Hilfsmittel zur mengentheoretischen Topologie

Nicolas Ginoux

Universität Regensburg - WS 2008/9

14. Dezember 2010

Das Zeichen “***” signalisiert eine Feinheit, die beim ersten Lesen übergangen werden kann.

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische Räume **2**
- 1.1 Definitionen 2
- 1.2 Relativ- und Produkttopologie 3
- 1.3 Umgebungen 4
- 1.4 Inneres und Abschluss einer Teilmenge 4

2 Konvergente Folgen und hausdorffsche topologische Räume **6**

3 Metrische Räume **7**
- 3.1 Definition 7
- 3.2 Normierte Vektorräume 8
- 3.3 Topologie definiert durch eine Metrik 9
- 3.4 Basis einer Topologie 11
- 3.5 Konvergente Folgen in einem metrischen Raum 12

4 Kompakte topologische Räume **13**
- 4.1 Definitionen 13
- 4.2 Kompakte Teilmengen und Produkte 14
- 4.3 Durchschnitt kompakter Teilmengen 15
- 4.4 Kompakte metrische Räume 16
- 4.5 Kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ 18

5 Stetige Abbildungen **19**
- 5.1 Definitionen und erste Eigenschaften 19
- 5.2 Stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen 20
- 5.3 Stetige lineare Abbildungen 21
- 5.4 Bildtopologie 21
- 5.5 Urbildtopologie 22
- 5.6 Homöomorphismen 23
- 5.7 Stetigkeit und Kompaktheit 24

6 Zusammenhängende topologische Räume **25**
6.1 Definitionen und erste Eigenschaften 25
6.2 Zusammenhangskomponenten 28
6.3 Lokal zusammenhängende topologische Räume 28
6.4 Wegzusammenhängende topologische Räume 29

7 Die Standardtopologie von $\mathbb{R}^n$ **31**

Literatur **32**

1 Topologische Räume

1.1 Definitionen

Definition 1.1 *Sei X eine Menge.*
1.) Eine Topologie *auf X besteht aus einer Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, die folgendes erfüllt:*

i) $\varnothing \in \mathcal{O}$ *und* $X \in \mathcal{O}$

ii) Ist $(\Omega_j)_{j \in J}$ *eine beliebige Familie von Elementen von* $\mathcal{O}$*, so ist* $\bigcup_{j \in J} \Omega_j \in \mathcal{O}$ *(d.h.,* $\mathcal{O}$ *ist stabil unter beliebiger Vereinigung).*

iii) Ist $(\Omega_j)_{1 \leq j \leq n}$ *eine* endliche *Familie von Elementen von* $\mathcal{O}$*, so ist* $\bigcap_{1 \leq j \leq n} \Omega_j \in \mathcal{O}$ *(d.h.,* $\mathcal{O}$ *ist stabil unter endlichem Durchschnitt).*

2.) Ein topologischer Raum *wird gegeben durch ein Paar* $(X, \mathcal{O})$*, wobei* $\mathcal{O}$ *eine Topologie auf* X *ist.*

Elemente einer Topologie heißen *offene Teilmengen*. Eine Teilmenge A von X heißt *abgeschlossen* falls $X \setminus A := \{x \in X,\ x \notin A\}$ offen ist.

Beispiele 1.2

1. Sei X eine beliebige Menge, und $\mathcal{O} := \{\varnothing, X\}$. Dann ist $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X, die die *Klumpentopologie* heißt.

2. Sei X eine beliebige Menge, und $\mathcal{O} := \mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X, d.h. jede Teilmenge von X ist offen. Dann ist $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X, die die *diskrete* Topologie heißt.

Bemerkung 1.3 Aus *i*), *ii*) und *iii*) folgt:

- $\varnothing = X \setminus X$ und $X = X \setminus \varnothing$ sind abgeschlossen,
- für jede Familie $(A_j)_{j \in J}$ von abgeschlossenen Teilmengen von $(X, \mathcal{O})$ ist $\bigcap_{j \in J} A_j$ abgeschlossen (denn $X \setminus (\bigcap_{j \in J} A_j) = \bigcup_{j \in J} \underbrace{(X \setminus A_j)}_{\in \mathcal{O}} \in \mathcal{O}$),

- für jede *endliche* Familie $(A_j)_{1\le j\le n}$ von abgeschlossenen Teilmengen von $(X,\mathcal{O})$ ist $\bigcup\limits_{1\le j\le n} A_j$ abgeschlossen (denn $X\setminus(\bigcup\limits_{1\le j\le n} A_j)=\bigcap\limits_{1\le j\le n}\underbrace{(X\setminus A_j)}_{\in\mathcal{O}}\in\mathcal{O}$).

1.2 Relativ- und Produkttopologie

Proposition 1.4 *Sei $(X,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $Y\subset X$ eine Teilmenge. Dann ist*

$$\mathcal{O}_Y := \{\Omega\cap Y\,|\Omega\in\mathcal{O}\}$$

eine Topologie auf Y. Diese Topologie heißt Relativtopologie *(oder* Teilraumtopologie *bzw.* die von $(X,\mathcal{O})$ induzierte Topologie*) auf Y.*

Beweis: Offenbar gelten $\varnothing=\varnothing\cap Y\in\mathcal{O}_Y$ und $Y=X\cap Y\in\mathcal{O}_Y$. Ferner, für jede Familie $(\Omega_j\cap Y)_{j\in J}$ von Elementen von $\mathcal{O}_Y$ gilt

$$\bigcup_{j\in J}\Omega_j\cap Y=\underbrace{\left(\bigcup_{j\in J}\Omega_j\right)}_{\in\mathcal{O}}\cap Y\in\mathcal{O}_Y,$$

und für jede endliche Familie $(\Omega_j)_{1\le j\le n}$ von Elementen von $\mathcal{O}_Y$ gilt

$$\bigcap_{1\le j\le n}\Omega_j\cap Y=\underbrace{\left(\bigcap_{1\le j\le n}\Omega_j\right)}_{\in\mathcal{O}}\cap Y\in\mathcal{O}_Y.$$

□

Topologischer Raum sein ist also eine Eigenschaft, die jede Teilmenge eines topologischen Raumes erbt.
Das kartesische Produkt zweier topologischer Räume ist auch ein topologischer Raum:

Proposition 1.5 *Seien $(X,\mathcal{O})$ und $(Y,\mathcal{O}')$ zwei topologische Räume. Dann ist*

$$\mathcal{O}'' := \{\Omega\subset X\times Y,\ \Omega=\bigcup_{i\in I}\Omega_i\times\Omega_i' \textit{ mit } \Omega_i\in\mathcal{O} \textit{ und } \Omega_i'\in\mathcal{O}'\}$$

eine Topologie auf $X\times Y$, die die Produkttopologie *heißt.*

Beweis: Wie im letzten Beweis von Proposition 1.4 überprüft man die Axiome: $\varnothing=\varnothing\times\Omega_i'$ für jedes $\Omega_i'\in\mathcal{O}'$, insbesondere $\varnothing\in\mathcal{O}''$. Analog gilt $X\times Y\in\mathcal{O}''$ denn $X\in\mathcal{O}$ und $Y\in\mathcal{O}'$. Dass $\mathcal{O}''$ stabil unter beliebiger Vereinigung ist, folgt direkt aus der Definition von $\mathcal{O}''$. Wegen

$$(\Omega_i\times\Omega_i')\cap(\Omega_j\times\Omega_j')=(\Omega_i\cap\Omega_j)\times(\Omega_i'\cap\Omega_j')$$

für alle Ω_i, $\Omega_j\in\mathcal{O}$ bzw. Ω_i', $\Omega_j'\in\mathcal{O}'$, ist $\mathcal{O}''$ auch stabil unter endlichem Durchschnitt. □

*** Allgemeiner ist jedes *beliebige* Produkt topologischer Räume wieder topologischer Raum (siehe Abschnitt 5.5).

1.3 Umgebungen

Definition 1.6 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Teilmenge U von X heißt* Umgebung *von x g.d.w. eine offene Teilmenge Ω von X so existiert, dass $x \in \Omega$ und $\Omega \subset U$.*
Die Menge aller Umgebungen von x bezüglich $\mathcal{O}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}(x)$.

Bemerkung 1.7 Eine Teilmenge eines topologischen Raumes ist genau dann offen, wenn sie eine Umgebung jedes ihrer Punkte ist. Denn: ist $\Omega \in \mathcal{O}$, dann gilt für jedes $x \in \Omega$: $x \in \Omega$ und $\Omega \subset \Omega$, somit ist $\Omega \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(x)$. Umgekehrt, gilt $\Omega \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(x)$ für alle $x \in \Omega$, so existiert für jedes $x \in \Omega$ ein $\Omega_x \in \mathcal{O}$ s.d. $x \in \Omega_x$ und $\Omega_x \subset \Omega$, und somit gilt $\Omega = \bigcup\limits_{x \in \Omega} \Omega_x \in \mathcal{O}$.

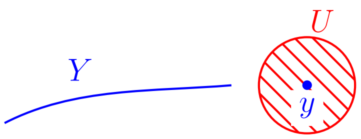
Definition 1.8 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und Y eine Teilmenge von X.*

i) Ein Punkt $y \in Y$ heißt isoliert *in Y g.d.w.*

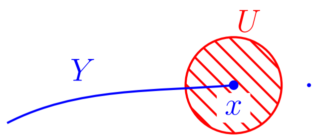
$$\exists U \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(y) \text{ s.d. } U \cap Y = \{y\}.$$

ii) Ein Punkt $x \in X$ heißt Häufungspunkt *von Y g.d.w.*

$$\forall U \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(x),\ (U \cap Y) \setminus \{x\} \neq \varnothing.$$



y ist isoliert in Y



x ist Häufungspunkt von Y

1.4 Inneres und Abschluss einer Teilmenge

Definition 1.9 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und Y eine Teilmenge von X.*

1. *Das* Innere *von Y bezüglich $(X, \mathcal{O})$ wird definiert durch*

$$\overset{0}{Y} := \{y \in Y \mid \exists U \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(y) \text{ s.d. } U \subset Y\}.$$

2. *Der* Abschluss *von Y bezüglich $(X, \mathcal{O})$ wird definiert durch*

$$\overline{Y} := \{y \in X \mid \forall U \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(y), U \cap Y \neq \varnothing\}.$$

Bemerkungen 1.10

1. Jeder Punkt von $\overline{Y}$ ist entweder Häufungspunkt von Y oder isoliert in Y.

2. Für $Y := X$ gelten offenbar $\overset{0}{Y} = X = \overline{Y}$ (siehe auch Korollar 1.12). Die Begriffe von Innerem und Abschluss haben also Sinn nur für echte Teilmengen von X.

3. Das Innere und der Abschluss hängen von X und von $\mathcal{O}$ ab: z.B. wähle $X := \{1, 2\}$ (Menge mit zwei Elementen) und $Y := \{1\}$. Bezüglich der Klumpentopologie gelten $\overset{0}{Y} = \varnothing$ und $\overline{Y} = X$, bzgl. der diskreten Topologie gilt aber $\overset{0}{Y} = \overline{Y} = Y$. Hätten wir $X := \{1\}$ gewählt, so hätte $\overset{0}{Y} = \overline{Y} = Y$ bzgl. der beiden Topologien gegolten.

Proposition 1.11 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Dann gelten:*

1. *$\overset{0}{Y}$ ist die größte in Y enthaltene offene Teilmenge von X:*

$$\overset{0}{Y} \in \mathcal{O}, \quad \overset{0}{Y} \subset Y \textit{ und } \forall\, \Omega \in \mathcal{O} \textit{ s.d. } \Omega \subset Y \textit{ gilt } \Omega \subset \overset{0}{Y}.$$

2. *$\overline{Y}$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die Y enthält:*

$$\overline{Y} \textit{ ist abgeschlossen, } \overline{Y} \supset Y \textit{ und } \forall A \subset X,\ A \textit{ abgeschl., s.d. } A \supset Y, \textit{ gilt } A \supset \overline{Y}.$$

Beweis: Wir zeigen, dass $\overset{0}{Y} = \bigcup\limits_{\substack{\Omega \in \mathcal{O} \\ \Omega \subset Y}} \Omega$ (es folgt unmittelbar daraus, dass $\overset{0}{Y} \in \mathcal{O}$ als Vereinigung von Elementen von $\mathcal{O}$, dass $\overset{0}{Y} \subset Y$, und dass $\overset{0}{Y}$ die größte in Y enthaltene offene Teilmenge von X ist). Denn: ist $y \in \overset{0}{Y}$, so existiert ein $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(y)$ s.d. $U \subset Y$. Wegen $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(y)$ existiert ein $\Omega \in \mathcal{O}$ s.d. $y \in \Omega$ und $\Omega \subset U$, somit $\Omega \subset Y$. Daraus folgt, dass $y \in \bigcup\limits_{\substack{\Omega \in \mathcal{O} \\ \Omega \subset Y}} \Omega$. Umgekehrt, ist $y \in \bigcup\limits_{\substack{\Omega \in \mathcal{O} \\ \Omega \subset Y}} \Omega$, so existiert ein $\Omega \in \mathcal{O}$ s.d. $y \in \Omega$ und $\Omega \subset Y$. Insbesondere gilt $y \in Y$. Da Ω offen ist, ist $\Omega \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(y)$ (siehe Bemerkung 1.7), somit gilt $y \in \overset{0}{Y}$.

