

Geometrie (Lehramt Gymnasium)

Nicolas Ginoux

Universität Regensburg - WS 2008/9

1. Dezember 2009

Inhaltsverzeichnis

Einführung	5
1 Kurven	7
1.1 Parametrisierungen und Länge	7
1.1.1 Parametrisierungen	7
1.1.2 Kurven als geometrische Objekte	9
1.1.3 Orientierung einer Kurve	11
1.1.4 Parametrisierungen nach Bogenlänge	12
1.1.5 Geschlossene und einfach geschlossene Kurven	16
1.2 Ebene Kurven	17
1.2.1 Normalenfeld und Krümmung	17
1.2.2 Geometrische Interpretation der Krümmung	22
1.2.3 Die Frenet-Gleichungen	23
1.2.4 Der Hauptsatz der Theorie der ebenen Kurven	24
1.2.5 Umlaufzahl und Totalkrümmung	29
1.2.6 Die isoperimetrische Ungleichung	38
1.3 Raumkurven	41
1.3.1 Krümmung	41
1.3.2 Das Frenet-Dreibein	43
1.3.3 Frenet-Gleichungen und Windung	46
1.3.4 Geometrische Interpretation der Krümmung und der Windung	48
1.3.5 Der Hauptsatz der Theorie der Raumkurven	50
Zusammenfassung	53
Übungsblätter	56
2 Äußere Geometrie von Flächen im \mathbb{R}^3	85
2.1 Definition einer regulären Fläche	85
2.1.1 Durch Parametrisierungen	86
2.1.2 Durch lokale Karten	91
2.1.3 Durch Submersionen	95
2.2 Differenzierbare Abbildungen	103
2.3 Die Tangentialebene	107
2.4 Die Tangentialabbildung einer differenzierbaren Abbildung	110
2.5 Die erste Fundamentalform	113
2.6 Normalenfelder und Orientierbarkeit	117
2.7 Die zweite Fundamentalform	121
2.7.1 Definition	121

2.7.2	Krümmungen	123
2.7.3	Geometrische Interpretation der Gauss-Krümmung	129
2.7.4	Minimalflächen	134
2.8	Einige weitere Klassen von Beispielen	137
2.8.1	Regelflächen	137
2.8.2	Drehflächen	139
Zusammenfassung		143
Übungsblätter		145
3 Klausuraufgaben		173
Literatur		193

Einführung

Dieses Skript enthält den ersten Teil der Vorlesung, wo die äußere Geometrie von Kurven und Flächen behandelt wird. Es bezieht sich größtenteils auf [1], unterscheidet sich aber davon für (beispielweise) die Definition regulärer Flächen, siehe Abschnitt 2.1. Als weitere Literatur wird [3] stark empfohlen, siehe eventuell auch Bände 2 und 3 von [8]. Lernen geht ohne Üben nicht: dementsprechend wurde eine Reihe von korrigierten Übungs- und Klausuraufgaben zusammengestellt, darunter auch ein paar zum Thema Axiomatik (prüfungsrelevanter Stoff!).

Kapitel 1

Kurven

1.1 Parametrisierungen und Länge

1.1.1 Parametrisierungen

Definition 1.1 Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Eine parametrisierte Kurve im \mathbb{R}^n ist eine C^∞ - (d.h., unendlich oft differenzierbare) Abbildung

$$c : I \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Erinnerung: Sei $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Dann lässt sich für jedes $t \in I$ der Punkt $c(t)$ in der kanonischen Basis von \mathbb{R}^n darstellen in der Form

$$c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix},$$

wobei $c_j(t) \in \mathbb{R}$ für alle $1 \leq j \leq n$. Die c_j sind dann Abbildungen $I \longrightarrow \mathbb{R}$ und heißen die *Koordinatenfunktionen* von c . Die Abbildung c ist genau dann C^∞ , wenn für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ die Funktion c_j C^∞ ist, und in diesem Fall gilt

$$c^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} c_1^{(k)}(t) \\ \vdots \\ c_n^{(k)}(t) \end{pmatrix}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $t \in I$.

Definition 1.2 Eine regulär parametrisierte Kurve ist eine parametrisierte Kurve $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$c'(t) \neq 0$$

für alle $t \in I$.

Beispiele 1.3

1. Sei $n = 1$: jede C^∞ -Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine parametrisierte Kurve; jede C^∞ -Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f'(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist eine regulär parametrisierte Kurve.
2. Sei $n = 2$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} c : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto p + tv \end{aligned}$$

wobei $p, v \in \mathbb{R}^2$, ist eine parametrisierte Kurve. Ferner gilt $c'(t) = v$ für alle $t \in \mathbb{R}$, somit ist c genau dann regulär parametrisiert, wenn $v \neq 0$.

3. Sei nochmal $n = 2$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} c : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist eine regulär parametrisierte Kurve, denn c ist C^∞ und es gilt $c'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

- 3.' Sei nochmal $n = 2$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist ebenfalls eine regulär parametrisierte Kurve.

4. Sei für $n = 2$ die Abbildung $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $c(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$ definiert. Wegen $c'(0) = 0$ ist c nicht regulär parametrisiert.

Die Beispiele 3 und 3' will man im Wesentlichen nicht unterscheiden.

Definition 1.4 Seien $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $d : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulär parametrisierte Kurven. Man sagt, dass d eine Umparametrisierung von c ist, g.d.w. ein Diffeomorphismus

$$\varphi : J \longrightarrow I$$

existiert mit $d = c \circ \varphi$.

Erinnerung: Eine Abbildung $\varphi : J \rightarrow I$ heißt *Diffeomorphismus* g.d.w. sie eine C^∞ -Bijektion und ihre Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : I \rightarrow J$ auch C^∞ ist. Dies hat Sinn selbst wenn I und J keine offenen Intervalle sind.

Beispiel 1.5 Setze $I := J := \mathbb{R}$ und $\varphi(t) := 2t$. Dann gilt für die Beispiele 3. und 3.' oben $d(t) = c \circ \varphi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Da φ ein Diffeomorphismus ist, ist d eine Umparametrisierung von c .

VON HIER AUS BETRACHTEN WIR NUR REGULÄR PARAMETRISIERTE KURVEN

1.1.2 Kurven als geometrische Objekte

Definition 1.6 Auf der Menge der regulär parametrisierten Kurven wird die Relation “ \sim ” definiert durch

$$c \sim d : \iff d \text{ ist eine Umparametrisierung von } c,$$

d.h., g.d.w. ein Diffeomorphismus $\varphi : J \rightarrow I$ so existiert, dass $d = c \circ \varphi$, wobei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $d : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulär parametrisierte Kurven sind.

Proposition 1.7 Die Relation “ \sim ” ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der regulär parametrisierten Kurven.

Beweis: Man prüft die Reflexivität, die Symmetrie, und die Transitivität von “ \sim ” nach:

- *Reflexivität:* sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine regulär parametrisierte Kurve. Wähle $J := I$ und $\varphi := \text{Id}_I$, dann ist $\varphi : J \rightarrow I$ ein Diffeomorphismus und es gilt $c \circ \varphi = c$, d.h. $c \sim c$.
- *Symmetrie:* seien $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $d : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulär parametrisierte Kurven s.d. $c \sim d$. Aus der Definition von “ \sim ” folgt die Existenz eines Diffeomorphismus $\varphi : J \rightarrow I$ mit $d = c \circ \varphi$. Aber dann gilt $c = d \circ \varphi^{-1}$, und $\varphi^{-1} : I \rightarrow J$ ist ebenfalls ein Diffeomorphismus. Somit gilt $d \sim c$.
- *Transitivität:* seien $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $d : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $e : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulär parametrisierte Kurven mit $c \sim d$ und $d \sim e$. Aus der Definition von “ \sim ” folgt die Existenz zweier Diffeomorphismen $\varphi : J \rightarrow I$ und $\psi : K \rightarrow J$ mit $d = c \circ \varphi$ und $e = d \circ \psi$. Aber dann gilt $e = c \circ (\varphi \circ \psi)$ und $\varphi \circ \psi : K \rightarrow I$ ist als Verknüpfung zweier Diffeomorphismen auch ein Diffeomorphismus. Somit gilt $c \sim e$. \square

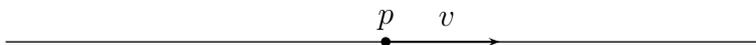
Definition 1.8 Eine Kurve im \mathbb{R}^n ist eine Äquivalenzklasse bzgl. “ \sim ” von regulär parametrisierten Kurven. Wir bezeichnen mit $[c]$ die Äquivalenzklasse von c .

Definition 1.9 Die Spur einer Kurve ist die Menge $c(I) \subset \mathbb{R}^n$, wobei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierung der Kurve ist.

Bemerke, dass die Spur von $[c]$ wohldefiniert ist, denn: ist $d : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Umparametrisierung von $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, so existiert ein Diffeomorphismus $\varphi : J \rightarrow I$ mit $d = c \circ \varphi$, und somit gilt $d(J) = c(\varphi(J)) = c(I)$, d.h., die Spur hängt nicht von der Wahl der Parametrisierung der Kurve ab.

