da $\underline{\mathrm{Spin}_n} \xrightarrow{\mathrm{ad}} \underline{\mathrm{SO}_n}$ ein *Isomorphismus* ist, kann folgendes Diagramm derart vervollständigt werden, dass es kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} T\mathrm{Spin}(TM) & & \underline{\mathrm{Spin}_n} \\ \Big\downarrow {\scriptstyle T\eta} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{ad}} \\ T\mathrm{SO}(TM) & \xrightarrow{\omega} & \underline{\mathrm{SO}_n} \end{array}$$

d.h., es existiert eine Abbildung $T\mathrm{Spin}(TM) \xrightarrow{\widetilde{\omega}} \underline{\mathrm{Spin}_n}$ mit $\mathrm{ad} \circ \widetilde{\omega} = \omega \circ T\eta$. Man kann direkt nachweisen, dass $\widetilde{\omega}$ eine Zusammenhangs-1-Form ist.
2) Sei nun $\alpha \in \Gamma\left(T^*\mathbb{U}_1 M \otimes i\mathbb{R}\right)$ eine Zusammenhangs-1-Form auf $\mathbb{U}_1 M \longrightarrow M$. Wie oben kann eine Abbildung $\widetilde{\omega}_\alpha : T^*\mathrm{Spin}^c(TM) \longrightarrow \underline{\mathrm{Spin}^c_n}$ so definiert werden, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
T\mathrm{Spin}^c(TM) \arrow[r, "\widetilde{\omega}_\alpha"] \arrow[d, "T\eta^c"] & \underline{\mathrm{Spin}^c_n} \cong \underline{\mathrm{Spin}_n} \oplus i\mathbb{R} \arrow[d, "\mathrm{ad}^c = \mathrm{ad} \oplus 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}"] \\
T\mathrm{SO}(TM) \oplus T\mathbb{U}_1 M \arrow[r, "\omega \oplus \alpha"] & \underline{\mathrm{SO}_n} \oplus i\mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Man kann auch zeigen, dass $\widetilde{\omega}_\alpha$ eine Zusammenhangs-1-Form ist. □

Definition 5.2
1) Ist (M^n, g) spin, so wird die von $\widetilde{\omega}$ auf ΣM induzierte kovariante Ableitung die Spin-Levi-Civita *kovariante Ableitung genannt, und wird mit $\nabla^{\Sigma M}$ bezeichnet.*
2) Ist (M^n, g) spin^c, so wird die von $\widetilde{\omega}_\alpha$ induzierte kovariante Ableitung auf ΣM mit ∇^A bezeichnet.

Beachte, dass für spin^c Mannigfaltigkeiten die kovariante Ableitung ∇^A auch von der Zusammenhangs-1-Form auf $\mathbb{U}_1 M \longrightarrow M$ abhängt.

Proposition 5.3 *Sei $U \subset M$ eine offene Teilmenge, auf welcher ein glatter Schnitt $s = (e_1, \ldots, e_n) : U \longrightarrow \mathrm{SO}(TM)_{|U}$ existiert und sei $(\sigma_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq 2^{[\frac{n}{2}]}}$ eine orthonormale Basis von Σ_n. Bezeichne mit ∇ die Levi-Civita kovariante Ableitung von (TM, g).*
1) Sei M spin und $\widetilde{s} : U \longrightarrow \mathrm{Spin}(TM)$ ein glatter Schnitt mit $\eta \circ \widetilde{s} = s$. Für $\alpha \in \{1, \ldots, 2^{[\frac{n}{2}]}\}$, setze $\psi_\alpha := [\widetilde{s}, \sigma_\alpha] : U \longrightarrow \Sigma M$. Dann gilt, für alle $X \in \Gamma(TM)_{|U}$,

$$\nabla^{\Sigma M}_X \psi_\alpha = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq j,k \leq n} g\left(\nabla_X e_j, e_k\right) e_j \cdot e_k \cdot \psi_\alpha.$$

2) Sei M spin^c und $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{U}_1 M_{|U}$ sowie $\widetilde{s} : u \longrightarrow \mathrm{Spin}^c(TM)_{|U}$ glatte Schnitte mit $\eta^c \circ \widetilde{s} = (s, \gamma)$. Für $\alpha \in \{1, \ldots, 2^{[\frac{n}{2}]}\}$ setze $\psi_\alpha := [\widetilde{s}, \sigma_\alpha] : U \longrightarrow \Sigma M$. Dann gilt, für alle $X \in \Gamma(TM)_{|U}$,

$$\nabla^A_X \psi_\alpha = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq j,k \leq n} g\left(\nabla_X e_j, e_k\right) e_j \cdot e_k \cdot \psi_\alpha + \frac{1}{2} \alpha\left(\gamma_* X\right) \psi_\alpha.$$

Beweis (siehe z.B. [4, Thm. 4.14 Chap.2]): Hier geht die Formel ein, die eine kovariante Ableitung mit der zugehörigen Zusammenhangs-1-Form (lokal) verbindet; dabei ist zu beachten, dass für alle $X \in TM$ und $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ folgendes gilt:

$$\{\omega(s_* X)\}_{jk} = g\left(\nabla_X e_j, e_k\right).$$

□

Bemerkung 5.4 Ist die Mannigfaltigkeit M spin und trägt sie ihre kanonische Spin^c-Struktur, so stimmen die kovarianten Ableitungen $\nabla^{\Sigma M}$ und ∇^A genau dann überein, wenn $\alpha = 0$ gilt.

6 Der Dirac-Operator

Definition 6.1 *Sei* (M^n, g) *eine Riemannsche spin*^{c} *Mannigfaltigkeit und sei eine Zusammenhangs-1-Form auf* $\mathbb{U}_1 M \longrightarrow M$ *gegeben. Der* Dirac-Operator D^A *ist definiert durch*

$$D^A := \mu \circ \nabla^A : \Gamma(\Sigma M) \longrightarrow \Gamma(\Sigma M),$$

d.h., für jeden Spinor ψ *gilt*

$$\left(D^A \psi\right)_x = \sum_{j=1}^{n} e_j \cdot \{\nabla^A_{e_j} \psi\}_x,$$

wobei $(e_j)_{1 \le j \le n}$ *eine o.n.B. von* $T_x M$ *ist (und* $x \in M$*).*

Literatur

[1] C. Bär, *Das Spektrum von Dirac-Operatoren*, Bonner Math. Schrift. **217** (1991).

[2] J.-P. Bourguignon, O. Hijazi, J.-L. Milhorat, A. Moroianu, *A Spinorial approach to Riemannian and Conformal Geometry* (in preparation).

[3] T. Friedrich, *Dirac operators in Riemannian geometry*, Graduate Studies in Mathematics **25** (2000), American Mathematical Society.

[4] H.B. Lawson, M.-L. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, 1989.