Analog zeigen wir, dass $\overline{Y} = \bigcap\limits_{\substack{A \text{ abgeschl.} \\ A \supset Y}} A$ (es folgt unmittelbar daraus, dass $\overline{Y}$ abgeschlossen ist als Durchschnitt von abgeschlossenen Teilmengen, dass $\overline{Y} \supset Y$, und dass $\overline{Y}$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X ist, die Y enthält). Sei $y \in \overline{Y}$ und $A \subset X$ abgeschlossene Teilmenge von X, die Y enthält. Angenommen, $y \notin A$, d.h. $y \in X \setminus A$. Wegen $X \setminus A \in \mathcal{O}$ ist $X \setminus A$ eine Umgebung jedes seiner Punkte (siehe Bemerkung 1.7), insbesondere $X \setminus A \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(y)$, und somit existiert eine Umgebung von y in X, die A nicht trifft ($(X \setminus A) \cap A = \varnothing$), Widerspruch zur Definition von $\overline{Y}$. Also $y \in A$, und daraus folgt $y \in \bigcap\limits_{\substack{A \text{ abgeschl.} \\ A \supset Y}} A$. Umgekehrt, sei $y \in \bigcap\limits_{\substack{A \text{ abgeschl.} \\ A \supset Y}} A$ und $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(y)$, dann existiert ein $\Omega \in \mathcal{O}$ s.d. $y \in \Omega$ und $\Omega \subset U$. Angenommen, $\Omega \cap Y = \varnothing$, dann ist $X \setminus \Omega$ abgeschlossene Teilmenge, die Y enthält, also muss $y \in X \setminus \Omega$ aus der Wahl von y, Widerspruch zu $y \in \Omega$. Es gilt also $U \cap Y \supset \Omega \cap Y \neq \varnothing$, und somit $y \in \overline{Y}$. $\square$

Korollar 1.12 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und Y eine Teilmenge von X. Dann gilt:*

i) Y ist genau dann offen, wenn $Y = \overset{0}{Y}$.

ii) Y ist genau dann abgeschlossen, wenn $Y = \overline{Y}$.

Definition 1.13 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und Y eine Teilmenge von X.*

i) Y heißt diskret *g.d.w. jeder seiner Punkte isoliert in Y ist, d.h.*

$$\forall y \in Y, \exists U \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(y) \text{ s.d. } U \cap Y = \{y\}.$$

ii) Y heißt dicht *in X g.d.w. $\overline{Y} = X$, d.h.*

$$\forall x \in X \text{ und } \forall U \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(x) \text{ gilt } U \cap Y \neq \varnothing.$$

Bemerke, dass X in sich selbst dicht liegt, und dass $Y \subset X$ genau dann diskret ist, wenn die von $(X, \mathcal{O})$ induzierte Topologie auf Y die diskrete Topologie ist.

2 Konvergente Folgen und hausdorffsche topologische Räume

Definition 2.1 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen von X. Wir sagen, die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$* konvergiert *gegen ein Element $x \in X$ g.d.w. gilt:*

$$\forall U \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(x), \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.d. } \forall n \geq N \text{ gilt } x_n \in U.$$

Das Element x heißt dann Grenzwert *der Folge $(x_n)_n$; wir schreiben $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ oder $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.*

Beispiele 2.2 Sei X eine beliebige Menge und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus X.

1. Betrachte die Klumpentopologie $\mathcal{O} := \{\varnothing, X\}$ auf X. Dann gilt: für jedes $x \in X$ konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x. Denn: sei $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(x)$, wegen $U \neq \varnothing$ gilt $U = X$, und für $n \geq N := 0$ gilt offensichtlich $x_n \in U$.

2. Betrachte die diskrete Topologie $\mathcal{O} := \mathcal{P}(X)$ (die *Potenzmenge* von X) auf X. Dann gilt: die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn sie ab einem Rang konstant ist, d.h., wenn ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so existiert, dass $x_n = x_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$ (und dann gilt offenbar $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_{n_0}$). Denn: angenommen, die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt diese Eigenschaft nicht. Für jedes $x \in X$ und für jedes $N \in \mathbb{N}$ existiert ein $n \geq N$ s.d. $x_n \neq x$, und somit die Umgebung $U := \{x\}$ von x bzgl. $\mathcal{O}$ enthält nicht alle x_n für $n \geq N$ (und dies gilt für *alle* $N \in \mathbb{N}$), d.h., die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen x. Das gilt für alle $x \in X$, d.h., $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert überhaupt nicht.

Der eventuelle Grenzwert einer konvergenten Folge ist nicht notwendigerweise *eindeutig*, wie es das Beispiel oben zeigt. Diese Situation wird als spezieller Fall betrachtet, der für die Differentialgeometrie gar nicht interessant ist. Deswegen wird eine bestimmte Klasse topologischer Räume definiert, für die jede konvergente Folge nur einen Grenzwert hat:

Definition 2.3 *Ein topologischer Raum* $(X, \mathcal{O})$ *heißt* hausdorffsch *(oder* Hausdorff-Raum*), falls je zwei verschiedene Punkte aus* X *zwei getrennte Umgebungen besitzen, d.h.*

$$\forall\, x_1 \neq x_2 \in X,\ \exists\, U_1 \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(x_1) \text{ und } U_2 \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(x_2) \text{ s.d. } U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Man sagt dann, dass die Topologie die Punkte trennt*.*

Beispiele 2.4

1. Mit der Klumpentopologie ist jede Menge mit mindestens zwei Elementen *nicht* hausdorffsch (denn die einzige nichtleere offene Teilmenge von X ist X selbst).

2. Mit der diskreten Topologie ist jede Menge hausdorffsch (als Teilmenge ist jeder Punkt offen bzgl. der diskreten Topologie).

Bemerkung 2.5 In jedem Hausdorff-Raum hat jede konvergente Folge *nur einen* Grenzwert. Denn: konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in X$, und ist $y \neq x$, so existieren zwei Umgebungen $U_1 \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(x)$ und $U_2 \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(y)$ s.d. $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Wegen $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $x_n \in U_1$ für alle $n \geq N_0$. Für alle $N \in \mathbb{N}$ existiert also ein $n \geq N$ s.d. $x_n \in U_1$, insbesondere $x_n \notin U_2$, d.h. die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen y.

Eine sehr wichtige Klasse hausdorffscher topologischer Räume ist die der *metrischen* Räume.

3 Metrische Räume

3.1 Definition

Definition 3.1

1. *Eine* Metrik *(oder ein* Abstand*) auf einer Menge* X *ist eine Abbildung*

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

die die folgenden Axiomen erfüllt: für alle x*,* y *und* z *in* X *gelten*

i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ *(d trennt die Punkte)*

ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *(Symmetrie)*

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(Dreiecksungleichung)*

2. *Ein* metrischer Raum *ist ein Paar* (X, d)*, wobei* X *eine Menge ist und* d *eine Metrik auf* X *ist.*

Bemerkungen 3.2

1. Aus den Axiomen *ii)* und *iii)* folgt $d(x,y) \geq 0$ für alle $x,\, y \in X$.
2. Sei Y eine Teilmenge eines metrischen Raumes (X,d). Da $d_{|Y\times Y}$ noch eine Metrik auf Y ist, erbt Y von X eine Struktur von metrischem Raum.

Lemma 3.3 *Seien (X,d_X) und (Y,d_Y) metrische Räume, dann ist die durch*

$$d\left((x,y),(x',y')\right) := \max\left(d_X(x,x'), d_Y(y,y')\right)$$

definierte Abbildung $(X\times Y)\times(X\times Y) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Metrik auf $X\times Y$, die die Produktmetrik *von d_X mit d_Y heißt.*

Beweis: Axiome nachprüfen. $\square$

Eine andere wichtige Klasse von Beispielen metrischer Räume besteht aus der der *normierten* Vektorräume.

3.2 Normierte Vektorräume

Definition 3.4 *Sei V ein (reeller oder komplexer) Vektorraum. Eine* Norm *auf V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$, die erfüllt:*

i) für alle $x \in V$ gilt $\|x\| \geq 0$, und ferner $\|x\| = 0$ g.d.w. $x = 0$,

ii) für alle $x \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) gilt $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

iii) für alle x und y in V gilt $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt dann normierter Vektorraum.

Bemerkung 3.5 Nach *ii)* und *iii)* gilt auch

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$$

für alle x und y aus V.

Lemma 3.6 *Jede Norm auf einem Vektorraum induziert eine Metrik: sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, dann ist die durch*

$$d(x,y) := \|x-y\|$$

definierte Abbildung $d : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Metrik auf V.

Beweis: Axiome nachprüfen. $\square$

Beispiele 3.7

1. Sei X eine Menge. Die durch
$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$
definierte Abbildung $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Metrik auf X.

2. Sei $X := \mathbb{R}^n$ (mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$) und $\|\cdot\|$ die durch
$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad \text{für alle } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$
definierte Abbildung auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, die die *kanonische euklidische Norm* heißt. Die durch $d(x,y) := \|x - y\|$ definierte Metrik auf $\mathbb{R}^n$ heißt *Standardmetrik* (oder *kanonische* Metrik).

3. Sei wiederum $X := \mathbb{R}^n$ (mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$) und $\|\cdot\|_\infty$ die durch
$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \qquad \text{für alle } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$
definierte Abbildung auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Die Metrik zu dieser Norm ist genau die Produktmetrik auf $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n-\text{mal}}$, wobei $\mathbb{R}$ seine kanonische Metrik $d(x,y) := |x - y|$ trägt (Übungsaufgabe).

3.3 Topologie definiert durch eine Metrik

Definition 3.8 *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Sei $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Der* offene *bzw.* abgeschlossene Ball *von Radius r um x bzgl. d wird definiert durch*
$$B_d(x,r) := \{y \in X,\ d(x,y) < r\}$$
bzw.
$$\overline{B}_d(x,r) := \{y \in X,\ d(x,y) \leq r\}.$$

Bzgl. der Standardmetrik auf $\mathbb{R}^n$ sind die offenen bzw. abgeschlossenen Bälle die üblichen offenen bzw. abgeschlossenen Bälle. Bzgl. der Produktmetrik (Beispiel 3.7 3.) sind die offenen bzw. abgeschlossenen Bälle offene bzw. abgeschlossene *Hyperwürfel*, d.h. Produkte von beschränkten offenen bzw. abgeschlossenen reellen Intervallen.

Lemma 3.9 *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Die durch*
$$\Omega \in \mathcal{O} \iff \Omega = \varnothing \text{ oder } \forall\, x \in \Omega,\ \exists\, r > 0 \text{ s.d. } B_d(x,r) \subset \Omega$$
definierte Teilmenge $\mathcal{O}$ von $\mathcal{P}(X)$ ist eine hausdorffsche Topologie auf X. Sie heißt die von d induzierte Topologie auf X.