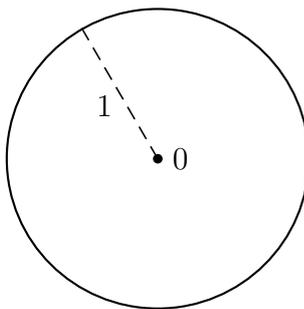
Beispiele 1.10

1. Sei $n = 2$ und $c : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $c(t) := p + tv$ wobei $p, v \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq 0$. Die Spur von $[c]$ ist dann eine *Geradenstrecke* in \mathbb{R}^2 , die p enthält und v als Richtungsvektor besitzt.



2. Sei $n = 2$ und $c : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $c(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Die Spur von $[c]$ ist der *Kreis* von Radius 1 um 0. Dieser wird üblicherweise mit S^1 bezeichnet. Also:

$$S^1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}.$$



Bemerkung 1.11 Eine Kurve wird im Allgemeinen *nicht* durch ihre Spur festgelegt!

Betrachte z.B. $c :]0, 4\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $c(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ und andererseits $d :$

$]0, 4\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $d(t) := \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$. Die Abbildungen c und d sind regulär parametrisierte Kurven und besitzen dieselbe Spur (nämlich den Kreis S^1), stellen aber *nicht* dieselbe Kurve dar. Denn: gäbe es einen Diffeomorphismus $\varphi :]0, 4\pi[\rightarrow]0, 4\pi[$ mit $d = c \circ \varphi$, so würde ein $k \in \mathbb{Z}$ so existieren, dass

$$\varphi(t) = 2t + 2k\pi$$

für alle $t \in]0, 4\pi[$, woraus $\varphi(]0, 4\pi[) \not\subseteq]0, 4\pi[$ folgen würde, Widerspruch. Es gilt also: $[c] \neq [d]$, d.h., $[c]$ und $[d]$ sind verschiedene Kurven. Beachte insbesondere, dass der Begriff von Umparametrisierung wohl von dem Definitionsintervall der parametrisierten Kurven abhängt.

Anders ausgedrückt: die Abbildung

$$\begin{aligned} \{\text{Kurven}\} &\longrightarrow \{\text{Spuren von Kurven}\} \\ [c] &\longmapsto \text{Spur}([c]) \end{aligned}$$

ist surjektiv aber *nicht* injektiv.

1.1.3 Orientierung einer Kurve

Seien I und J Intervalle und $\varphi : J \rightarrow I$ ein Diffeomorphismus. Da J ein Intervall ist, φ' stetig auf J ist und wegen $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$ muss entweder $\varphi' > 0$ auf J oder $\varphi' < 0$ auf J gelten.

Definition 1.12

1. Ein Diffeomorphismus $\varphi : J \rightarrow I$ heißt orientierungserhaltend bzw. orientierungsumkehrend g.d.w. $\varphi' > 0$ bzw. $\varphi' < 0$ auf J gilt.
2. Eine Umparametrisierung $d = c \circ \varphi$ einer regulär parametrisierten Kurve c heißt orientierungserhaltend bzw. orientierungsumkehrend g.d.w. φ orientierungserhaltend bzw. orientierungsumkehrend ist.

Proposition 1.13 Die Relation " $\underset{+}{\sim}$ " auf der Menge der regulär parametrisierten Kurven, die durch

$$(c : I \rightarrow \mathbb{R}^n) \underset{+}{\sim} (d : J \rightarrow \mathbb{R}^n) \iff \exists \varphi : J \rightarrow I \text{ orientierungserhaltender Diffeomorphismus mit } d = c \circ \varphi$$

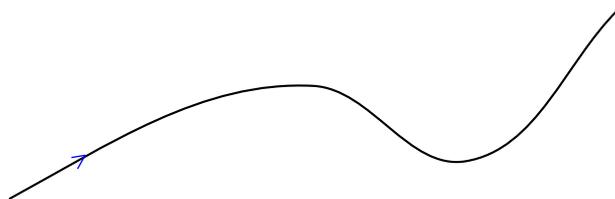
definiert ist, ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Übungsaufgabe! □

Definition 1.14 Eine orientierte Kurve ist eine Äquivalenzklasse bzgl. " $\underset{+}{\sim}$ " von regulär parametrisierten Kurven.

Von hier aus wird unter *orientierter* Parametrisierung einer orientierten Kurve $[c]$ stets ein Element aus der Äquivalenzklasse bzgl. " $\underset{+}{\sim}$ " von c verstanden.

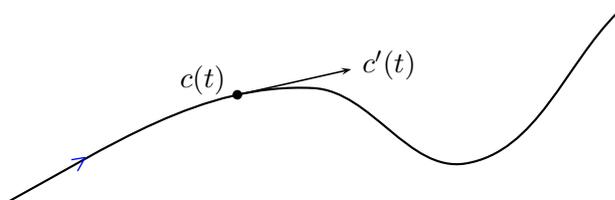
Bemerkungen 1.15 Aus $\varphi' > 0$ oder $\varphi' < 0$ auf J für jeden festen Diffeomorphismus $\varphi : J \rightarrow I$ folgt, dass jede Kurve *genau zwei* orientierte Kurven liefert. Man sagt, dass eine Kurve zwei Orientierungen besitzt. Die Orientierung wird im Allgemeinen durch den Durchlaufsinne auf der Spur der Kurve bezeichnet.



1.1.4 Parametrisierungen nach Bogenlänge

Definition 1.16 Das Geschwindigkeitsvektorfeld einer regulär parametrisierten Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist die Abbildung

$$c' : I \rightarrow \mathbb{R}^n.$$



Die Motivation dieses Abschnitts ist die Suche nach einer Umparametrisierung \tilde{c} einer vorgegebenen regulär parametrisierten Kurve c s.d. \tilde{c} “mit konstanter Geschwindigkeit” durchlaufen wird.

Notationen: Auf \mathbb{R}^n sei das kanonische Skalarprodukt stets mit “ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ” bezeichnet, d.h.

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

für alle $x := (x_1, \dots, x_n)$ und $y := (y_1, \dots, y_n)$ aus \mathbb{R}^n . Die entsprechende Norm wird mit “ $\| \cdot \|$ ” bezeichnet, d.h.,

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Definition 1.17 Die Länge einer Kurve $[c]$ ist definiert durch

$$L[c] := \int_I \|c'(s)\| ds,$$

wobei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierung von $[c]$ ist.

Bemerkungen 1.18

1. Die Länge von $[c]$ ist wohldefiniert, denn sei $d := c \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Umparametrisierung von c . Nach der Transformationsformel für Integrale gilt

$$\begin{aligned} \int_J \|d'(s)\| ds &= \int_J \|c'(\varphi(s))\varphi'(s)\| ds \\ &= \int_J \|c'(\varphi(s))\| |\varphi'(s)| ds \\ &\stackrel{(u:=\varphi(s))}{=} \int_I \|c'(u)\| du, \end{aligned}$$

d.h., die Zahl $L[c]$ hängt nicht von der Wahl der Parametrisierung von $[c]$ ab.

2. Gilt $\|c'(s)\| = 1$ für alle $s \in I$, so gilt für die Länge:

$$L[c] = \int_I \underbrace{\|c'(s)\|}_{=1} ds = |I|,$$

d.h., die Länge von $[c]$ stimmt mit der Länge des Intervalls überein, auf welchem die Parametrisierung c definiert ist.

Beispiele 1.19

1. Sei $c(t) := p + tv$ mit $p, v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, und $t \in I := \mathbb{R}$. Sei $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Aus $c'(t) = v$ für alle t folgt für die Länge:

$$L[c_{|[0, t_0]}] = \int_0^{t_0} \|v\| ds = \|v\| t_0.$$

2. Sei $c(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ mit $t \in I := \mathbb{R}$. Aus

$$\|c'(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$$

folgt für die Länge:

$$L[c_{|[0, 2\pi]}] = 2\pi.$$

Definition 1.20 Eine regulär parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt nach Bogenlänge parametrisiert g.d.w. für alle $t \in I$ gilt

$$\|c'(t)\| = 1.$$

Eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve ist insbesondere immer regulär parametrisiert.

Übungsaufgabe: Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulär parametrisiert und $t_0 \in I$ fest. Für $t \in \mathbb{R}$ bezeichne $I_{t_0,t}$ entweder $[t_0, t]$ falls $t_0 \leq t$ oder $[t, t_0]$ falls $t < t_0$. Zeigen Sie, dass c genau dann nach Bogenlänge parametrisiert ist, wenn für alle $t \in I$ gilt

$$L[c|_{I_{t_0,t}}] = |t - t_0|.$$

Proposition 1.21 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine regulär parametrisierte Kurve. Für ein festes $t_0 \in I$ sei φ die Umkehrabbildung von

$$\begin{aligned} \psi : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_{t_0}^t \|c'(s)\| ds. \end{aligned}$$

Dann ist $c \circ \varphi$ eine orientierungserhaltende Umparametrisierung nach Bogenlänge von c . Außerdem unterscheiden sich zwei Umparametrisierungen nach Bogenlänge von c durch eine affine Parametertransformation der Form $t \mapsto \pm t + r$ für ein $r \in \mathbb{R}$. Anders ausgedrückt: ist $\tilde{c} : I' \rightarrow \mathbb{R}^n$ Umparametrisierung nach Bogenlänge von c , so gibt es ein $r \in \mathbb{R}$ s.d. entweder $\tilde{c}(t) = (c \circ \varphi)(t+r)$ für alle $t \in I'$ oder $\tilde{c}(t) = (c \circ \varphi)(-t+r)$ für alle $t \in I'$ gilt.