Beweis: Die Teilmengen $\Omega := \varnothing$ und $\Omega := X$ genügen offensichtlich der Definition von Elementen von $\mathcal{O}$.
Sei nun $(\Omega_j)_{j\in J}$ eine beliebige Familie von Elementen von $\mathcal{O}$. Für jedes $x \in \bigcup_{j\in J} \Omega_j$ existiert ein $j_0 \in J$ s.d. $x \in \Omega_{j_0}$; wegen $\Omega_{j_0} \in \mathcal{O}$ existiert ein $r > 0$ s.d. $B_d(x,r) \subset \Omega_{j_0}$ und daher $B_d(x,r) \subset \bigcup_{j\in J} \Omega_j$, was $\bigcup_{j\in J} \Omega_j \in \mathcal{O}$ beweist.
Seien Ω_1 und Ω_2 aus $\mathcal{O}$. Sei $x \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Wegen $x \in \Omega_1$ bzw. $x \in \Omega_2$ existiert ein $r_1 > 0$ bzw. ein $r_2 > 0$ s.d. $B_d(x,r_1) \subset \Omega_1$ bzw. $B_d(x,r_2) \subset \Omega_2$. Setze $r := \min(r_1, r_2)$, dann ist der Ball $B_d(x,r)$ in Ω_1 und in Ω_2 enthalten, d.h. $B_d(x,r) \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$. Dies zeigt $\Omega_1 \cap \Omega_2 \in \mathcal{O}$.
Daraus folgt, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X ist. Bemerke, dass offene Bälle tatsächlich offen sind, denn: betrachte $y \in B_d(x,r)$ wobei $x \in X$ und $r > 0$. Aus der Definition von $B_d(x,r)$ ist $d(x,y) < r$. Wegen der Dreiecksungleichung gilt dann:

$$B_d(y, r - d(x,y)) \subset B_d(x,r)$$

(wegen $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + r - d(x,y)$ für alle $z \in B_d(y, r - d(x,y))$).
Seien jetzt x und y aus X mit $x \neq y$. Setze $r := \frac{d(x,y)}{2}$ ($r > 0$ wegen $x \neq y$ und $i)$). Wegen der Dreiecksungleichung gilt dann

$$B_d(x,r) \cap B_d(y,r) = \varnothing,$$

und $B_d(x,r)$ bzw. $B_d(y,r)$ ist eine offene Umgebung von x bzw. y. Dies zeigt, dass die Topologie $\mathcal{O}$ auf X hausdorffsch ist. □

Beispiele 3.10

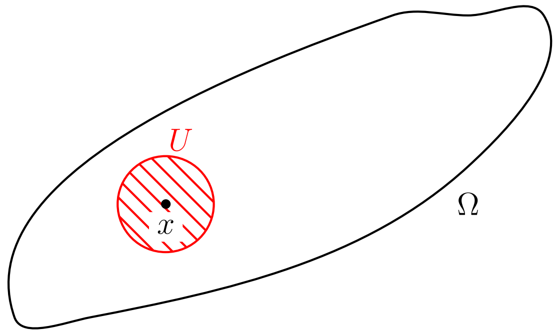
1. Sei (X,d) wie im Beispiel 3.7 1.. Dann ist die von d induzierte Topologie die diskrete Topologie auf X.

2. Sei (X,d) metrischer Raum und $Y \subset X$ (nichtleere) Teilmenge. Dann stimmt die von der induzierten Metrik induzierte Topologie auf Y mit der Relativtopologie überein (Übungsaufgabe).

3. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und betrachte die von den respektiven Metriken induzierten Topologien auf X und Y. Dann stimmt die von der Produktmetrik (Lemma 3.3) induzierte Topologie auf $X \times Y$ mit der Produkttopologie (Proposition 1.5) überein (Übungsaufgabe).

Definition 3.11 *Sei $X := \mathbb{R}^n$ und d die im* Beispiel 3.7.2 *definierte Standardmetrik auf $\mathbb{R}^n$. Die von d induzierte Topologie heißt* Standardtopologie *auf $\mathbb{R}^n$.*

Eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist also genau dann offen bzgl. der Standardtopologie, wenn sie für jeden ihrer Punkte einen hinreichend kleinen offenen Ball darum enthält. Z. B. die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ bzgl. der Standardtopologie sind die disjunkten Vereinigungen offener Intervalle (da ein offener Ball in diesem Fall ein offenes Intervall ist). Später wird man zeigen, dass die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$ mit der Produkttopologie übereinstimmt (siehe Abschnitt 7).



3.4 Basis einer Topologie

An dieser Stelle ist es praktisch, folgenden Begriff einzuführen:

Definition 3.12 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$.*

i) Eine Teilmenge $\mathcal{B}_x$ von $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}(x)$ heißt Basis von Umgebungen *von x bzgl. $\mathcal{O}$ g.d.w. jede Umgebung von x ein Element von $\mathcal{B}_x$ enthält, d.h.*

$$\forall\, U \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(x),\ \exists\, B \in \mathcal{B}_x \text{ s.d. } B \subset U.$$

ii) Eine Teilmenge $\mathcal{B}$ von $\mathcal{P}(X)$ heißt Basis der Topologie $\mathcal{O}$ *g.d.w. jedes Element von $\mathcal{O}$ verschieden von der leeren Menge sich als Vereinigung von Elementen von $\mathcal{B}$ schreiben lässt, d.h.*

$$\forall\, \Omega \in \mathcal{O},\ \Omega \neq \varnothing,\ \exists\, (B_i)_{i \in I},\ B_i \in \mathcal{B},\ \text{ s.d. } \Omega = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Beispiele 3.13

1. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{O}$ die von d induzierte Topologie. Dann bildet für jedes $x \in X$ die Menge $\mathcal{B}_x := \{B_d(x, r),\ r > 0\}$ eine Basis von Umgebungen von x bzgl. $\mathcal{O}$.

2. Sei wiederum (X, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{O}$ die von d induzierte Topologie. Dann bildet für jedes $x \in X$ die Menge $\mathcal{B}_x := \{B_d(x, \frac{1}{m}),\ m \in \mathbb{N},\ m \geq 1\}$ eine Basis von Umgebungen von x bzgl. $\mathcal{O}$. Somit besitzt jeder Punkt eines metrischen Raumes eine *abzählbare* Basis von Umgebungen.

3. Sei $\mathcal{O}$ die Klumpentopologie auf einer Menge X. Dann ist $\mathcal{B} := \{X\}$ eine Basis von $\mathcal{O}$ (die einzige mögliche Basis von $\mathcal{O}$ überhaupt!).

4. Sei $\mathcal{O}$ die diskrete Topologie auf einer Menge X. Dann ist $\mathcal{B} := \{\{x\},\ x \in X\}$ eine Basis von $\mathcal{O}$.

5. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{O}$ die von d induzierte Topologie. Dann bildet $\mathcal{B} := \{B_d(x, r),\ x \in X,\ r > 0\}$ bzw. $\mathcal{B}' := \{B_d(x, \frac{1}{m}),\ x \in X,\ m \in \mathbb{N},\ m \geq 1\}$ eine Basis von $\mathcal{O}$.

6. Seien $(X, \mathcal{O})$ und $(Y, \mathcal{O}')$ topologische Räume. Dann bildet $\mathcal{B} := \{\Omega \times \Omega', \quad \Omega \in \mathcal{O} \text{ und } \Omega' \in \mathcal{O}'\}$ eine Basis der Produkttopologie (Proposition 1.5) auf $X \times Y$.

Definition 3.14 *Ein topologischer Raum erfüllt genau dann*

1. *das* erste Abzählbarkeitsaxiom, *wenn jedes seiner Elemente eine abzählbare Basis von Umgebungen besitzt.*

2. *das* zweite Abzählbarkeitsaxiom, *wenn er eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.*

Nach Beispiel 3.13.2 erfüllt jeder metrische Raum das erste Abzählbarkeitsaxiom. Der mit der Produkttopologie[1] (siehe Beispiel 5.11 unten) versehene topologische Raum $X := C^0([0,1],[0,1]) = \{f : [0,1] \to [0,1] \text{ stetig}\}$ erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom nicht: dies zeigt man indirekt mit Hilfe der Abbildung $X \xrightarrow{\phi} [0,1]$, $f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$, die zwar *folgenstetig* (d.h., $(\phi(f_n))_n$ konvergiert in $[0,1]$, sobald $(f_n)_n$ in X konvergiert) aber nicht stetig ist.

Proposition 3.15 *Erfüllt ein topologischer Raum das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so erfüllt er auch das erste Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis: Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, welcher das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Sei $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis von $\mathcal{O}$ und $x \in X$ ein beliebiger Punkt. Dann ist $Z_x := \{k \in \mathbb{N} \,|\, x \in U_k\} \subset \mathbb{N}$ abzählbar und $(U_k)_{k\in Z_x}$ ist eine Basis von Umgebungen von x in X. □

Man beachte, dass nicht jeder topologische Raum, welcher das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, das zweite Abzählbarkeitsaxiom auch erfüllt. Versieht man z.B. $X := \mathbb{R}$ mit der diskreten Topologie, so erfüllt X das erste Abzählbarkeitsaxiom (für $x \in X$ wähle $\mathcal{B}_x := \{\{x\}\}$ als Basis von Umgebungen von x in X), das zweite Abzählbarkeitsaxiom aber nicht (sonst müsste sich für jedes $x \in X$ die offene Teilmenge $\{x\}$ von X als Vereinigung von Elementen der Basis schreiben lassen; $\mathbb{R}$ ist aber überabzählbar). Für eine detaillierte Untersuchung des Zusammenhangs zwischen den beiden Begriffen, siehe z.B. [4].

3.5 Konvergente Folgen in einem metrischen Raum

Proposition 3.16 *Sei (X, d) ein metrischer Raum und Y eine Teilmenge von X.*

1. *Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X konvergiert genau dann gegen $x \in X$ (bzgl. der von d induzierten Topologie), wenn*

$$d(x_n, x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. *Bezüglich der von d induzierten Topologie gilt*

$$\overline{Y} = \{\textit{Grenzwerte der Folgen von } Y, \textit{ die in } X \textit{ konvergieren}\}.$$

[1] Die Produkttopologie von $C^0([0,1],[0,1])$ ist die Topologie der *punktweisen Konvergenz.*

Beweis:
Zu 1.: Angenommen, eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X konvergiere gegen ein $x \in X$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ s.d. $x_n \in B_d(x,\varepsilon)$ für alle $n \geq N$ (denn $B_d(x,\varepsilon) \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(x)$), d.h. $d(x_n,x) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Dies zeigt $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Umgekehrt, gilt $d(x_n,x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, so wähle ein $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(x)$. Da $\{B_d(x,r),\, r > 0\}$ eine *Basis* von Umgebungen von x bzgl. $\mathcal{O}$ bildet, existiert ein $\varepsilon > 0$ s.d. $B_d(x,\varepsilon) \subset U$. Wegen $d(x_n,x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ existiert dann ein $N \in \mathbb{N}$ s.d. für alle $n \geq N$ gilt $d(x_n,x) < \varepsilon$, d.h. $x_n \in B_d(x,\varepsilon)$, insbesondere $x_n \in U$ für alle $n \geq N$, was $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ beweist.
Zu 2.:

"$\supset$" : sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge aus Y, die in X konvergiert, d.h., ein $x \in X$ existiert mit $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Für jede Umgebung U von x in X existiert ein $N \in \mathbb{N}$ s.d. $y_n \in U$ für alle $n \geq N$. Damit ist $x \in \overline{Y}$ aus der Definition von $\overline{Y}$, und die Inklusion ist bewiesen.

"$\subset$" : sei $x \in \overline{Y}$ und, für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $U_n := B_d(x, \frac{1}{n})$. Wegen $U_n \cap Y \neq \varnothing$ existiert (für jedes n) ein $y_n \in U_n \cap Y$. Insbesondere gilt $\frac{1}{n} \geq d(y_n,x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d.h. (aus 1.) $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Damit ist x Grenzwert einer Folge von Y und die Inklusion ist bewiesen.

$\square$

Bemerke, dass die Inklusion $\overline{Y} \supset \{\text{Grenzwerte der Folgen von } Y, \text{ die in } X \text{ konvergieren}\}$ in jedem topologischen Raum gilt. Die Andere braucht im Wesentlichen die Existenz einer *abzählbaren* Basis von Umgebungen um jeden Punkt.

4 Kompakte topologische Räume

In der Mengentheorie stehen die endlichen Mengen für die einfachsten Beispiele, die man sich vorstellen kann. In der Topologie entsprechen sie den *kompakten* topologischen Räumen.

4.1 Definitionen

Definition 4.1 *Sei $(X,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{U}$ von $\mathcal{P}(X)$ heißt* Überdeckung *von X, falls*

$$X = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U.$$

Beispiel 4.2 Die Menge $\mathcal{U} := \{(k-1,k+1),\, k \in \mathbb{Z}\}$ bildet eine offene (d.h. $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$) Überdeckung von $X := \mathbb{R}$ bzgl. der Standardtopologie.

Definition 4.3 *Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{O})$ heißt* kompakt*, falls jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ ($\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$) von X eine endliche Teilmenge $\mathcal{U}'$ besitzt, die X immer noch überdeckt.*

Beachte, dass die Bedingung nicht die ist, dass X eine endliche offene Überdeckung besitzt. Das ist immer erfüllt, mit z.B. $\mathcal{U} := \{X\}$. Die Bedingung besagt, dass man bei *jeder* offenen Überdeckung alle bis auf endlich viele Mengen weglassen kann und X immer noch ganz überdeckt wird.

Eine Teilmenge Y eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ heißt kompakt, wenn Y mit der Relativtopologie kompakt ist.

Beispiele 4.4

1. Jede endliche Menge mit beliebiger Topologie ist kompakt. Insbesondere ist die leere Menge kompakt.

2. Die Menge $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie ist nicht kompakt, denn $\mathcal{U} := \{(k-1, k+1),\, k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}$, die keine endliche Teilmenge besitzt, die $\mathbb{R}$ noch überdeckt: falls $\mathcal{U}'$ eine endliche Teilmenge von $\mathcal{U}$ ist, gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ so, dass $(k-1, k+1) \notin \mathcal{U}'$; aber dann ist k nicht mehr überdeckt.