Beweis: Die Abbildung ψ ist C^∞ und es gilt $\psi'(t) = \|c'(t)\| > 0$ für alle $t \in I$. Daraus folgt, dass ψ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus $I \rightarrow \psi(I) =: J$ ist. Setze $d := c \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann ist d eine orientierungserhaltende Umparametrisierung von c und es gilt für alle $t \in J$:

$$\begin{aligned} d'(t) &= c'(\varphi(t))\varphi'(t) \text{ mit } \varphi'(t) = \frac{1}{\psi'(\varphi(t))} \\ &= \frac{c'(\varphi(t))}{\|c'(\varphi(t))\|}, \end{aligned}$$

so dass $\|d'(t)\| = 1$ für alle $t \in J$. Somit ist die erste Aussage bewiesen.

Sei nun $\tilde{c} : I' \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine andere Umparametrisierung nach Bogenlänge von c . Dann ist \tilde{c} auch Umparametrisierung von d , d.h., es existiert ein Diffeomorphismus $\chi : I' \rightarrow J$ mit $\tilde{c} = d \circ \chi$. Aus $1 = \|\tilde{c}'\| = \underbrace{\|d'(\chi)\|}_1 |\chi'|$ folgt $|\chi'| = 1$, d.h., es gilt entweder $\chi' = 1$ auf I'

oder $\chi' = -1$ auf I' . Die zweite Aussage ist somit bewiesen. \square

Bemerke insbesondere, dass alle orientierungserhaltenden (bzw. orientierungsumkehrenden) Umparametrisierungen nach Bogenlänge von c der Form $t \mapsto (c \circ \varphi)(t+r)$ (bzw. $t \mapsto (c \circ \varphi)(-t+r)$) sind, wobei $r \in \mathbb{R}$ eine Konstante und φ die in der Proposition 1.21 definierte Funktion ist.

Beispiele 1.22

1. Sei $c(t) := p + tv$, mit $p, v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, und $t \in I := \mathbb{R}$. In diesem Fall lautet die in der Proposition 1.21 angegebene Funktion ψ

$$\psi(t) = \int_{t_0}^t \|v\| ds = (t - t_0)\|v\|,$$

also $\psi^{-1}(t) = \varphi(t) = t_0 + \frac{t}{\|v\|}$. Somit ist $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine affine Parametertransformation und die durch $\tilde{c}(t) := (c \circ \varphi)(t) = p + t_0v + t\frac{v}{\|v\|}$ ($\forall t \in \mathbb{R}$) definierte Abbildung \tilde{c} ist eine orientierungserhaltende Umparametrisierung nach Bogenlänge von c .

2. Sei $c(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ mit $t \in I := \mathbb{R}$. Wegen $\|c'(t)\| = 1$ für alle $t \in I$ ist c bereits nach Bogenlänge parametrisiert, es gibt also nichts zu tun!
3. Sei $c(t) := \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$ mit $t \in I :=]0, 2\pi[$, und setze $t_0 := \pi$. Dann gilt für alle $t \in I$:

$$\psi(t) = \int_{\pi}^t 2 ds = 2(t - \pi),$$

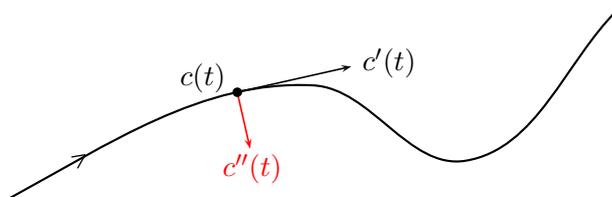
somit gilt $\psi(I) =] - 2\pi, 2\pi[$ und

$$\begin{aligned} \varphi :] - 2\pi, 2\pi[&\longrightarrow]0, 2\pi[\\ t &\longmapsto \frac{t}{2} + \pi, \end{aligned}$$

so dass die durch $\tilde{c}(t) := (c \circ \varphi)(t) = \begin{pmatrix} \cos(t + 2\pi) \\ \sin(t + 2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ (für alle $t \in] - 2\pi, 2\pi[$) definierte Abbildung \tilde{c} eine orientierungserhaltende Umparametrisierung nach Bogenlänge von c ist.

Definition 1.23 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Das Beschleunigungsvektorfeld von c wird definiert durch

$$c'' : I \rightarrow \mathbb{R}^n.$$



1.1.5 Geschlossene und einfach geschlossene Kurven

Definition 1.24

1. Eine regulär parametrisierte Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt genau dann periodisch, wenn eine positive reelle Zahl T so existiert, dass $c(t + T) = c(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.
2. Die Periode einer periodischen regulär parametrisierten Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist die einzige positive reelle Zahl T mit

$$\left\{ \begin{array}{l} c(t + T) = c(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \left(c(t + T') = c(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \right) \implies T' \in T\mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Erinnerung: Für eine beliebige stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist die Menge $\mathcal{T}_f := \{\tau \in \mathbb{R} \mid f(t + \tau) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$ eine abgeschlossene Untergruppe von \mathbb{R} . Da jede Untergruppe von \mathbb{R} entweder dicht oder diskret (bzgl. der Standardtopologie) in \mathbb{R} ist, muss \mathcal{T} entweder gleich \mathbb{R} oder der Form $T\mathbb{Z}$ sein für ein eindeutiges $T \geq 0$. Die Menge \mathcal{T}_f gleicht aber genau dann \mathbb{R} , wenn f konstant ist, und gleicht genau dann $\{0\}$, wenn f nicht periodisch ist. Außerdem ist jede regulär parametrisierte Kurve nichtkonstant, sonst würde ihre erste Ableitung identisch verschwinden. Daraus folgt, dass es für jede gegebene regulär parametrisierte periodische Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein eindeutiges $T > 0$ gibt mit $\mathcal{T}_c = T\mathbb{Z}$. Somit ist die Periode einer regulär parametrisierten periodischen Kurve wohldefiniert.

Definition 1.25 Eine Kurve in \mathbb{R}^n heißt genau dann geschlossen, wenn sie eine periodische Parametrisierung besitzt.

Ist $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ periodische regulär parametrisierte Kurve, so gilt $\int_{\mathbb{R}} \|c'(s)\| ds = \infty$ (denn $\|c'(s)\| \geq c_0 > 0$ für eine gewisse positive Konstante c_0). Dies motiviert eine neue Definition der Länge einer geschlossenen Kurve.

Definition 1.26 Die Länge einer geschlossenen Kurve in \mathbb{R}^n ist definiert durch

$$\int_0^T \|c'(s)\| ds,$$

wobei $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine periodische Parametrisierung mit Periode T der Kurve ist.

Wie in der Bemerkung 1.18 überprüfe man, dass die Länge wohldefiniert ist, d.h., sie hängt nicht von der Wahl der periodischen Parametrisierung ab (*Übungsaufgabe*).

Bemerkungen 1.27

1. Ist eine Kurve geschlossen, so muss nicht jede Parametrisierung der Kurve periodisch sein. Betrachte z.B. $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\tilde{c}(t) := \begin{pmatrix} \cos(\sinh(t)) \\ \sin(\sinh(t)) \end{pmatrix}$. Dann ist \tilde{c} wohl eine Parametrisierung von $[c]$ mit $c(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$; die Abbildung \tilde{c} ist aber nicht periodisch.

2. Es gilt allerdings: ist $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ Parametrisierung *nach Bogenlänge* einer geschlossenen Kurve, so muss c periodisch sein mit Periode gleich der Länge der Kurve (siehe 5. Übungsaufgabe im 2. Übungsblatt).

Definition 1.28 Eine Kurve in \mathbb{R}^n heißt genau dann einfach geschlossen, wenn sie eine periodische Parametrisierung $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Periode T besitzt, die auf $[0, T[$ injektiv ist.

Jede einfach geschlossene Kurve ist offenbar geschlossen, die Umkehrung gilt aber nicht (siehe Beispiele 1.30 unten). Beachte auch, dass c dann auf *jedem* Intervall der Form $[t_0, t_0 + T[$ (das wir mit *halboffener Periode* bezeichnen) injektiv ist, falls c eine periodische Parametrisierung mit Periode T der einfach geschlossenen Kurve ist.

Bemerkung 1.29 Ist eine Kurve einfach geschlossen, so muss *jede* periodische Parametrisierung der Kurve auf einer halboffenen Periode injektiv sein (*Übungsaufgabe*).

Beispiele 1.30

1. Die Kurve $[c]$, wobei $c(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, ist einfach geschlossen.
2. Die Kurve $[c]$, wobei $c(t) := \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, ist geschlossen aber nicht einfach geschlossen. Denn die Periode von c ist 2π , es gilt aber $c(0) = c(\pi) = 0$.

1.2 Ebene Kurven

Definition 1.31 Eine ebene Kurve ist eine Kurve in \mathbb{R}^2 .

Ebene Kurven lassen sich durch eine bestimmte geometrische Größe beschreiben, nämlich die *Krümmung*.