3. Trägt eine Menge X die Klumpentopologie, so ist X kompakt.

4. Trägt eine Menge X die diskrete Topologie, so ist X nicht kompakt; es sei denn, X hat nur endlich viele Elemente.

4.2 Kompakte Teilmengen und Produkte

Lemma 4.5 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, und $Y \subset X$ eine nichtleere Teilmenge. Dann gelten:*

i) Falls X kompakt ist, und Y abgeschlossen, ist Y auch kompakt (bzgl. der Relativtopologie).

ii) Falls X hausdorffsch ist, und Y kompakt bzgl. der Relativtopologie, so ist Y abgeschlossen in X.

Beweis:
Zu *i*): Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von Y. Nach der Definition der Relativtopologie existiert für jedes $U \in \mathcal{U}$ ein $\widetilde{U} \in \mathcal{O}$ s.d. $U = \widetilde{U} \cap Y$. Setze $\widetilde{\mathcal{U}} := \{\widetilde{U} \in \mathcal{O}, \widetilde{U} \cap Y \in \mathcal{U}\}$. Wegen $X = (X \setminus Y) \cup Y \subset (X \setminus Y) \cup \bigcup_{\widetilde{U} \in \widetilde{\mathcal{U}}} \widetilde{U}$ und $X \setminus Y \in \mathcal{O}$ bildet $\widetilde{\mathcal{U}} \cup \{X \setminus Y\}$ eine offene Überdeckung von X. Aus der Kompaktheit von X folgt die Existenz einer endlichen Teilüberdeckung $\widetilde{\mathcal{U}}' \subset \widetilde{\mathcal{U}} \cup \{X \setminus Y\}$ von X; da $(X \setminus Y) \cap Y = \varnothing$ ist $\mathcal{U}' := \{\widetilde{U}' \cap Y, \widetilde{U}' \in \widetilde{\mathcal{U}}'\} \subset \mathcal{U}$ auch eine endliche Teilüberdeckung von Y. Daraus folgt, dass Y kompakt ist.
Zu *ii*): wir zeigen, dass $X \setminus Y$ offen ist. Sei $x \in X \setminus Y$. Nach der Voraussetzung "X ist hausdorffsch" existieren für jedes $y \in Y$ offene Umgebungen U_1^y bzw. U_2^y von x bzw. y s.d. $U_1^y \cap U_2^y = \varnothing$. Die Menge $\mathcal{U} := \{U_2^y \cap Y, y \in Y\}$ ist eine (bzgl. der Relativtopologie) offene Überdeckung von Y, besitzt also eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ von Y (weil Y kompakt vorausgesetzt wurde). Schreibe $\mathcal{U}' = \{U_2^{y_1}, \ldots, U_2^{y_m}\}$ wobei $y_1, \ldots, y_m \in Y$,

und setze $U_1 := \bigcap_{1\le i\le m} X \setminus \overline{U_2^{y_i}}$. Dann ist U_1 offen (als endlicher Durchschnitt offener Teilmengen), enthält x (für alle $i \in \{1,\ldots,m\}$ gilt $x \notin \overline{U_2^{y_i}}$ wegen $U_1^{y_i} \cap U_2^{y_i} = \varnothing$) und wegen $\bigcup_{1\le i\le m} \overline{U_2^{y_i}} \supset Y$ gilt $U_1 = X \setminus \left(\bigcup_{1\le i\le m} \overline{U_2^{y_i}}\right) \subset X \setminus Y$, was $X \setminus Y \in \mathcal{O}$ beweist. □

Lemma 4.6 *Seien $(X,\mathcal{O})$ und $(Y,\mathcal{O}')$ kompakte topologische Räume, dann ist $X \times Y$ kompakt bzgl. der Produkttopologie* (Proposition 1.5).

Beweis[2]: O.B.d.A. seien X und Y nichtleer. Sei $\mathcal{U}''$ eine offene Überdeckung von $X \times Y$. Nach der Definition der Produkttopologie auf $X \times Y$ können wir o.B.d.A. annehmen, dass jedes Element von $\mathcal{U}''$ der Form $\Omega_i \times \widetilde{\Omega}_i$ ist, wobei Ω_i bzw. $\widetilde{\Omega}_i$ eine offene Teilmenge von $(X,\mathcal{O})$ bzw. $(Y,\mathcal{O}')$ ist und i läuft in einer Indexfamilie I. Wegen $X \times Y = \bigcup_{i\in I} \Omega_i \times \widetilde{\Omega}_i$ gelten auch $X = \bigcup_{i\in I} \Omega_i$ und $Y = \bigcup_{i\in I} \widetilde{\Omega}_i$. Sei nun $x \in X$ beliebig. Da $(Y,\mathcal{O}')$ kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $I_x \subset I$ mit $Y = \bigcup_{j\in I_x} \widetilde{\Omega}_j$. Setze $V_x := \bigcap_{j\in I_x} \Omega_j$ und bemerke, dass wegen $|I_x| < \infty$ die Teilmenge V_x eine offene Umgebung von x in $(X,\mathcal{O})$ ist. Die Kompaktheit von $(X,\mathcal{O})$ liefert die Existenz endlich vieler Punkte $x_1,\ldots,x_m \in X$ mit $X = \bigcup_{1\le l\le m} V_{x_l}$. Betrachte die endliche Teilmenge $J := \bigcup_{1\le l\le m} I_{x_l}$ von I. Wir behaupten, dass $X \times Y = \bigcup_{j\in J} \Omega_j \times \widetilde{\Omega}_j$ gilt. Denn: ist $(x,y) \in X \times Y$, so existiert ein $l \in \{1,\ldots,m\}$ mit $x \in V_{x_l}$. Für dieses l existiert ein $j \in I_{x_l}$ mit $y \in \widetilde{\Omega}_j$. Per Definition von V_{x_l} gilt aber $V_{x_l} \subset \Omega_j$, somit $(x,y) \in \Omega_j \times \widetilde{\Omega}_j$, was zu beweisen war. □

*** Allgemeiner ist jedes *beliebige* Produkt kompakter topologischer Räume kompakt.

4.3 Durchschnitt kompakter Teilmengen

Lemma 4.7 *Sei $(X,\mathcal{O})$ kompakter topologischer Raum und $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von* nichtleeren *abgeschlossenen Teilmengen von X, d.h. $K_{n+1} \subset K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ eine* nichtleere *kompakte Teilmenge von X.*

Beweis: Die Teilmenge $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ von X ist abgeschlossen als (unendlicher) Durchschnitt abgeschlossener Teilmengen von X. Aus Lemma 4.5 *i)* folgt, dass $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ kompakt ist. Angenommen, es gelte $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \varnothing$. Wegen $X \setminus (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus K_n)$ gilt dann

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus K_n) = X \setminus \varnothing = X,$$

[2]Der in der Version vom 12.12.2008 angegebene Beweis war falsch! Herzlichen Dank an Bernd Ammann.

mit $X \setminus K_n \in \mathcal{O}$ (denn K_n ist abgeschlossen), d.h., die Menge $\{X \setminus K_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ bildet eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, existieren endlich viele $K_{n_1}, \ldots, K_{n_p}$ s.d.

$$X = \bigcup_{i=1}^{p} (X \setminus K_{n_i}).$$

Setze $m := \max(n_1, \ldots, n_p)$, dann gilt $X \setminus K_{n_i} \subset X \setminus K_m$ (weil $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist), und somit $X = \bigcup_{i=1}^{p}(X \setminus K_{n_i}) = X \setminus K_m$, d.h. $K_m = \varnothing$, Widerspruch zur Annahme $K_n \neq \varnothing$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \varnothing$. □

4.4 Kompakte metrische Räume

Kompaktheit für metrische Räume lässt sich mit Folgen charakterisieren:

Satz 4.8 (Bolzano-Weierstraß) *Ein metrischer Raum (X, d) ist als topologischer Raum genau dann kompakt, wenn jede Folge von X eine (in X) konvergente Teilfolge besitzt.*

Beweis: Angenommen, X sei kompakt bzgl. der von der Metrik d induzierten Topologie. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von X. Dann ist, für alle $N \in \mathbb{N}$ die Teilmenge $K_N := \overline{\{x_n,\, n \geq N\}}$ abgeschlossene Teilmenge von X bzgl. der Relativtopologie. Es gilt offenbar $K_{n+1} \subset K_n$ und $K_n \neq \varnothing$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge abgeschlossener Teilmengen von X. Aus Lemma 4.7 folgt, dass $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \varnothing$, d.h. es existiert ein $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Konstruiere nun ein strikt monoton wachsendes $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ wie folgt: wähle $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ s.d. $x_{\varphi(0)} \in B_d(x, 1) \cap \{x_p,\, p \in \mathbb{N}\}$, und konstruiere induktiv $\varphi(n+1)$ durch:

$$x_{\varphi(n+1)} \in B_d(x, \frac{1}{n+1}) \cap \{x_p,\, p \geq \varphi(n) + 1\}$$

(wegen $x \in K_p$ für alle $p \in \mathbb{N}$ ist der Schnitt nichtleer, man kann also mindestens ein Element der Folge darin wählen). Die so definierte Abbildung φ ist offensichtlich strikt monoton wachsend, und die Teilfolge $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt, für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$d(x_{\varphi(n)}, x) < \frac{1}{n+1},$$

insbesondere $d(x_{\varphi(n)}, x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d.h. (Proposition 3.16 1.), $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Daraus folgt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge in X besitzt.

Umgekehrt setzen wir voraus, dass jede Folge von X eine konvergente Teilfolge (in X) besitzt.

Lemma 4.9 *Sei (X, d) ein metrischer Raum in dem jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ eine offene Überdeckung von X.*
Dann existiert es ein $\varepsilon > 0$ s.d. jeder offene Ball von Radius ε in (mindestens) einem Element von $\mathcal{U}$ enthalten ist.

Beweis von Lemma 4.9: Angenommen, dies gelte nicht. Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, würde dann ein $x_n \in X$ so existieren, dass $B_d(x_n, \frac{1}{n})$ in keinem Element von $\mathcal{U}$ enthalten wäre. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ würde eine Teilfolge $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ besitzen, die gegen ein $x \in X$ konvergieren würde. Da $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X ist, würde ein $U \in \mathcal{U}$ existieren mit $x \in U$, und wegen $U \in \mathcal{O}$ würde auch ein $r > 0$ so existieren, dass $B_d(x, r) \subset U$. Sei dann $N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ s.d. $\frac{1}{\varphi(N)} < \frac{r}{2}$ und $d(x_{\varphi(N)}, x) < \frac{r}{2}$. Aus der Dreiecksungleichung würde damit

$$B_d(x_{\varphi(N)}, \frac{1}{\varphi(N)}) \subset B_d(x, r) \subset U$$

gelten, Widerspruch zur Konstruktion der x_n. $\surd$

Lemma 4.10 *Sei (X, d) ein metrischer Raum in dem jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Dann existiert es für jedes $\varepsilon > 0$ eine* endliche *Überdeckung von X durch offene Bälle von Radius ε.*

Beweis von Lemma 4.10: Angenommen, dies gelte nicht, d.h. es würde ein $\varepsilon > 0$ so existieren, dass jede endliche Familie von offenen Bällen von Radius ε die Menge X *nicht* überdeckt. Daher würde eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X existieren mit $x_{n+1} \notin \bigcup_{0\leq i\leq n} B_d(x_i, \varepsilon)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese Folge würde eine Teilfolge $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ besizten, die gegen ein $x \in X$ konvergieren würde. Für ein festes $r \in]0, \frac{\varepsilon}{2}[$ würde dann es ein $N \in \mathbb{N}$ so geben, dass $d(x_{\varphi(n)}, x) < r$ für alle $n \geq N$, und somit (nach der Dreiecksungleichung)

$$d(x_{\varphi(p)}, x_{\varphi(q)}) < \varepsilon$$

für alle $p, q \geq N$, Widerspruch zur Konstruktion der x_n. $\surd$

(*Ende des Beweises von* Satz 4.8) Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Nach Lemma 4.9 existiert ein $\varepsilon > 0$ s.d. jeder Ball in X von Radius ε in einem Element von $\mathcal{U}$ enthalten ist. Für dieses ε existiert nach Lemma 4.10 eine endliche Familie $B_1, \ldots, B_p$ von Bällen von Radius ε, die X überdecken ($X = \bigcup_{1\leq i\leq p} B_i$). Da jedes B_i in einem Element U_i von $\mathcal{U}$ enthalten ist, gilt

$$X = \bigcup_{1\leq i\leq p} U_i,$$

und somit existiert eine endliche Teilmenge von $\mathcal{U}$, die X noch überdeckt. Daraus folgt, dass $(X, \mathcal{O})$ kompakt ist. $\square$

Lemma 4.11 *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann ist X* beschränkt *bzgl. d, d.h.*

$$\sup_{x,y\in X} d(x, y) < +\infty.$$

Beweis: Angenommen, der Raum (X, d) wäre nicht beschränkt. Dann würden Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X so existieren, dass $d(x_n, y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Da (X, d) kompakt ist, würden konvergente Teilfolgen von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren. Wir bezeichnen sie weiterhin mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und setzen $x := \lim_{n\to+\infty} x_n$ bzw. $y := \lim_{n\to+\infty} y_n$. Aus Proposition 3.16 und der Dreiecksungleichung folgt dann

$$0 \leq d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) \leq d(x, y) + \varepsilon$$

für n hinreichend groß, Widerspruch zu $d(x_n, y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Also (X, d) muss beschränkt sein. □

4.5 Kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

Satz 4.12 (Heine-Borel) *Die Menge $\mathbb{R}^n$ trage die Produktmetrik (und die entsprechende Topologie). Dann gilt: eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Teilmenge. Aus Lemma 4.5 folgt, dass K abgeschlossen ist. Aus Lemma 4.11 folgt auch, dass K beschränkt ist.

Wir zeigen die andere Aussage durch Induktion über n. Zuerst beweisen wir das Ergebnis für $n = 1$.
O.B.d.A. sei $K := [a, b] \subset \mathbb{R}$ abgeschlossenes beschränktes Intervall (denn jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist in einem abgeschlossenen beschränkten Intervall enthalten; falls dies kompakt ist, muss auch nach Lemma 4.5 jede abgeschlossene Teilmenge davon kompakt sein). Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus K. Setze $a_0 := a$, $b_0 := b$ und definiere induktiv das Intervall $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ als eines der beiden Intervalle $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ und $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$, das immer noch *unendlich viele* Elemente der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält (mindestens eines der beiden muss diese Eigenschaft haben, sonst wäre $\mathbb{N}$ endlich). Es kann passieren, dass *beide* unendlich viele Elemente enthalten, wir wählen ggf. *eines* der beiden. Betrachte dann die reellen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aus der Konstruktion der a_n und b_n folgt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend bzw. fallend ist. Es gelten auch: $a_n \leq b_n \leq b$ und $b_n \geq a_n \geq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, insbesondere sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt*.
Aus den grundsätzlichen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ folgt, dass *jede monotone beschränkte reelle Folge konvergiert*. Insbesondere konvergieren $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wegen

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \ldots = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

gilt $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n =: l \in \mathbb{R}$, und wegen der Monotonie von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt auch $l \geq a_0 = a$ bzw. $l \leq b_0 = b$, d.h. $l \in [a, b]$. Was ist jetzt mit der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Aus der Konstruktion der a_n und b_n existiert, für jedes $n \in \mathbb{N}$, ein Element $x_{\varphi(n)}$ der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, das in $[a_n, b_n]$ liegt. O.B.d.A. sei $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ strikt monoton wachsend (denn jedes $[a_n, b_n]$ enthält unendlich viele Elemente der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Wegen

$$a_n \leq x_{\varphi(n)} \leq b_n$$

konvergiert dann die Teilfolge $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $l \in [a,b]$. Wir haben also bewiesen, dass jede Folge von $K = [a,b]$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Aus Satz 4.8 folgt, dass K kompakt ist.

Dies zeigt das Ergebnis für $K \subset \mathbb{R}$. Aus Lemma 4.6 folgt, dass jedes endliche Produkt von beschränkten kompakten Intervallen kompakt bzgl. der Produkttopologie ist. Dies zeigt das Ergebnis für ein $K \subset \mathbb{R}^n$. $\square$

Bemerkung 4.13 Dies gilt als bestimmte Eigenschaft vder Produkttopologie (und der Standardtopologie, siehe Abschnitt 7) von $\mathbb{R}^n$. Z.B. sind abgeschlossene Bälle in unendlich-dimensionalen normierten Vektorräumen *nie* kompakt (Satz von Riesz).

5 Stetige Abbildungen

5.1 Definitionen und erste Eigenschaften

Definition 5.1 *Seien $(X, \mathcal{O})$ und $(Y, \mathcal{O}')$ topologische Räume, und $x \in X$.*

1. *Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt* stetig in x, *falls für jede Umgebung U von $f(x)$ in Y das Urbild $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x in X ist.*
2. *Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt* stetig auf X *falls f in jedem Punkt stetig ist.*

Bemerkungen 5.2

1. Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ ist stetig auf X g.d.w.
   $$\forall\, \Omega \in \mathcal{O}',\ f^{-1}(\Omega) \in \mathcal{O},$$
   denn Teilmengen sind genau dann offen, wenn sie Umgebungen von jedem ihrer Punkte sind.
2. Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ ist stetig auf X g.d.w.
   $$\forall\, A \subset Y,\ A \text{ abgeschlossen },\ f^{-1}(A) \text{ ist abgeschlossen in } X,$$
   denn $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ für alle Teilmengen A von Y.

Beispiele 5.3 Seien X und Y zwei Mengen.

1. Trägt X die diskrete Topologie und Y irgendeine, so ist jede Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ stetig.
2. Trägt X irgendeine Topologie und Y die Klumpentopologie, so ist ebenfalls jede Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ stetig.

Lemma 5.4 *Seien X, Y und Z topologische Räume. Seien $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ Abbildungen.*
Ist f stetig in $x \in X$ und g stetig in $f(x) \in Y$, so ist $g \circ f : X \longrightarrow Z$ stetig in x.

Beweis: Sei U_z eine Umgebung von z in Z, dann ist $g^{-1}(U_z)$ Umgebung von y in Y (denn g ist stetig in y), und somit ist

$$(g \circ f)^{-1}(U_z) = f^{-1}\left(g^{-1}(U_z)\right)$$

Umgebung von x in X. □

5.2 Stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen

Für Abbildungen zwischen metrischen Räumen haben wir weitere Kriterien für die punktweise Stetigkeit:

Proposition 5.5 *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.*
i) Die Abbildung f ist stetig in $x \in X$ g.d.w.

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0 \text{ s.d. } f(B_{d_X}(x, \delta)) \subset B_{d_Y}(f(x), \varepsilon),$$

d.h., für jedes $\varepsilon > 0$, existiert ein $\delta > 0$ so, dass für alle y mit $d_X(x, y) < \delta$ gilt $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.
ii) Die Abbildung f ist stetig in $x \in X$ g.d.w. für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X, die gegen x konvergiert, die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $f(x)$.

Beweis:
i) folgt direkt aus der Definition der von einer Metrik induzierten Topologie (für die eine Teilmenge genau dann offen ist, wenn sie einen hinreichend kleinen Ball um jeden ihrer Punkte enthält).
ii) folgt aus der Tatsache, dass $\{B_{d_X}(x, \frac{1}{n}),\, n \in \mathbb{N},\, n \geq 1\}$ eine Basis von Umgebungen von x bzgl. $\mathcal{O}$ bildet. Denn: angenommen, die Abbildung f sei stetig in x. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus X mit $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Sei $\varepsilon > 0$ fest. Aus i) existiert ein $\delta > 0$ s.d. $f(B_{d_X}(x, \delta)) \subset B_{d_Y}(f(x), \varepsilon)$. Wegen $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ s.d. $x_n \in B_{d_X}(x, \delta)$ für alle $n \geq N$, und somit $f(x_n) \in B_{d_Y}(f(x), \varepsilon)$ für alle $n \geq N$, was $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ beweist.
Umgekehrt (und nur diese Richtung braucht tatsächlich die obige erwähnte Tatsache) setzen wir voraus, dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X, die gegen x konvergiert, die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. Angenommen, f sei nicht stetig in x. Dann existiert aus i) ein $\varepsilon > 0$ s.d. für alle $\delta > 0$ gilt $f(B_{d_X}(x, \delta)) \not\subseteq B_{d_Y}(f(x), \varepsilon)$. Insbesondere für δ der Form $\frac{1}{n}$: für jedes $n \geq 1$ existiert ein $x_n \in B_{d_X}(x, \frac{1}{n})$ s.d. $f(x_n) \notin B_{d_Y}(f(x), \varepsilon)$. Somit bekommen wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die $d_X(x_n, x) < \frac{1}{n}$ für jedes n erfüllt (insbesondere $d_X(x_n, x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d.h. $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$) aber mit $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\not\to} f(x)$, Widerspruch. Daraus folgt, dass f stetig in x sein muss. □

5.3 Stetige lineare Abbildungen

Proposition 5.6 *Seien* $(V, \|\cdot\|_V)$ *und* $(W, \|\cdot\|_W)$ *normierte Vektorräume und* $A : V \longrightarrow W$ *eine lineare Abbildung (d.h.* $A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y)$ *für alle* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$ *und alle* $x, y \in V$*). Dann sind äquivalent:*

i) Die Abbildung A *ist stetig auf* V*.*

ii) Die Abbildung A *ist stetig in* $0 \in V$*.*

iii) Eine positive reelle Zahl M *existiert mit* $\|A(x)\|_W \leq M\|x\|_V$ *für alle* $x \in V$*.*

Beweis:
"*i)* $\Longrightarrow$ *ii)*" ist trivial.
"*ii)* $\Longrightarrow$ *iii)*": Sei $B' := \{y \in W, \|y\|_W < 1\} \subset W$ der offene Ball von Radius 1 (bzgl. der zu $\|\cdot\|_W$ assoziierten Metrik) um den Ursprung in W. Er ist eine offene Umgebung von $0 \in W$. Da $A(0) = 0$ und A stetig in 0 ist, existiert eine Umgebung U von $0 \in V$ s.d. $A(U) \subset B$. Wegen der Definition der Topologie von $(V, \|\cdot\|_V)$ existiert ein $r > 0$ s.d. $B(r) \subset U$, wobei $B(r) := \{x \in V, \|x\|_V < r\}$, und somit $A(B(r)) \subset B'$.
Sei dann $x \in V \setminus \{0\}$, dann gilt $\frac{r}{2\|x\|_V}x \in B(r)$ und daher gilt $A(\frac{r}{2\|x\|_V}x) = \frac{r}{2\|x\|_V}A(x) \in B'$, d.h. $\|\frac{r}{2\|x\|_V}A(x)\|_W < 1$, und somit

$$\|A(x)\|_W \leq \frac{2}{r}\|x\|_V.$$

Dies gilt offenbar auch für $x = 0$, somit gilt *iii)* mit $M := \frac{2}{r} > 0$.
"*iii)* $\Longrightarrow$ *i)*": Seien x und y aus V, dann gilt

$$\|A(x) - A(y)\|_W = \|A(x - y)\|_W \leq M\|x - y\|_V,$$

daraus folgt $A(x) - A(y) \longrightarrow 0$ wenn $x \longrightarrow y$, d.h. A ist stetig in jedem Punkt y von V.
□

5.4 Bildtopologie

Proposition 5.7 (Bildtopologie) *Sei* X *eine Menge und* $((X_i, \mathcal{O}_i))_{i\in I}$ *eine (beliebige) Familie topologischer Räume mit, für jedes* $i \in I$*, einer Abbildung* $f_i : X_i \longrightarrow X$*. Dann bildet*

$$\mathcal{O} := \{\Omega \subset X \text{ s.d. } \forall\, i \in I \text{ gilt } f_i^{-1}(\Omega) \in \mathcal{O}_i\}$$

eine Topologie auf X*, die die* Bildtopologie *der* X_i*'s unter den* f_i*'s heißt.*

Beweis: Die leere Menge und X genügen offensichtlich der Definition von Elementen von $\mathcal{O}$. Wegen $f_i^{-1}(\bigcup_{j\in J} \Omega_j) = \bigcup_{j\in J} f_i^{-1}(\Omega_j)$ und $f_i^{-1}(\bigcap_{j\in J} \Omega_j) = \bigcap_{j\in J} f_i^{-1}(\Omega_j)$ für jede Familie $(\Omega_j)_{j\in J}$ von Teilmengen von X, gelten auch die beiden anderen Axiome. □

Beispiel 5.8 (Quotiententopologie) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum zusammen mit einer Äquivalenzrelation "$\sim$", d.h. eine Relation auf X, die genügt, für alle $x, y, z \in X$:

- $x \sim x$ ($\sim$ ist reflexiv),
- $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$ ($\sim$ ist symmetrisch),
- $x \sim y$ und $y \sim z \Longrightarrow x \sim z$ ($\sim$ ist transitiv).

Betrachte die Quotientenmenge $X/\sim$ (d.h., die Menge aller Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$) und die kanonische Abbildung $\pi : X \longrightarrow X/\sim$. Dann heißt die durch π induzierte Bildtopologie auf $X/\sim$ die *Quotiententopologie* auf $X/\sim$.