1.2.1 Normalenfeld und Krümmung

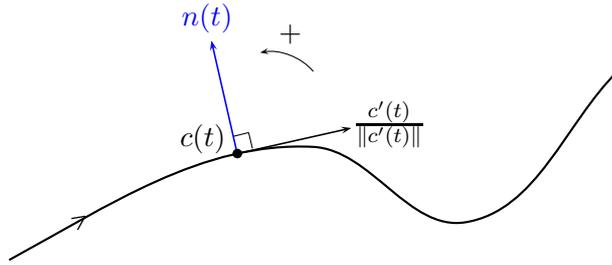
Von hier aus nenne man eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von \mathbb{R}^n *positiv orientiert*, falls

$$\det(v_1, \dots, v_n) > 0$$

gilt, wobei die Determinante in der kanonischen Basis von \mathbb{R}^n berechnet wird.

Definition 1.32 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte Kurve. Das Normalenfeld zu c ist die Abbildung

$$\begin{aligned} n : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto n(t) := \text{der Vektor von } \mathbb{R}^2 \text{ s.d. } \left\{ \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}, n(t) \right\} \text{ eine positiv orientierte} \\ &\text{orthonormale Basis (p.o.n.B.) von } \mathbb{R}^2 \text{ ist.} \end{aligned}$$



Bemerkung 1.33 Der Vektor $n(t)$ ist also das Bild von $\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$ unter der Drehung um den Ursprung 0 mit Winkel $\frac{\pi}{2}$. Insbesondere gelten $\|n(t)\| = 1$, $n(t) \perp c'(t)$ und (in der kanonischen Basis von \mathbb{R}^2) $\det\left(\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}, n(t)\right) = 1$ für alle $t \in I$.

Als unmittelbare Folgerung der Bemerkung 1.33 bekommt man folgende Formel für die Berechnung von $n(t)$:

Proposition 1.34 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte Kurve und sei n das Normalenfeld zu c . Dann lässt sich für alle $t \in I$ der Vektor $n(t)$ in der kanonischen Basis $\{e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ von \mathbb{R}^2 schreiben als

$$n(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}.$$

Beweis: Sei r die Drehung um 0 mit Winkel $\frac{\pi}{2}$, dann gilt $r(e_1) = e_2$ und $r(e_2) = -e_1$, also

$$\text{Mat}_{\{e_1, e_2\}}(r) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

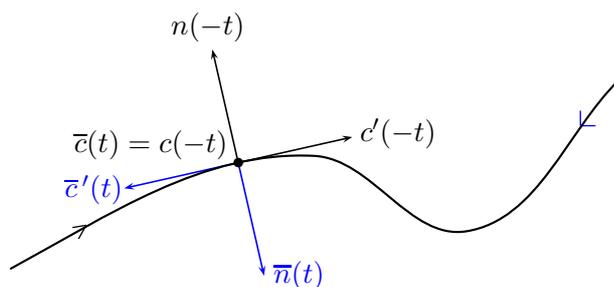
woraus das Ergebnis folgt. □

Bemerkungen 1.35

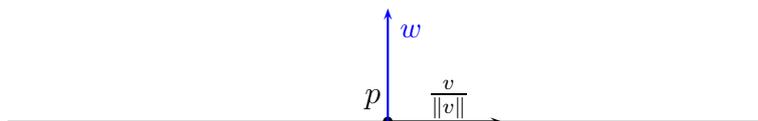
1. Das Normalenfeld ist insbesondere eine C^∞ -Abbildung $I \rightarrow \mathbb{R}^2$.
2. Das Normalenfeld hängt vom Durchlaufsinne ab: sei \bar{c} die durch $\bar{c}(t) := c(-t)$ ($t \in -I$) definierte Abbildung, dann ist \bar{c} ebenfalls regulär parametrisierte Kurve; das Normalenfeld \bar{n} zu \bar{c} ist gegeben durch

$$\bar{n}(t) = -n(-t)$$

für alle $t \in -I$.

**Beispiele 1.36**

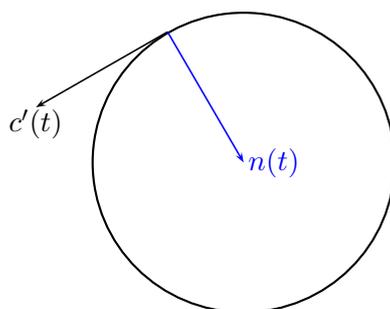
1. Sei $c(t) := p + tv$, wobei $p, v \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq 0$. Dann ist c regulär parametrisierte Kurve auf $I := \mathbb{R}$. Setze $w := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{v}{\|v\|}$ (in der kanonischen Basis von \mathbb{R}^2), dann gilt $n(t) = w$ für alle $t \in \mathbb{R}$.



2. Sei $c(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Dann ist c nach Bogenlänge parametrisierte Kurve auf $I := \mathbb{R}$. Das Normalenfeld n zu c ist gegeben durch

$$n(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} = -c(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.



Jetzt wollen wir messen, wie stark der Geschwindigkeitsvektor mit der Zeit variiert.

Definition 1.37 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte Kurve. Die Krümmung von c ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \kappa : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \kappa(t) := \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3}. \end{aligned}$$

Beachte, dass die Krümmung wohldefiniert und C^∞ ist.

Beispiele 1.38

1. Sei $c(t) := p + tv$, wobei $p, v \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq 0$. Wegen $c'(t) = v$ für alle t gilt dann $c'' = 0$, und somit $\kappa = 0$.

2. Sei $c(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$. Wegen $n = -c$ und $c''(t) = \begin{pmatrix} -\sin \\ \cos \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} = -c(t)$ gilt dann

$$\kappa(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix}}{1} = 1$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

3. Sei $c(t) := \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$, dann gilt $c'(t) = 2 \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$ und $c''(t) = 4 \begin{pmatrix} -\cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix}$. Somit ist die Krümmung von c gegeben durch

$$\kappa(t) = \frac{8 \det \begin{pmatrix} -\sin(2t) & -\cos(2t) \\ \cos(2t) & -\sin(2t) \end{pmatrix}}{8} = 1$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

4. Für feste $p \in \mathbb{R}^2$ und $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $c(t) := p + \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \cos(kt) \\ \sin(kt) \end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Anders ausgedrückt, c ist eine Parametrisierung nach Bogenlänge des Kreises mit Mittelpunkt p und Radius $\frac{1}{|k|}$, wobei der Kreis im positiven mathematischen Sinne durchlaufen wird falls $k > 0$ und im negativen mathematischen Sinne falls $k < 0$. Wegen $c'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(kt) \\ \cos(kt) \end{pmatrix}$ und $c''(t) = k \begin{pmatrix} -\cos(kt) \\ -\sin(kt) \end{pmatrix}$ gilt nach ähnlichen Rechnungen wie oben

$$\kappa(t) = k$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.39 Ist $\tilde{c} = c \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ orientierungserhaltende Umparametrisierung einer regulär parametrisierten Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, so gilt für die entsprechenden Krümmungen die Beziehung

$$\tilde{\kappa} = \kappa \circ \varphi.$$

Beweis: Nach der Kettenregel gelten für alle $t \in J$

$$\begin{aligned}\tilde{c}'(t) &= \varphi'(t)c'(\varphi(t)) \\ \tilde{c}''(t) &= \varphi'(t)^2c''(\varphi(t)) + \varphi''(t)c'(\varphi(t)).\end{aligned}$$

Daraus folgt für alle $t \in J$:

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}(t) &= \frac{\det(\tilde{c}'(t), \tilde{c}''(t))}{\|\tilde{c}'(t)\|^3} \\ &= \frac{\det\left(\varphi'(t)c'(\varphi(t)), \varphi'(t)^2c''(\varphi(t)) + \varphi''(t)c'(\varphi(t))\right)}{\|\varphi'(t)c'(\varphi(t))\|^3} \\ &= \frac{1}{\varphi'(t)^3\|c'(\varphi(t))\|^3}\varphi'(t) \cdot \left\{ \varphi'(t)^2 \det\left(c'(\varphi(t)), c''(\varphi(t))\right) \right. \\ &\quad \left. + \varphi''(t) \underbrace{\det\left(c'(\varphi(t)), c'(\varphi(t))\right)}_0 \right\} \\ &= \frac{\det\left(c'(\varphi(t)), c''(\varphi(t))\right)}{\|c'(\varphi(t))\|^3} \\ &= \kappa(\varphi(t))\end{aligned}$$

wobei die Bilinearität und die Schiefsymmetrie der Determinante verwendet wurden. Dies beweist die Behauptung. \square

Bemerkung 1.40 Ist $\tilde{c} = c \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ orientierungsumkehrende Umparametrisierung einer regulär parametrisierten Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, so gilt für die entsprechenden Krümmungen $\tilde{\kappa} = -\kappa \circ \varphi$ (Übungsaufgabe).