Proposition 5.9 *Sei X eine Menge und $((X_i, \mathcal{O}_i))_{i\in I}$ eine (beliebige) Familie topologischer Räume mit, für jedes $i \in I$, einer Abbildung $f_i : X_i \longrightarrow X$. Sei $\mathcal{O}$ die durch die f_i's induzierte Bildtopologie auf X. Dann gilt.*

i) Für jedes $i \in I$ ist $f_i : X_i \longrightarrow X$ stetig.

ii) Die Topologie $\mathcal{O}$ ist die feinste *Topologie auf X, für die alle Abbildungen $f_i : X_i \longrightarrow X$ stetig sind, d.h.: ist $\mathcal{O}'$ eine weitere Topologie auf X s.d. $f_i : X_i \longrightarrow X$ stetig ist für alle $i \in I$, so gilt $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$.*

Beweis: Sei $i \in I$ und $\Omega \in \mathcal{O}$, dann gilt $f_i^{-1}(\Omega) \in \mathcal{O}_i$ aus der Definition von Elementen von $\mathcal{O}$. Dies zeigt i). Ist $\mathcal{O}'$ eine weitere Topologie auf X s.d. $f_i : X_i \longrightarrow X$ stetig ist für alle $i \in I$, so gilt für jedes $\Omega \in \mathcal{O}'$ und für jedes $i \in I$: $f_i^{-1}(\Omega) \in \mathcal{O}_i$ (denn f_i ist stetig), d.h., aus der Definition von Elementen von $\mathcal{O}$, gilt $\Omega \in \mathcal{O}$. Dies zeigt ii). □

5.5 Urbildtopologie

Proposition 5.10 (Urbildtopologie) *Sei X eine Menge und $((X_i, \mathcal{O}_i))_{i\in I}$ eine (beliebige) Familie topologischer Räume mit, für jedes $i \in I$, einer Abbildung $f_i : X \longrightarrow X_i$. Dann bildet*

$$\mathcal{O} := \{\bigcup_{j\in J} \Big(\bigcap_{1\leq i\leq n} f_{j_i}^{-1}(\Omega_{j_i})\Big), \quad J \subset I,\ \Omega_{j_i} \in \mathcal{O}_{j_i} \text{ und } n \in \mathbb{N}\}$$

eine Topologie auf X, die die Urbildtopologie *der X_i's unter den f_i's heißt.*

Beweis: Die leere Menge und X genügen offensichtlich der Definition von Elementen von $\mathcal{O}$. Die Stabilität von $\mathcal{O}$ unter beliebiger Vereinigung und unter endlichem Durchschnitt folgt auch unmittelbar aus der Definition von $\mathcal{O}$. □

Beispiel 5.11 *[Produkttopologie]* Sei $((X_i, \mathcal{O}_i))_{i\in I}$ eine *beliebige* Familie topologischer Räume und setze

$$X := \prod_{i\in I} X_i$$

(Produkt der X_i's). Falls jedes X_i nichtleer ist, muss X auch nichtleer sein wegen des Auswahlaxioms. Für jedes $i \in I$ definiere dann $f_i := \pi_i : X \longrightarrow X_i$, d.h. $f_i(x) = x_i$ für alle $x = (x_i)_{i \in I}$ (Projektion auf X_i). Dann heißt die durch die f_i's induzierte Urbildtopologie auf X die *Produkttopologie* der $(X_i, \mathcal{O}_i)$'s. Eine Teilmenge von X ist also bzgl. der Produkttopologie genau dann offen, wenn sie die Vereinigung Teilmengen der Form $\prod\limits_{i \in I} \Omega_i$ ist, wobei $\Omega_i \subset X_i$ offen ist *und, bis auf endlich viele i's*, $\Omega_i = X_i$.
Wenn I nur zwei (bzw. endlich viele) Elemente hat, stimmt diese Topologie mit der von der Proposition 1.5 überein.

Proposition 5.12 *Sei X eine Menge und $((X_i, \mathcal{O}_i))_{i \in I}$ eine (beliebige) Familie topologischer Räume mit, für jedes $i \in I$, einer Abbildung $f_i : X \longrightarrow X_i$. Sei $\mathcal{O}$ die durch die f_i's induzierte Urbildtopologie auf X. Dann gilt.*

i) Für jedes $i \in I$ ist $f_i : X \longrightarrow X_i$ stetig.

ii) Die Topologie $\mathcal{O}$ ist die gröbste *Topologie auf X, für die alle Abbildungen $f_i : X \longrightarrow X_i$ stetig sind, d.h.: ist $\mathcal{O}'$ eine weitere Topologie auf X s.d. $f_i : X \longrightarrow X_i$ stetig ist für alle $i \in I$, so gilt $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$.*

Beweis: Dass jedes f_i stetig ist, folgt aus der Definition von $\mathcal{O}$. Sei $\mathcal{O}'$ eine weitere Topologie auf X s.d. $f_i : X \longrightarrow X_i$ stetig ist für alle $i \in I$. Da jede Teilmenge der Form $f_i^{-1}(\Omega_i)$, wobei $\Omega_i \in \mathcal{O}_i$, offen bzgl. $\mathcal{O}'$ sein muss, müssen auch Vereinigungen endlicher Durchschnitte davon in $\mathcal{O}'$ liegen, d.h. jedes Element von $\mathcal{O}$ muss in $\mathcal{O}'$ liegen. Dies zeigt *ii*). $\square$

5.6 Homöomorphismen

Definition 5.13 *Seien $(X, \mathcal{O})$ und $(Y, \mathcal{O}')$ zwei topologische Räume.*

i) Ein Homöomorphismus *ist eine stetige bijektive Abbildung $f : X \longrightarrow Y$, so dass auch $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ stetig ist.*

ii) Gibt es einen solchen Homöomorphismus, so heißen die Räume $(X, \mathcal{O})$ und $(Y, \mathcal{O}')$ homöomorph.

Beispiele 5.14

1. Die Abbildung $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist ein Homöomorphismus.

2. Sei X eine Menge mit mindestens zwei Elementen. Sei $\mathcal{O}$ die diskrete Topologie auf X, und $\mathcal{O}'$ die Klumpentopologie. Dann ist
$$f := \mathrm{Id} : (X, \mathcal{O}) \longrightarrow (X, \mathcal{O}')$$
stetig und bijektiv, aber f^{-1} ist *nicht* stetig. Also ist f kein Homöomorphismus.

Die Stetigkeit von f^{-1} ist, wie das letzte Beispiel zeigt, nicht automatisch erfüllt, wenn f stetig und bijektiv ist. Unter bestimmen Voraussetzungen gilt dies aber doch (siehe Abschnitt 5.7).

5.7 Stetigkeit und Kompaktheit

Satz 5.15 *Seien $(X, \mathcal{O})$ und $(Y, \mathcal{O}')$ zwei topologische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Ist $A \subset X$ kompakt, so ist auch $f(A)$ kompakt.*

Beweis: Sei $\mathcal{U}$ eine beliebige offene Überdeckung von $f(A)$, dann ist $f^{-1}(\mathcal{U}) := \{f^{-1}(U), U \in \mathcal{U}\}$ eine Überdeckung von $f^{-1}(f(A)) \supset A$ durch *offene* Teilmengen (denn f ist stetig). Da A kompakt ist, existieren $U_1, \ldots, U_m \in \mathcal{U}$ s.d.

$$\bigcup_{i=1}^{m} f^{-1}(U_i) \supset A,$$

und somit $\bigcup_{i=1}^{m} U_i \supset \bigcup_{i=1}^{m} f(f^{-1}(U_i)) = f(\bigcup_{i=1}^{m} f^{-1}(U_i)) \supset f(A)$. □

Korollar 5.16 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein kompakter topologischer Raum und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung (wobei $\mathbb{R}$ seine kanonische Topologie trägt). Dann besitzt f ein Minimum und ein Maximum auf X, d.h. es existieren zwei Punkte x_m und x_M aus X s.d.*

$$f(x_m) = \min_{x \in X} f(x) \text{ und } f(x_M) = \max_{x \in X} f(x).$$

Beweis: Wegen Satz 5.15 muss $f(X)$ kompakt in $\mathbb{R}$ sein. Aus Satz 4.12 folgt, dass $f(X)$ abgeschlossene beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Jede beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt aber ein Supremum und ein Infimum, die in der Teilmenge enthalten sind falls sie abgeschlossen ist (siehe Analysis 1). Dies beweist das Korollar. □

Korollar 5.17 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein kompakter topologischer Raum und $(Y, \mathcal{O}')$ ein hausdorffscher topologischer Raum. Ist $f : X \longrightarrow Y$ stetig und bijektiv, so ist auch f^{-1} stetig, d.h. f ist ein Homöomorphismus.*

Beweis: Für jede abgeschlossene Teilmenge A von Y ist A nach Lemma 4.5 kompakt. Da f stetig ist, ist $f(A)$ nach Satz 5.15 kompakte Teilmenge von Y. Da $(Y, \mathcal{O}')$ hausdorffsch ist, muss wegen Lemma 4.5 die Teilmenge $f(A)$ abgeschlossen sein. Dies zeigt, dass das Urbild von jeder abgeschlossenen Teilmenge von X durch f^{-1} auch abgeschlossen in Y ist, d.h., f^{-1} ist stetig. □

Bemerke, dass unter den Voraussetzungen von Korollar 5.17 auch folgendes gilt: $(Y, \mathcal{O}')$ ist kompakt und $(X, \mathcal{O})$ ist hausdorffsch.

Satz 5.18 *Seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume mit X kompakt. Dann ist jede stetige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$* gleichmäßig stetig, *d.h., für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ gilt* für alle $x, y \in X$ *mit $d(x, y) < \delta$.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wegen f stetig existiert zu jedem $x \in X$ ein $\delta_x > 0$ mit $f(B_d(x, \delta_x)) \subset B_{d'}(f(x), \frac{\varepsilon}{2})$. Wegen X kompakt besitzt die offene Überdeckung $\{B_d(x, \frac{\delta_x}{2}) \,|\, x \in X\}$ von X eine endliche Teilüberdeckung, d.h., es existieren $x_1, \ldots, x_k \in X$ mit $X = \bigcup\limits_{1 \leq j \leq k} B_d(x_j, \frac{\delta_{x_j}}{2})$. Setze $\delta := \frac{1}{2} \min\limits_{1 \leq j \leq k} (\delta_j)$, dann erfüllt $\delta > 0$ die gewünschte Eigenschaft, denn: sind $x, y \in X$

mit $d(x,y) < \delta$, so existiert ein $j \in \{1,\dots,k\}$ mit $x \in B_d(x_j, \frac{\delta_{x_j}}{2})$; wegen der Dreiecksungleichung und der Wahl von δ gilt $y \in B_d(x_j, \delta_{x_j})$, was wiederum mit der Dreiecksungleichung $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ impliziert. □

Die Kompaktheit geht in den Beweis von Satz 5.18 wesentlich ein, denn z.B. $x \mapsto x^2$ ist zwar stetig aber nicht gleichmäßig stetig auf $X = \mathbb{R}$.

6 Zusammenhängende topologische Räume

6.1 Definitionen und erste Eigenschaften

Definition 6.1 *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt genau dann* zusammenhängend*, wenn die einzigen Teilmengen von X, die gleichzeitig offen und abgeschlossen in X sind, die leere Menge und X sind.*

Eine Teilmenge Y eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ heißt zusammenhängend, wenn Y mit der Relativtopologie zusammenhängend ist. Es gibt andere äquivalente Definitionen von zusammenhängendem topologischem Raum:

Proposition 6.2 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *$(X, \mathcal{O})$ ist zusammenhängend.*
2. *X lässt sich nicht schreiben als disjunkte Vereinigung nichtleerer offener Teilmengen.*
3. *X lässt sich nicht schreiben als disjunkte Vereinigung nichtleerer abgeschlossener Teilmengen.*
4. *Jede stetige Abbildung $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ ist konstant, wobei $\{0,1\}$ die diskrete Topologie trägt.*

Beweis: Ist X disjunkte Vereinigung zweier Teilmengen Y_1 und Y_2, so sind Y_1 und Y_2 genau dann gleichzeitig offen in X, wenn sie gleichzeitig abgeschlossen in X sind. Daraus folgt $1 \iff 2 \iff 3$. Andererseits sind $\{0\}$ und $\{1\}$ offen und abgeschlossen und $\{0,1\}$ bzgl. der diskreten Topologie mit $X = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\})$ (disjunkte Vereinigung). Daraus folgt die Äquivalenz $1 \iff 4$. □

Beispiele 6.3

1. Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$ (mit der Relativtopologie) ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist. Denn: Ist I kein Intervall, so existieren ein x mit $x \notin I$ und $y, z \in I$ mit $y < x < z$. Die Teilmengen $I_1 :=]-\infty, x[\cap I$ und $I_2 :=]x, +\infty[\cap I$ sind dann offen, nichtleer (denn es gelten $y \in I_1$ und $z \in I_2$) und disjunkt in I mit $I = I_1 \cup I_2$. Aus Proposition 6.2 folgt, dass I nicht zusammenhängend ist. Ist umgekehrt I ein Intervall, so wähle eine stetige Abbildung $f : I \longrightarrow \{0,1\}$. Angenommen, f sei nicht konstant (also surjektiv). Dann existieren $x_0, y_0 \in I$ mit $f(x_0) = 0$ und $f(y_0) = 1$. O.B.d.A. sei $x_0 < y_0$ (sonst ersetze f durch $\tilde{f} := 1 - f$). Konstruiere induktiv die Folgen $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ durch: falls $f(\frac{x_n + y_n}{2}) = 0$ so setze

$x_{n+1} := \frac{x_n+y_n}{2}$ und $y_{n+1} := y_n$, sonst setze $x_{n+1} := x_n$ und $y_{n+1} := \frac{x_n+y_n}{2}$. Dann sind $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ monoton beschränkte Folgen mit $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{2^n}|x_0 - y_0|$ (*Übungsaufgabe*), somit konvergieren sie beide gegen einen und denselben Punkt $l \in \mathbb{R}$. Da I ein Intervall ist und $x_n \leq l \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, gilt $l \in I$. Da f stetig ist, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(l) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$, d.h. $0 = f(l) = 1$, Widerspruch. Mit Proposition 6.2 folgt, dass I zusammenhängend ist.