Proposition 1.41 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und n das Normalenfeld zu c . Dann gilt

$$c'' = \kappa n.$$

Beweis: Wegen $\|c'(t)\|^2 = 1$ für alle $t \in I$ gilt beim Ableiten (und unter Verwendung der Produktregel)

$$\begin{aligned}0 &= (\|c'\|^2)'(t) \\ &= \langle c', c' \rangle'(t) \\ &= \langle c''(t), c'(t) \rangle + \langle c'(t), c''(t) \rangle \\ &= 2\langle c''(t), c'(t) \rangle,\end{aligned}$$

d.h. $\langle c''(t), c'(t) \rangle = 0$ für alle $t \in I$. Andererseits lässt sich jeder Vektor $w \in \mathbb{R}^2$ schreiben als

$$w = \langle w, c'(t) \rangle c'(t) + \langle w, n(t) \rangle n(t)$$

(dies folgt aus der Tatsache, dass $\{c'(t), n(t)\}$ eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^2 ist). Es gilt insbesondere für $w = c''(t)$:

$$\begin{aligned} c''(t) &= \underbrace{\langle c''(t), c'(t) \rangle}_0 c'(t) + \langle c''(t), n(t) \rangle n(t) \\ &= \langle c''(t), n(t) \rangle n(t). \end{aligned}$$

Das Einsetzen dieser Gleichung in die Definition der Krümmung liefert

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3} \\ &= \langle c''(t), n(t) \rangle \underbrace{\det(c'(t), n(t))}_1, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

1.2.2 Geometrische Interpretation der Krümmung

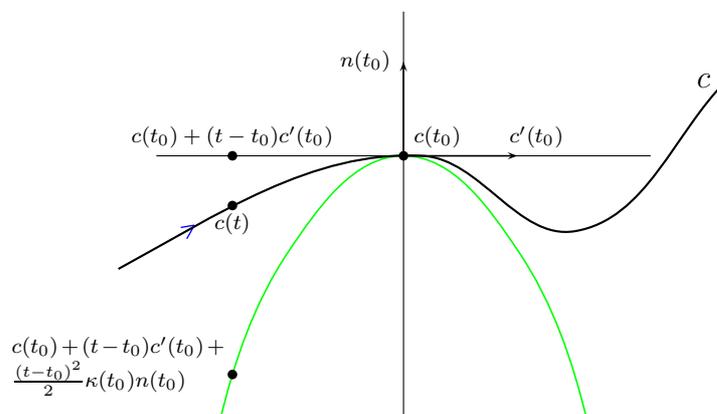
Proposition 1.42 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, n das Normalenfeld zu c und κ die Krümmung von c . Sei $t_0 \in I$. Dann gilt für alle $t \in I$:

$$c(t) = c(t_0) + (t - t_0)c'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}\kappa(t_0)n(t_0) + (t - t_0)^2\varepsilon(t - t_0),$$

wobei $\varepsilon(t - t_0) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0$.

Beweis: Entwickle c in t_0 bis um die zweite Ordnung und verwende die Definition von κ . □

Geometrische Interpretation:



Gilt $\kappa(t_0) > 0$ bzw. $\kappa(t_0) < 0$, so biegt c in Richtung des Normalenfelds bzw. in die andere Richtung. Andererseits betrachte die im Rahmen $\{c'(t_0), n(t_0)\}$ gegebene Abbildung:

$$t \longmapsto \left(t, \kappa(t_0) \frac{(t - t_0)^2}{2} \right).$$

Ihre Spur ist im Fall $\kappa(t_0) \neq 0$ eine Parabel (die tangential bis um mindestens die zweite Ordnung an der Kurve in t_0 liegt, siehe Abbildung oben), und je größer $|\kappa(t_0)|$ ist, desto stärker biegt diese Parabel. Insbesondere misst die Krümmung, wie stark sich eine Kurve biegt. Für eine andere aber ähnliche Interpretation mit dem sogenannten *Krümmungskreis*, siehe 9. Aufgabe im 3. Übungsblatt.

Bemerkung 1.43 Verschwindet die Krümmung von c in t_0 , so ist keine Aussage über die Gestalt der Kurve in der Nähe von $c(t_0)$ möglich! Betrachte z.B. $c(t) := \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$, wobei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ Funktion ist. Dann ist c regulär parametrisiert und eine kurze Rechnung liefert für die Krümmung von c

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{(1 + f'(t)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

für alle $t \in I$. Die Wahlen $f(t) = t^3$, $f(t) = \pm t^4$ oder $f(t) = 0$ liefern stets $\kappa(0) = 0$, die Kurven sehen aber jeweils ganz anders aus.

1.2.3 Die Frenet-Gleichungen

Satz 1.44 (Frenet-Gleichungen) Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, n das Normalenfeld zu c , und κ die Krümmung von c . Dann gilt

$$\begin{pmatrix} c' \\ n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c' \\ n \end{pmatrix},$$

d.h.,

$$\begin{cases} c'' &= \kappa n \\ n' &= -\kappa c'. \end{cases}$$

Beweis: Die Gleichung $c'' = \kappa n$ ist die Aussage von Proposition 1.41. Zur Zweiten: für alle $t \in I$ lässt sich $n'(t)$ schreiben als

$$n'(t) = \langle n'(t), c'(t) \rangle c'(t) + \langle n'(t), n(t) \rangle n(t)$$

(denn $\{c'(t), n(t)\}$ ist eine o.n.B. von \mathbb{R}^2). Wegen $c' \perp n$ gilt aber $\langle c', n \rangle = 0$ und dann beim Ableiten dieser Gleichung

$$0 = (\langle c', n \rangle)' = \langle c'', n \rangle + \langle c', n' \rangle,$$

woraus $\langle c', n' \rangle = -\langle c'', n \rangle = -\kappa$ folgt. Analog gilt wegen $\|n\|^2 = 1$

$$0 = (\|n\|^2)' = 2\langle n, n' \rangle,$$

d.h., $\langle n', n \rangle = 0$. Die zweite Gleichung ist damit bewiesen. \square

1.2.4 Der Hauptsatz der Theorie der ebenen Kurven

Erinnerung:

- Eine *euklidische Bewegung* in \mathbb{R}^n ist eine Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Form

$$F(x) := B(x) + b,$$

wobei B ein orthogonaler Endomorphismus von \mathbb{R}^n ist (d.h., $\langle B(x), B(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$; die orthogonalen Endomorphismen von \mathbb{R}^n bilden eine Untergruppe der Gruppe der invertierbaren Endomorphismen von \mathbb{R}^n , die üblicherweise *orthogonale Gruppe* genannt und mit O_n bezeichnet wird) und b ein Vektor aus \mathbb{R}^n ist. Beachte, dass diese Darstellung für F wohl eindeutig ist.

- Eine euklidische Bewegung in \mathbb{R}^n heißt genau dann *orientierungserhaltend*, wenn $\det(B) > 0$ gilt, d.h., wenn $\det(B) = 1$ gilt (denn $\det(B) = 1$ oder -1 für alle $B \in O_n$, was aus der Gleichung $B^*B = \text{Id}$ folgt). Die Menge der $B \in O_n$ mit $\det(B) = 1$ ist eine Untergruppe von O_n , die üblicherweise *spezielle orthogonale Gruppe* genannt und mit SO_n bezeichnet wird.
- Eine euklidische Bewegung in \mathbb{R}^n heißt genau dann *orientierungsumkehrend*, wenn $\det(B) < 0$ gilt, d.h., wenn $\det(B) = -1$ gilt.

Proposition 1.45 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte Kurve. Sei F eine orientierungserhaltende euklidische Bewegung vom \mathbb{R}^2 . Setze $\tilde{c} := F \circ c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Dann ist \tilde{c} ebenfalls eine regulär parametrisierte Kurve und es gilt für ihre Krümmung

$$\tilde{\kappa} = \kappa.$$

Beweis: Schreibe $F(x) = B(x) + b$ für ein $B \in SO_2$ und ein $b \in \mathbb{R}^2$. Wegen $\tilde{c}(t) = B(c(t)) + b$ für alle $t \in I$ gilt beim Ableiten

$$\tilde{c}' = B \circ c' \quad \text{und} \quad \tilde{c}'' = B \circ c''.$$

Aus der Injektivität von B folgt, dass \tilde{c} auch regulär parametrisiert ist. Für die Krümmung gilt dann, für alle $t \in I$,

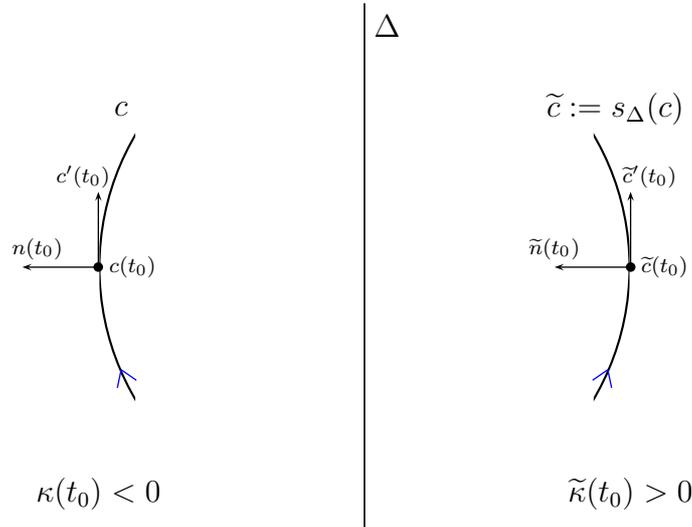
$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}(t) &= \frac{\det(\tilde{c}'(t), \tilde{c}''(t))}{\|\tilde{c}'(t)\|^3} \\ &= \frac{\det(B(c'(t)), B(c''(t)))}{\|B(c'(t))\|^3} \\ &= \det(B) \cdot \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3} \\ &= \kappa(t), \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Bemerkung 1.46 Ist F orientierungsumkehrende euklidische Bewegung, so gilt in den gleichen Bezeichnungen

$$\tilde{\kappa} = -\kappa.$$

Dies kann man schon an einem Beispiel sehen (die unten abgebildete Kurve c ist nach Bogenlänge parametrisiert):



Satz 1.47 (Hauptsatz der Theorie der ebenen Kurven) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Funktion. Dann existiert eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Krümmung

$$\kappa = f.$$

Diese nach Bogenlänge parametrisierte Kurve ist bis auf Dahinterschaltung von orientierungserhaltenden euklidischen Bewegungen eindeutig: sind c und \tilde{c} Lösungen (d.h., $\kappa = \tilde{\kappa} = f$), so existiert eine eindeutige orientierungserhaltende euklidische Bewegung F mit $\tilde{c} = F \circ c$.

Beweis: Durch Anwendung des folgenden wichtigen Satzes aus der Theorie der Differentialgleichungen werden separat die Existenz und die Eindeutigkeit von c bis auf Dahinterschaltung orientierungserhaltender euklidischer Bewegungen bewiesen:

Satz: Sei $A : I \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$ eine C^∞ -Abbildung, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Seien $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert genau eine C^∞ -Abbildung $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ s.d.

$$\begin{cases} y'(t) &= A(t)y(t) \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ den (endlich-dimensionalen) Vektorraum aller Endomorphismen von \mathbb{R}^n (für jedes $t \in I$ ist $A(t)$ eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$). Für einen Beweis, siehe z.B. [2] oder [6, Kap. 8].

Vorüberlegung: Wenn c existieren würde, dann würde entsprechend c' und n die Frenet-Gleichungen (Satz 1.44) erfüllen. Die Krümmung muss aber f sein, die Frenet-Gleichungen müssen also folgendermaßen aussehen:

$$\begin{cases} c'' &= f n \\ n' &= -f c', \end{cases}$$

was nichts anderes als eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung in (c', n) ist. Nach dem obigen Satz besitzt aber jede lineare Differentialgleichung 1. Ordnung eine globale Lösung, die eindeutig bestimmt wird durch ihren Wert an einem festen Zeitpunkt. Die Strategie ist also: löse diese Differentialgleichung (mit "guten" - aber festzulegenden - Anfangsbedingungen) und bekomme dann insbesondere c' ; integriere dann wieder und bekomme c .

Zur Existenz: Sei $t_0 \in I$ fest. Löse die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

d.h.,

$$\begin{cases} v' &= f w \\ w' &= -f v, \end{cases}$$

(wobei $v, w : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Unbekannten sind) mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} v(t_0) &:= e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ w(t_0) &:= e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Da diese Differentialgleichung linear ist, existiert nach dem obigen Satz eine eindeutige C^∞ Lösung $(v, w) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Jetzt wollen wir zeigen, dass für jedes t die Familie $\{v(t), w(t)\}$ (die "Kandidatin" für $\{c'(t), n(t)\}$ ist) eine p.o.n.B. von \mathbb{R}^2 bildet. Beim Ableiten kommt heraus:

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle' &= 2\langle v', v \rangle \stackrel{(1.1)}{=} 2f\langle v, w \rangle \\ \langle w, w \rangle' &= 2\langle w', w \rangle \stackrel{(1.1)}{=} -2f\langle v, w \rangle \\ \langle v, w \rangle' &= \langle v', w \rangle + \langle v, w' \rangle \stackrel{(1.1)}{=} f(\langle w, w \rangle - \langle v, v \rangle), \end{aligned}$$

insbesondere gilt $(\langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle)' = 0$ und

$$\begin{pmatrix} \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle \\ \langle v, w \rangle \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 4f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle \\ \langle v, w \rangle \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung auf \mathbb{R}^2 . Es gilt aber

$$\begin{cases} (\langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle)(t_0) &= \|e_1\|^2 - \|e_2\|^2 = 0 \\ \langle v, w \rangle(0) &= \langle e_1, e_2 \rangle = 0, \end{cases}$$

so dass, wiederum durch Anwendung des obigen Satzes (diesmal auf das System (1.2)),

$$\begin{pmatrix} \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle \\ \langle v, w \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt auf I . Zusammen mit $(\langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle)' = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \|v(t)\| &= \|e_1\| = 1 \\ \|w(t)\| &= \|e_2\| = 1 \\ \langle v(t), w(t) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

für alle $t \in I$, d.h., $v(t), w(t)$ bilden eine o.n.B. von \mathbb{R}^2 für jedes $t \in I$. Ferner gilt

$$\det(v(t), w(t)) = 1 \quad \forall t \in I,$$

weil die Funktion $t \mapsto \det(v(t), w(t))$ stetig ist, ihre Werte in $\{-1, 1\}$ hat, I Intervall ist, und $\det(v(t_0), w(t_0)) = 1$. Somit haben wir bewiesen, dass für jedes $t \in I$ die Familie $\{v(t), w(t)\}$ eine p.o.n.B. von \mathbb{R}^2 ist.

Setze nun, für alle $t \in I$,

$$c(t) := \int_{t_0}^t v(s) ds.$$

Die Abbildung $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist C^∞ , und es gilt: $c(t_0) = 0$, $c' = v$ (wegen $\|v\| = 1$ ist insbesondere c nach Bogenlänge parametrisiert) und $c'' = v' = fw$. Es gilt aber $w = n$, weil die Familie $\{v(t), w(t)\}$ für alle $t \in I$ eine p.o.n.B. von \mathbb{R}^2 ist. Daraus folgt

$$c'' = fn,$$

d.h., die Krümmung von c ist gleich f . Die Existenz von c ist damit bewiesen.

Zur "Eindeutigkeit": Wie betrachten zwei Fälle.

1. *Fall*: Seien zuerst c und \tilde{c} nach Bogenlänge parametrisierte Kurven mit Krümmung $\kappa = \tilde{\kappa} = f$ und $c(t_0) = \tilde{c}(t_0)$, $c'(t_0) = \tilde{c}'(t_0)$ (daraus folgt, dass auch $n(t_0) = \tilde{n}(t_0)$ gilt). Nach den Frenet-Gleichungen gilt dann:

$$\begin{pmatrix} c' - \tilde{c}' \\ n - \tilde{n} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c' - \tilde{c}' \\ n - \tilde{n} \end{pmatrix},$$

mit $(c' - \tilde{c}')(t_0) = (n - \tilde{n})(t_0) = 0$. Durch Anwendung des obigen Satzes bekommen wir dann $c' - \tilde{c}' = n - \tilde{n} = 0$ auf I , und daher, für alle $t \in I$,

$$\begin{aligned} \tilde{c}(t) &= \tilde{c}(t_0) + \int_{t_0}^t \tilde{c}'(s) ds \\ &= \tilde{c}(t_0) + \int_{t_0}^t c'(s) ds \\ &= c(t_0) + \int_{t_0}^t c'(s) ds \\ &= c(t), \end{aligned}$$

d.h., $c = \tilde{c}$.

2. *Fall*: Im Allgemeinen Fall seien c, \tilde{c} nach Bogenlänge parametrisierte Kurven mit

Krümmung $\kappa = \tilde{\kappa} = f$. Sei $t_0 \in I$ fest. Sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x) := B(x) + b$, definiert durch

$$\begin{cases} F(c(t_0)) &= \tilde{c}(t_0) \\ B(c'(t_0)) &= \tilde{c}'(t_0) \\ B(n(t_0)) &= \tilde{n}(t_0). \end{cases}$$

Dann ist F wohldefinierte euklidische Bewegung von \mathbb{R}^2 (insbesondere gilt $b = \tilde{c}(t_0) - c(t_0)$) [Übungsaufgabe: warum ist F wohldefiniert und warum ist F orientierungserhaltende euklidische Bewegung von \mathbb{R}^2 ?]. Nach Proposition 1.45 gilt

$$\kappa_{F \circ c} = \kappa = f,$$

und der 1. Fall angewandt auf $F \circ c$ und \tilde{c} liefert $F \circ c = \tilde{c}$. Jede Lösung \tilde{c} lässt sich also durch Dahinterschaltung einer orientierungserhaltenden euklidischen Bewegung auf c herleiten. Die Eindeutigkeit von c in diesem Sinne ist damit bewiesen. \square

Bemerkung 1.48 Tatsächlich gibt es eine explizite Formel, die jede ebene nach Bogenlänge parametrisierte Kurve durch ihre Krümmung beschreibt. Seien I, f wie im Satz 1.47 und seien $t_0 \in I, p, v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = 1$ fest. Schreibe $v = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) \end{pmatrix}$ für ein $\theta_0 \in \mathbb{R}$ (die reelle Zahl θ_0 ist nur bis auf ein ganzes Vielfaches von 2π festgelegt). Dann ist die eindeutige ebene nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{cases} \kappa &= f \\ c(t_0) &= p \\ c'(t_0) &= v \end{cases}$$

gegeben durch

$$c(t) = p + \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} \cos(\theta_0 + \int_{t_0}^s f(u) du) \\ \sin(\theta_0 + \int_{t_0}^s f(u) du) \end{pmatrix} ds. \quad (1.3)$$

(Übungsaufgabe: Beweisen Sie die Eindeutigkeit von c und überprüfen Sie, ob das angegebene c alle verlangten Bedingungen erfüllt.) Diese Formel kommt daher, dass in diesem Fall die Frenet-Gleichungen *explizit* integriert werden können. Dies ist mit den entsprechenden Frenet-Gleichungen von Raumkurven zu vergleichen, wofür jene allgemeine explizite Integration unmöglich ist.