2. Die Vereinigung $[0,1] \cup [2,3]$ ist bzgl. der Relativtopologie nicht zusammenhängend (beide Intervalle $[0,1]$ und $[2,3]$ sind nämlich offen und abgeschlossen in $[0,1] \cup [2,3]$).

3. Die Teilmenge $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend, denn es gibt zwischen je zwei reellen Zahlen eine nicht rationale Zahl.

Lemma 6.4 *Seien X, Y topologische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ stetige Abbildung. Ist X zusammenhängend, so ist $f(X)$ zusammenhängend.*

Beweis: Sei Ω offene und abgeschlossene Teilmenge von $f(X)$, dann ist wegen der Stetigkeit von f die Teilmenge $f^{-1}(\Omega)$ offen und abgeschlossen in X. Da X zusammenhängend ist, gilt entweder $f^{-1}(\Omega) = \varnothing$ oder $f^{-1}(\Omega) = X$. Im ersten Fall gilt dann $\Omega = \varnothing$ und im zweiten Fall gilt $\Omega = X$. □

Beispiel 6.5 Ist X zusammenhängender topologischer Raum und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so folgt aus Lemma 6.4 und Beispiel 6.3.1, dass $f(X)$ ein Intervall ist. Eine sehr häufig auftretende Anwendung dieser Folgerung ist: gilt $a, b \in f(X)$ mit $a < b$, so gibt es für jedes $c \in [a,b]$ mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = c$ *(Zwischenwertsatz)*.

Proposition 6.6 *Ist $(Y_i)_{i\in I}$ eine belibige Familie zusammenhängender Teilmengen eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ mit $\bigcap\limits_{i\in I} Y_i \neq \varnothing$, so ist $\bigcup\limits_{i\in I} Y_i$ zusammenhängend.*

Beweis: Betrachte $x \in \bigcap\limits_{i\in I} Y_i$ (ein solches x existiert wegen der Annahme $\bigcap\limits_{i\in I} Y_i \neq \varnothing$) und sei Ω eine Teilmenge von $\bigcup\limits_{i\in I} Y_i$, die gleichzeitig offen und abgeschlossen in $\bigcup\limits_{i\in I} Y_i$ ist. Dann ist, für jedes $i \in I$, die Teilmenge $\Omega \cap Y_i$ offen und abgeschlossen und Y_i. Ist Ω nichtleer, so trifft Ω mindestens eines der Y_i's, sei es Y_{i_0}, und da Y_{i_0} zusammenhängend ist, gilt $\Omega \cap Y_{i_0} = Y_{i_0}$. Insbesondere gilt $x \in \Omega$ und somit $\Omega \cap Y_i \neq \varnothing$ für alle $i \in I$ nach der Wahl von x. Daraus folgt $\Omega \cap Y_i = Y_i$ für alle $i \in I$, d.h., $\Omega = \bigcup\limits_{i\in I} Y_i$. □

Bemerkungen 6.7

1. Die Voraussetzung $\bigcap\limits_{i\in I} Y_i \neq \varnothing$ ist wichtig: z.B. die Teilmengen $Y_1 := [0,1]$ und $Y_2 := [2,3]$ von $X := \mathbb{R}$ sind zusammenhängend, ihre Vereinigung aber nicht.

2. Die Teilmenge $\bigcup\limits_{i\in I} Y_i$ kann auch zusammenhängend sein, selbst wenn $\bigcap\limits_{i\in I} Y_i = \varnothing$ gilt oder wenn ein Y_i (oder sogar alle Y_i) nicht zusammenhängend ist. Betrachte z.B. folgende Familien: $Y_1 := [0,1[$ und $Y_2 := \{1\}$ in $X := [0,1]$, $Y_1 =]0,1[$ und $Y_2 = \{0,1\}$ in $X := [0,1]$, $Y_t := [-1,0] \cup]t,1]$ für $t \in I :=]0,1]$ in $X := \mathbb{R}$.

3. Die Teilmenge $\bigcap\limits_{i\in I} Y_i$ muss nicht zusammenhängend sein: z.B. $Y_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \,|\, x_2 \geq 0\}$ und $Y_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \,|\, x_2 \leq 0\}$ sind beide zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, ihr Schnitt aber nicht.

Beispiele 6.8

1. Ist C nichtleere *konvexe* Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (d.h. $(1-t)x+ty \in C$ für alle $x, y \in C$ und $t \in [0,1]$), so ist C zusammenhägend, denn: sei $x \in C$ fest, dann gilt $C = \bigcup\limits_{y\in C} [x,y]$, wobei $[x,y] := \{(1-t)x + ty \,|\, t \in [0,1]\}$. Die Teilmenge $[x,y]$ von $\mathbb{R}^n$ ist aber zusammenhängend als Bild eines zusammenhängenden topologischen Raumes unter einer stetigen Abbildung, siehe Beispiel 6.3.1 und Lemma 6.4. Wegen $\bigcap\limits_{y\in C} [x,y] = \{x\}$ muss dann nach Proposition 6.6 C zusammenhängend sein.

2. Ist allgemeiner C *sternförmig* bezüglich eines Punktes $x \in C$ (d.h. $(1-t)x+ty \in C$ für alle $y \in C$ und $t \in [0,1]$), so ist C zusammenhängend (gleicher Beweis).

Proposition 6.9 *Ist Y zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$, so ist $\overline{Y}$ auch zusammenhängend.*

Beweis: Sei Ω offene und abgeschlossene Teilmenge von $\overline{Y}$, dann ist $\Omega \cap Y$ auch offen und abgeschlossen in Y, so mit gilt entweder $\Omega \cap Y = \varnothing$ oder $\Omega \cap Y = Y$. Im ersten Fall muss dann $\Omega = \varnothing$ gelten (siehe Definition 1.9), im zweiten Fall muss dann $Y \subset \Omega$ gelten, woraus mit Proposition 1.11 $\Omega = \overline{Y}$ folgt (denn Ω ist abgeschlossen in $\overline{Y}$). $\square$

Bemerkung 6.10 Wird in Proposition 6.9 $\overline{Y}$ durch $\overset{0}{Y}$ ersetzt, so gilt die Aussage nicht. Betrachte z.B. für Y die Vereinigung zweier abgeschlossener Scheiben in $\mathbb{R}^2$, die an einander (in genau einem Punkt) tangential sind. Dann ist $\overset{0}{Y}$ die Vereinigung der entsprechenden offenen Scheiben in $\mathbb{R}^2$, ist insbesondere nicht zusammenhängend, obwohl Y zusammenhängend ist.

Beispiel 6.11 Ist $I \subset \mathbb{R}$ Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Abbildung, so ist $\mathrm{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \,|\, x \in I\}$ zusammenhängend. Somit ist auch $\overline{\mathrm{Graph}(f)}$ (Abschluss in $\mathbb{R}^2$) zusammenhängend. Betrachte z.B. $I :=]0, \infty[$ und $f(x) := \sin(\frac{1}{x})$: Der Abschluss von $\mathrm{Graph}(f)$ in $\mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend, was *a priori* nicht klar ist wegen $\overline{\mathrm{Graph}(f)} = (\{0\} \times [-1,1]) \cup \mathrm{Graph}(f)$.

Proposition 6.12 *Ist $(X_i)_{1\leq i\leq m}$ eine endliche Familie zusammenhängender topologischer Räume, so ist das Produkt $X := \prod_{i=1}^m X_i$ bezüglich der Produkttopologie auch zusammenhängend.*

Beweis: Für $m = 2$ sei $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ stetige Abbildung. Dann ist, für jedes $x_1 \in X_1$, die Abbildung $f_{x_1} : X_2 \longrightarrow \{0,1\}$, $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ auch stetig (siehe Definition der Produkttopologie). Da X_2 zusammenhängend ist, muss dann f_{x_1} konstant sein. Wir bezeichnen diese Konstante mit f_{x_1}. Die Abbildung $X_1 \longrightarrow \{0,1\}$, $x_1 \mapsto f_{x_1}$, ist dann auch stetig auf X_1 (sie stimmt mit der Abbildung $x_1 \longrightarrow f(x_1, x_2)$ überein, wobei $x_2 \in X_2$ beliebig gewählt werden kann). Da X_1 zusammenhängend ist, muss dann die Abbildung konstant sein. Insgesamt ist f konstant. Führe nun Induktion über m durch. $\square$

6.2 Zusammenhangskomponenten

Definition 6.13 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Die* Zusammenhangskomponente *von x bezüglich X ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von X, die x enthalten.*

Beachte, dass die Zusammenhangskomponente von x in X nichtleer ist, denn $\{x\}$ ist zusammenhängend!

Proposition 6.14 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann gilt:*

1. *Die Zusammenhangskomponente von x in X ist die größte zusammenhängende Teilmenge von X, die x enthält.*

2. *Die Zusammenhangskomponente von x in X ist abgeschlossen in X.*

3. *Die Beziehung*

$$x \sim y \iff y \text{ liegt in der Zusammenhangskomponente von } x$$

ist eine Äquivalenzrelation auf X.

Beweis: Aus Proposition 6.6 folgt, dass die Zusammenhangskomponente von x in X selber zusammenhängend ist, somit ist sie die größte zusammenhängende Teilmenge von X, die x enthält. Da der Abschluss einer zusammenhängenden Teilmenge zusammenhängend ist (Proposition 6.9), muss dann nach 1. die Zusammenhangskomponente von x in X abgeschlossen in X sein. Die letzte Aussage wird als Übungsaufgabe gelassen. $\square$

Aus Proposition 6.14.3 folgt, dass jeder topologische Raum sich als disjunkte Vereinigung abgeschlossener zusammenhängender Teilmengen schreiben lässt. Diese Teilmengen heißen die *Zusammenhangskomponenten von X*. Beachte, dass sie nicht notwendigerweise offen sind: z.B. $\{0\}$ ist eine Zusammenhangskomponente des topologischen Raumes $X := \{\frac{1}{n} \text{ wobei } n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} \cup \{0\}$, ist aber nicht offen in X.

6.3 Lokal zusammenhängende topologische Räume

Definition 6.15 *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt* lokal zusammenhängend, *wenn jeder Punkt von X eine Basis von zusammenhängenden Umgebungen besitzt.*

Proposition 6.16 *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ ist genau dann lokal zusammenhängend, wenn für alle offenen Teilmengen Ω von X die Zusammenhangskomponenten von Ω offen in Ω (oder X) sind.*

Beweis: Ist Ω offene Teilmenge eines lokal zusammenhängenden topologischen Raumes X, so ist Ω selber lokal zusammenhängend. Wähle dann eine nichtleere Zusammenhangskomponente C von Ω und $x \in C$. Dann gibt es eine offene Zusammenhängende Umgebung V von x in Ω. Nach Proposition 6.14 muss dann $V \subset C$ gelten. Somit ist C offen in Ω.
Umgekehrt, sind die Zusammenhangskomponenten aller offenen Teilmengen von X offen (in der offenen Teilmenge oder in X, das ist dasselbe), so fixiere ein $x \in X$ und eine Umgebung U von x in X. O.B.d.A. sei U offen in X. Dann ist die Zusammenhangskomponente V von x in U offen in U, insbesondere in X. Somit existiert eine zusammenhängende Umgebung von x in U. Dies zeigt, dass $(X, \mathcal{O})$ lokal zusammenhängend ist. $\square$

Beispiele 6.17

1. Der Raum $\mathbb{R}^n$ zusammen mit der Standardtopologie ist lokal zusammenhängend, denn offene Bälle sind als konvexe Teilmengen zusammenhängend.

2. Der Raum $X := \overline{\text{Graph}(f)}$ zusammen mit der Relativtopologie von $\mathbb{R}^2$ (siehe Beispiel 6.11), wobei $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$, ist nicht lokal zusammenhängend. Denn: die Zusammenhangskomponente des Punktes $(0, 0) \in X$ in der offenen Teilmenge $\Omega := X \cap (\mathbb{R} \times] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[)$ von X ist $\{0\} \times] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, was keine offene Teilmenge von Ω ist (Bild malen).