Wir haben schon in den Beispielen 1.38 zwei Beispiele von ebenen Kurven mit konstanter Krümmung gesehen; im Wesentlichen sind sie die Einzigen.

Proposition 1.49 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Angenommen, die Krümmung κ von c sei konstant.

1. Ist $\kappa = 0$, so ist c der Form $c(t) = p + tv$ mit $p, v \in \mathbb{R}^2$ und $\|v\| = 1$ (die Spur von $[c]$ ist insbesondere eine Geradenstrecke),
2. Ist $\kappa \neq 0$, so ist c der Form

$$c(t) = p + \frac{1}{\kappa} \begin{pmatrix} \cos(\kappa t + \theta_0) \\ \sin(\kappa t + \theta_0) \end{pmatrix}$$

für ein $p \in \mathbb{R}^2$ und ein $\theta_0 \in \mathbb{R}$ (die Spur von $[c]$ ist insbesondere ein Kreisbogen von Radius $\frac{1}{|\kappa|}$ um p).

Beweis: Unmittelbare Folgerung aus (1.3). □

1.2.5 Umlaufzahl und Totalkrümmung

In diesem Abschnitt wollen wir *globale* Eigenschaften ebener Kurven untersuchen.

Lemma 1.50 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann existiert eine C^∞ -Funktion $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ s.d. für alle $t \in I$ gilt

$$c'(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix}.$$

Ferner, ist $\tilde{\theta} : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine andere C^∞ -Funktion mit $c'(t) = \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\theta}(t)) \\ \sin(\tilde{\theta}(t)) \end{pmatrix}$ für alle t , so existiert ein eindeutiges $k \in \mathbb{Z}$ s.d.

$$\tilde{\theta} = \theta + 2k\pi$$

auf I gilt.

Beweis: Wegen $\|c'\| = 1$ kann c' als Abbildung nach $S^1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$ aufgefasst werden. Sei

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es ist zu zeigen, dass eine C^∞ -Funktion $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ so existiert, dass

$$\pi \circ \theta = c'$$

gilt. Anders ausgedrückt: es existiert eine C^∞ -Funktion $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R} & \\ & \nearrow \theta & \downarrow \pi \\ I & \xrightarrow{c'} & S^1 \end{array}$$

Zur Eindeutigkeit: Angenommen, es gelte

$$\begin{pmatrix} \cos(\tilde{\theta}(t)) \\ \sin(\tilde{\theta}(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in I$. Dann gibt es zu jedem $t \in I$ ein eindeutiges $k(t) \in \mathbb{Z}$ s.d. $\tilde{\theta}(t) = \theta(t) + 2k(t)\pi$. Da aber die Funktion $\tilde{\theta} - \theta$ auf dem Intervall I stetig ist und ihre Werte in $2\pi\mathbb{Z}$ annimmt, muss sie *konstant* auf I sein, d.h., es existiert ein eindeutiges $k \in \mathbb{Z}$ s.d.

$$\tilde{\theta} = \theta + 2k\pi$$

gilt, was insbesondere die zweite Aussage im Lemma beweist.

Zur Existenz: Wir geben zwei Beweise an. Der erste ist recht kurz: wähle $t_0 \in I$, schreibe $c'(t_0) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) \end{pmatrix}$ für ein $\theta_0 \in \mathbb{R}$ (dies ist möglich wegen $\|c'(t_0)\| = 1$) und setze

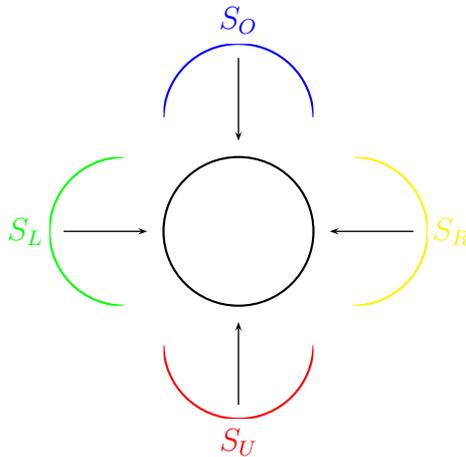
$$\theta(t) := \theta_0 + \int_{t_0}^t \kappa(s) ds$$

für alle $t \in I$. Die Abbildung θ ist offenbar C^∞ auf I . Aus (1.3) folgt, dass $c'(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$ gilt, für alle $t \in I$. Dies zeigt die Existenz von θ .

Im zweiten Beweis betrachten wir zwei Fälle.

1. *Fall:* Angenommen, die Menge $c'(I)$ sei in einem der folgenden offenen Halbkreise enthalten:

$$\begin{aligned} S_R &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in S^1, |x_1 > 0 \right\} & S_L &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in S^1, |x_1 < 0 \right\} \\ S_O &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in S^1, |x_2 > 0 \right\} & S_U &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in S^1 | x_2 < 0 \right\}. \end{aligned}$$



O.B.d.A. sei $c'(I) \subset S_R$, d.h. es gilt $c'_1 > 0$ auf I . Setze dann

$$\theta := \arcsin(c'_2).$$

Dann ist θ eine C^∞ -Funktion auf I und wegen $c'_1 = \sqrt{1 - (c'_2)^2}$ ($c'_1 > 0$) gilt

$$c'(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in I$. Aus der obigen Überlegung über Eindeutigkeit folgt, dass jedes andere $\tilde{\theta}$ der Form $\theta + 2k\pi$ ist für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dies zeigt insbesondere, dass sogar unter der Annahme, dass $\tilde{\theta}$ stetig ist, ist dann $\tilde{\theta}$ automatisch C^∞ .

2. *Fall:* Im Allgemeinen kann man nicht voraussetzen, dass $c'(I) \subset S_R$ bzw. S_L, S_O , oder S_U . Seien $t_0 < t_1$ in I fest. Dann existiert eine Teilung $\{t_0 =: s_0 < s_1 < \dots < s_N := t_1\}$ von $[t_0, t_1]$ so, dass für alle $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ die Menge $c'([s_i, s_{i+1}])$ in genau einem der offenen Halbkreise S_R, S_L, S_O, S_U enthalten ist. Die Existenz dieser Teilung folgt aus der Gleichmäßigstetigkeit von c' auf dem kompakten Intervall $[t_0, t_1]$. Wende den 1. Fall auf $c'_{|[s_0, s_1]}$ an: es existiert eine C^∞ -Funktion $\theta_0 : [s_0, s_1] \rightarrow \mathbb{R}$ s.d. $c'(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0(t)) \\ \sin(\theta_0(t)) \end{pmatrix}$ für alle $t \in [s_0, s_1]$ gilt. Wende dann wiederum den 1. Fall auf $c'_{|[s_1, s_2]}$ an mit der Bedingung $\theta_1(s_1) = \theta_0(s_1)$ ($\theta_1 : [s_1, s_2] \rightarrow \mathbb{R}$ wird die Funktion, die man aus dem 1. Fall bekommt). Rekursiv wende den 1. Fall auf $c'_{|[s_i, s_{i+1}]}$ mit der Bedingung $\theta_i(s_i) = \theta_{i-1}(s_i)$, und bekomme am Ende eine *stetige* Funktion

$$\theta : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R},$$

die durch $\theta_{|[s_i, s_{i+1}]} := \theta_i$ definiert ist. Die Funktion θ erfüllt

$$c'(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [t_0, t_1]$, da die θ_i 's diese Eigenschaft besitzen. Eine solche Funktion θ ist auch notwendigerweise C^∞ (siehe 1. Fall). Dies gilt für alle $t_0 < t_1$ in I . Durch wiederholte Anwendung der Eindeutigkeit wird damit die Existenz von θ auf I bewiesen. \square

Bemerkung 1.51 Die Funktion θ aus Lemma 1.50 ist insbesondere eindeutig durch ihren Wert in einem Punkt festgelegt. Sind nämlich θ und $\tilde{\theta}$ zwei solche Funktionen für c mit $\theta(t_0) = \tilde{\theta}(t_0)$ für ein gegebenes $t_0 \in I$, so gibt es nach der Eindeutigkeitsaussage aus Lemma 1.50 ein (notwendigerweise eindeutiges) $k \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{\theta} - \theta = 2k\pi$ auf I . In $t = t_0$ gilt dann $0 = 2k\pi$, woraus $k = 0$ und somit $\tilde{\theta} = \theta$ folgen.

Definition 1.52 Sei c eine T -periodische nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve. Die Umlaufzahl von c ist definiert durch

$$n_c := \frac{\theta(T) - \theta(0)}{2\pi},$$

wobei $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Funktion ist mit $c'(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Bemerkungen 1.53

1. Die reelle Zahl n_c ist wohldefiniert, denn: eine solche Funktion θ existiert nach Lemma 1.50, und n_c hängt auch nicht von der Wahl eines solchen θ ab, denn ist $\tilde{\theta}$ ein anderes solches θ , so existiert nach Lemma 1.50 ein (eindeutiges) $k \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{\theta} = \theta + 2k\pi$, somit gilt

$$\tilde{\theta}(T) - \tilde{\theta}(0) = \theta(T) - \theta(0).$$

2. Die Zahl n_c ist eine ganze Zahl wegen der Periodizität von c . Ist nämlich c (regulär parametrisiert und) periodisch mit Periode T , so ist auch c' periodisch mit Periode T (*Übungsaufgabe*), insbesondere gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta(t+T)) \\ \sin(\theta(t+T)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass $\theta(t+T) - \theta(t) \in 2\pi\mathbb{Z}$ gilt für alle $t \in \mathbb{R}$, insbesondere liegt n_c in \mathbb{Z} .