6.4 Wegzusammenhängende topologische Räume

Definition 6.18 *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt genau dann* wegzusammenhängend, *wenn je zwei Punkte aus X durch eine stetige Kurve in X verbunden werden können, d.h. wenn es für jede $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ gibt mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.*

Proposition 6.19 *Seien $(X, \mathcal{O})$ und $(Y, \mathcal{O}')$ topologische Räume.*

1. *Ist $(Y_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie wegzusammenhängender Teilmengen eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ mit $\bigcap\limits_{i \in I} Y_i \neq \varnothing$, so ist $\bigcup\limits_{i \in I} Y_i$ wegzusammenhängend.*

2. *Ist X wegzusammenhängend und $f : X \longrightarrow Y$ stetige Abbildung, so ist $f(X)$ wegzusammenhängend.*

3. *Ist $(X_i)_{1 \leq i \leq m}$ eine endliche Familie wegzusammenhängender topologischer Räume, so ist das Produkt $X := \prod_{i=1}^m X_i$ bezüglich der Produkttopologie auch wegzusammenhängend.*

Beweis: Übungsaufgabe! Dabei wird verwendet, dass die Beziehung

$$x \underset{w}{\sim} y \iff \exists \gamma : [0, 1] \to X \text{ stetig mit } \gamma(0) = 1 \text{ und } \gamma(1) = y$$

eine Äquivalenzrelation auf X ist (auch Übungsaufgabe). □

Bemerkung 6.20 Der Abschluss einer wegzusammenhängenden Teilmenge muss aber nicht wegzusammenhängend sein. Betrachte z.B. $X := \overline{\text{Graph}(f)}$ zusammen mit der Relativtopologie von $\mathbb{R}^2$ (siehe Beispiel 6.11), wobei $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$. Die Teilmenge Graph$(f)$ ist nach Proposition 6.19 wohl wegzusammenhängend, X aber nicht (es gibt keine stetige Verbindung von $(0, 0)$ nach $(\frac{1}{\pi}, 0)$ in X).

Proposition 6.21 *Ist $(X, \mathcal{O})$ wegzusammenhängender topologischer Raum, so ist $(X, \mathcal{O})$ auch zusammenhängend.*

Beweis: Lege $x \in X$ fest und betrachte, für jedes $y \in X$, eine stetige Abbildung $\gamma_y : [0,1] \longrightarrow X$ mit $\gamma_y(0) = x$ und $\gamma_y(1) = y$. Dann ist $\gamma_y([0,1])$ als stetiges Bild eines zusammenhängenden topologischen Raumes selber zusammenhängend (Beispiel 6.3.1 und Lemma 6.4) und nach Proposition 6.6 muss dann $X = \bigcup_{y \in X} \gamma_y([0,1])$ zusammenhängend sein. $\square$

Beispiele 6.22

1. Ist C sternförmig bezüglich eines seiner Punkte in $\mathbb{R}^n$, so ist C wegzusammenhängend (wähle $\gamma_y(t) := (1-t)x + ty$). Insbesondere ist jede konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend.

2. Es existieren zusammenhängende topologische Räume, die nicht wegzusammenhängend sind, z.B. der Raum X aus der Bemerkung 6.20.

Definition 6.23 *Ein topologischer Raum* $(X, \mathcal{O})$ *heißt genau dann* lokal wegzusammenhängend, *wenn jeder Punkt von* X *eine Basis von wegzusammenhängenden Umgebungen besitzt.*

Proposition 6.24 *Ist* $(X, \mathcal{O})$ *zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, so ist* $(X, \mathcal{O})$ *auch wegzusammenhängend.*

Beweis: Sei $x \in X$ beliebig und betrachte die Äquivalenzklasse $C_x^{(w)}$ von x in X bezüglich der im Beweis von Proposition 6.19 definierten Äquivalenzrelation $\underset{w}{\sim}$, d.h.,

$$C_x^{(w)} := \{y \in X \mid \exists\, \gamma : [0,1] \to X \text{ stetig mit } \gamma(0) = x \text{ und } \gamma(1) = y\}.$$

Wegen $(X, \mathcal{O})$ lokal wegzusammenhängend ist $C_x^{(w)}$ offen in X; da dann alle Äquivalenzklassen bezüglich $\underset{w}{\sim}$ offen sind, folgt, dass $C_x^{(w)}$ auch abgeschlossen in X (sein Komplement besteht aus der Vereinigung von offenen Teilmengen von X). Da $(X, \mathcal{O})$ zusammenhängend ist, folgt $C_x^{(w)} = X$, was zu beweisen war. $\square$

Bemerkung 6.25 Es wurde im Beweis von Proposition 6.24 auch gezeigt, dass jede Zusammenhangskomponente eines lokal wegzusammenhängenden topologischen Raumes offen und wegzusammenhängend ist.

Beispiele 6.26

1. Somit ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.

2. Die Sphäre $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ ist wegzusammenhängend (je zwei Punkte können durch einen Kreisbogen verbunden werden), somit ist sie auch zusammenhängend.

3. Die hyperbolische Ebene $H^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1 \text{ und } x_1 > 0\}$ ist auch wegzusammenhängend: je zwei Punkte können durch einen Hyperbelbogen verbunden werden. Insbesondere ist H^2 zusammenhängend.

4. Der Raum X aus Bemerkung 6.20 ist nicht lokal wegzusammenhängend, es sei denn, er wäre nach Proposition 6.24 wegzusammenhängend.

5. Nicht jeder wegzusammenhängende topologische Raum ist lokal wegzusammenhängend. Sei z.B. Y der Raum aus Bemerkung 6.20 und X der Raum, den man durch das Verbinden von $(0,0)$ mit $(1,0)$ mittels einer stetigen Kurve in $\mathbb{R}^2 \setminus Y$ bekommt. Dann ist X wohl wegzusammenhängend (je zwei Punkte aus X können über diese zusätzliche Kurve miteinander verbunden werden), nicht aber lokal wegzusammenhängend (der Punkt $(0,0)$ hat immer noch keine Basis von wegzusammenhängenden Umgebungen in X).

7 Die Standardtopologie von $\mathbb{R}^n$

Die von der Standardmetrik induzierte Topologie auf $\mathbb{R}^n$ (Definition 3.11) besitzt bestimmte Eigenschaften, die für die Differentialgeometrie wichtig sind. Wir haben bereits gesehen, dass die kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ bzgl. der Produkttopologie (zur Produktmetrik) dessen abgeschlossenen beschränkten Teilmengen sind. Gilt das auch für die Standardmetrik? Die Antwort ist "Ja", denn jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ induziert dieselbe Topologie:

Definition 7.1 *Sei V ein Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf V heißen* äquivalent *g.d.w. positive reelle Zahlen k_1 und k_2 so existieren, dass*

$$k_1\|x\| \leq \|x\|' \leq k_2\|x\|$$

für alle $x \in V$.

Bemerkung 7.2 Dies definiert offenbar eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Normen auf V. Bemerke auch, dass zwei äquivalente Normen dieselbe Topologie auf V definieren (die beiden Tatsachen sind übrigens äquivalent, siehe unten), denn es gilt bzgl. der zu $\|\cdot\|$ bzw. $\|\cdot\|'$ assoziierten Metriken d bzw. d':

$$B_d(x, \frac{r}{k_2}) \subset B_{d'}(x,r) \subset B_d(x, \frac{r}{k_1})$$

für alle $x \in V$ und $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

Satz 7.3 *Sei $\|\cdot\|'$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann sind $\|\cdot\|'$ und $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent. Insbesondere induzieren alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ dieselbe Topologie.*

Beweis: Sei d_∞ die zu $\|\cdot\|_\infty$ assoziierte Metrik auf $\mathbb{R}^n$, d.h. $d_\infty(x,y) := \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$ für alle $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ aus $\mathbb{R}^n$. Bemerke zuerst, dass $\|\cdot\|'$ *stetig* auf $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ ist (als Abbildung $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei $\mathbb{R}$ seine kanonische Topologie trägt), denn: für alle x und y aus $\mathbb{R}^n$ gilt

$$|\|x\|' - \|y\|'| \overset{3.5}{\leq} \|x-y\|' = \|\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)e_i\|' \leq \underbrace{(\sum_{i=1}^n \|e_i\|')}_{C} \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| = C d_\infty(x,y),$$

wobei $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ ist; insbesondere gilt $|\|x\|' - \|y\|'| \longrightarrow 0$ wenn $d_\infty(x,y) \longrightarrow 0$, was die Stetigkeit von $\|\cdot\|'$ beweist.
Setze $S := \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = 1\}$ und betrachte die (stetige) Abbildung $\|\cdot\|'_{|S} : S \longrightarrow \mathbb{R}$. Da S abgeschlossen und beschränkt ist (bzgl. d_∞), ist nach Satz 4.12 die Teilmenge S auch kompakt (bzgl. der von d_∞ induzierten Topologie). Aus Korollar 5.16 folgt die Existenz zweier reeller Zahlen m und M s.d.

$$m \leq \|x\|' \leq M$$

für alle $x \in S$. Nun aber gilt, für jedes $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\|x\|' = \| \underbrace{\frac{x}{\|x\|_\infty}}_{\in S} \|' \cdot \|x\|_\infty \in [m\|x\|_\infty, M\|x\|_\infty],$$

d.h.

$$m\|x\|_\infty \leq \|x\|' \leq M\|x\|_\infty. \tag{1}$$

Da (1) offenbar auch für $x = 0$ gilt, sind $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|'$ äquivalent auf $\mathbb{R}^n$. □

Wie bereits erwähnt gilt also Satz 4.12 für jede Norm auf $\mathbb{R}^n$, d.h. bzgl. jeder Norm auf $\mathbb{R}^n$ sind dessen kompakte Teilmengen genau die abgeschlossenen beschränkten Teilmengen.

Satz 7.4 *Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter Vektorraum, $\|\cdot\|'$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Dann ist A stetig auf $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|')$.*

Beweis: Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\|A(x)\|_V &= \|A(\sum_{i=1}^n x_i e_i)\|_V \\
&= \|\sum_{i=1}^n x_i A(e_i)\|_V \\
&\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|A(e_i)\|_V \\
&\leq \underbrace{(\sum_{i=1}^n \|A(e_i)\|_V)}_{=:M} \max_{1\leq i\leq n} |x_i|,
\end{aligned}$$

d.h. $\|A(x)\|_V \leq M\|x\|_\infty$. Aus Proposition 5.6 folgt, dass A stetig ist von $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ nach $(V, \|\cdot\|_V)$ ist. Wegen Satz 7.3 sind $\|\cdot\|'$ und $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent, somit ist A auch stetig von $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|')$ nach $(V, \|\cdot\|_V)$. □

Literatur

[1] G. Choquet, *Topology*, Academic Press, New York (1966).

[2] J. Dixmier, *Topologie générale*, Presses Universitaires de France, Paris (1981).

[3] L. Schwartz, *Analyse. Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, Paris (1997).

[4] L.A. Steen, J.A. Seebach, *Counterexamples in topology*, Reprint of the second (1978) edition, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1995.

Index

Überdeckung, 13

abgeschlossen, 2
Abschluss, 4
Abstand (siehe Metrik), 7
Abzählbarkeitsaxiom
- erstes, 12
- zweites, 12

Ball (in einem metrischen Raum), 9
Basis
- einer Topologie, 11
- von Umgebungen, 11

beschränkte Teilmenge, 17
Bildtopologie, 21

dichte Teilmenge, 6
diskrete
- Teilmenge, 6
- Topologie, 2, 10

gleichmäßig stetig, 24
Grenzwert (einer Folge), 6

Häufungspunkt, 4
hausdorffsch, 7
homöomorph, 23
Homöomorphismus, 23

induzierte Topologie
- siehe Teilraumtopologie, 3
- von einer Metrik, 9

Inneres, 4
isoliert, 4

Klumpentopologie, 2
kompakt, 13
konvergente Folgen, 6

Metrik, 7
metrischer Raum, 7

Normen, 8
- äquivalente, 31

offen, 2

Produktmetrik, 8
Produkttopologie, 3, 23

Quotiententopologie, 22

Relativtopologie (siehe auch Teilraumtopologie), 3

Standardmetrik (auf $\mathbb{R}^n$), 9
Standardtopologie (auf $\mathbb{R}^n$), 10, 31
stetige Abbildung, 19

Teilraumtopologie (siehe auch Relativtopologie), 3
Topologie, 2
topologischer Raum, 2

Umgebung, 4
Urbildtopologie, 22

wegzusammenhängend, 29
wegzusammenhängend
- lokal, 30

zusammenhängend, 25
- lokal, 28

Zusammenhangskomponente, 28