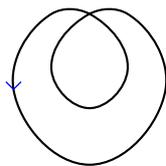
3. Wie bereits im Beweis von Lemma 1.50 bemerkt wurde ist die Funktion $t \mapsto \theta(t+T) - \theta(t)$ stetig und nimmt ihre Werte in $2\pi\mathbb{Z}$ an, was eine diskrete Teilmenge von \mathbb{R} ist. Daraus folgt, dass diese Funktion konstant sein muss. Insbesondere gilt

$$n_c = \frac{\theta(r+T) - \theta(r)}{2\pi}$$

für alle $r \in \mathbb{R}$.

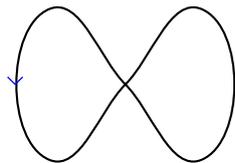
Beispiele 1.54

1. Sei $c(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, dann ist $\theta(t) = t + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt für die Umlaufzahl: $n_c = 1$.
2. Sei $c(t) := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$, dann ist $\theta(t) = 2t + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Da die Periode von c diesmal π gleicht, gilt für die Umlaufzahl auch $n_c = 1$.
- 3.



$$n_c = 2$$

- 4.



$$n_c = 0$$

Lemma 1.55 Sei \tilde{c} eine Umparametrisierung nach Bogenlänge einer periodischen nach Bogenlänge parametrisierten ebenen Kurve c .

1. Ist \tilde{c} orientierungserhaltende Umparametrisierung von c , so gilt für die Umlaufzahlen $n_{\tilde{c}} = n_c$.
2. Ist \tilde{c} orientierungsumkehrende Umparametrisierung von c , so gilt für die Umlaufzahlen $n_{\tilde{c}} = -n_c$.

Beweis: Aus Proposition 1.21 folgt, dass ein $r \in \mathbb{R}$ existiert mit $\tilde{c}(t) = c(t+r)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (im Fall, wo \tilde{c} orientierungserhaltende Umparametrisierung von c ist) oder $\tilde{c}(t) = c(-t+r)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (im Fall, wo \tilde{c} orientierungsumkehrende Umparametrisierung von c ist). Hat insbesondere c Periode T , so hat auch \tilde{c} Periode T . Wie oben bezeichnen wir mit $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ Funktion s.d. $c'(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

1. Wegen $\tilde{c}'(t) = c'(t+r)$ definiert $\tilde{\theta}(t) := \theta(t+r)$ eine C^∞ Funktion $\tilde{\theta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{c}'(t) = \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\theta}(t)) \\ \sin(\tilde{\theta}(t)) \end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach Bemerkung 1.53.3 folgt für die Umlaufzahl von \tilde{c} :

$$n_{\tilde{c}} = \frac{\tilde{\theta}(T) - \tilde{\theta}(0)}{2\pi} = \frac{\theta(T+r) - \theta(r)}{2\pi} = n_c.$$

2. Wegen $\tilde{c}'(t) = -c'(-t+r)$ definiert $\tilde{\theta}(t) := \theta(-t+r) + \pi$ eine C^∞ Funktion $\tilde{\theta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{c}'(t) = \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\theta}(t)) \\ \sin(\tilde{\theta}(t)) \end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach Bemerkung 1.53.3 folgt für die Umlaufzahl von \tilde{c} :

$$n_{\tilde{c}} = \frac{\tilde{\theta}(T) - \tilde{\theta}(0)}{2\pi} = \frac{\theta(-T+r) - \theta(r)}{2\pi} = \frac{\theta(0) - \theta(T)}{2\pi} = -n_c.$$

□

Lemma 1.55 motiviert folgende Definition.

Definition 1.56 Sei $[c]$ eine orientierte geschlossene ebene Kurve. Die Umlaufzahl von $[c]$ ist definiert als die Umlaufzahl einer (orientierten) Parametrisierung nach Bogenlänge von $[c]$ und wird mit $n_{[c]}$ bezeichnet.

Bemerkung 1.57 Sind \hat{c} und \tilde{c} zwei orientierte Parametrisierungen nach Bogenlänge von $[c]$, so gilt nach Lemma 1.55 $n_{\hat{c}} = n_{\tilde{c}}$. Somit ist $n_{[c]}$ wohldefiniert.

Satz 1.58 (Umlaufsatz) Jede orientierte einfach geschlossene ebene Kurve hat Umlaufzahl 1 oder -1 .

Der Beweis von Satz 1.58 beruht auf ein allgemeines Lemma aus der mengentheoretischen Topologie.

Lemma 1.59 Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer und sternförmig bezüglich eines $x_0 \in X$ (d.h., $\forall x \in X$ gilt $(1-t)x_0 + tx \in X$ für alle $t \in [0, 1]$). Sei $F : X \rightarrow S^1$ stetige Abbildung. Sei $\theta_0 \in \mathbb{R}$ mit $F(x_0) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) \end{pmatrix}$. Dann existiert es eine eindeutige stetige Abbildung $\theta : X \rightarrow \mathbb{R}$ s.d. $F(x) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(x)) \\ \sin(\theta(x)) \end{pmatrix}$ für alle $x \in X$ und $\theta(x_0) = \theta_0$.

Beweis: Wir betrachten zwei Fälle.

1. Sei $n = 1$ und $X = I$ (Intervall). Da wurde die Aussage i.W. im Lemma 1.50 bewiesen, mit dem Unterschied, dass hier c nur stetig vorausgesetzt wird. Der Beweis lässt sich aber wortwörtlich zum Fall stetiger Kurven übertragen. Zuerst folgt die Eindeutigkeit von θ aus der Tatsache, dass jede auf einem Intervall definierte stetige Funktion mit Werten in einer diskreten Menge konstant ist. Die Existenz folgt aus einer ähnlichen Konstruktion wie im Beweis von Lemma 1.50: für ein festes $x_1 \in I$ mit $x_0 < x_1$ (der Fall $x_1 < x_0$ ist analog) zerlege $[x_0, x_1] = \bigcup_{0 \leq j \leq m-1} [s_j, s_{j+1}]$ mit $x_0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = x_1$ und s.d. $F([s_j, s_{j+1}]) \subset S_O$ oder $\subset S_U, S_L, S_R$ gilt (siehe Beweis von Lemma 1.50). Mit Hilfe von \arccos oder \arcsin bestimme θ auf $[s_0, s_1]$ mit $\theta(s_0) = \theta_0$ und setze θ sukzessiv auf $[s_j, s_{j+1}]$ fort mit Stetigkeitsbedingung in s_j . Man bekommt ein stetiges θ auf $[x_0, x_1]$. Da dies für alle x_1 gilt, ist θ auf ganz I definiert.
2. Sei $n \geq 1$ beliebig und $X \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig bzgl. $x_0 \in X$. Wir konstruieren θ mit Hilfe des 1. Falls. Für ein beliebiges $x \in X$ liegt nach Voraussetzung die Strecke $[x_0, x] := \{(1-t)x_0 + tx \mid t \in [0, 1]\}$ in X . Definiere

$$\begin{aligned} F_x : [0, 1] &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto F((1-t)x_0 + tx). \end{aligned}$$

Dann ist F_x stetig. Nach dem 1. Fall existiert ein eindeutiges stetiges $\theta_x : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $F_x(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_x(t)) \\ \sin(\theta_x(t)) \end{pmatrix}$ für alle $t \in [0, 1]$ und $\theta_x(0) = \theta_0$. Erfüllt ferner $\theta : X \longrightarrow \mathbb{R}$ die gewünschten Bedingungen, so erfüllt die stetige Funktion $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \theta((1-t)x_0 + tx)$ die Bedingung

$$F_x(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta((1-t)x_0 + tx)) \\ \sin(\theta((1-t)x_0 + tx)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_x(t)) \\ \sin(\theta_x(t)) \end{pmatrix}$$

mit $\theta(x_0) = \theta_0 = \theta_x(0)$; die Eindeutigkeit aus dem 1. Fall impliziert dann

$$\theta((1-t)x_0 + tx) = \theta_x(t)$$

für alle $t \in [0, 1]$. Somit ist die Eindeutigkeit bewiesen.

Zum Beweis der Existenz zeigen wir nun, dass die Abbildung $X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow \theta_x(1)$, stetig ist. Wegen

$$F(x) = F_x(1) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_x(1)) \\ \sin(\theta_x(1)) \end{pmatrix}$$

und $\theta_{x_0}(1) = \theta_0$ wird damit der Beweis von Lemma 1.59 abgeschlossen. Lege $x \in X$ fest sowie $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Teilung $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ s.d. für alle $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ gilt $F_x([s_j, s_{j+1}]) \subset S_O$ oder S_U, S_R, S_L . Wegen der Stetigkeit von F auf X ist $(t, x) \mapsto F_x(t)$ *gleichmäßig stetig* auf $[0, 1] \times K$, für jedes Kompaktum $K \subset X$ mit $x \in K$. Daraus folgt, dass eine Umgebung U von x in X so existiert, dass $\|F_x(t) - F_y(t)\| < \varepsilon$ gilt für alle $y \in U$ und alle $t \in [0, 1]$. Desweiteren können ε und U so gewählt werden, dass $F_y([s_j, s_{j+1}])$ im selben offenen Halbkreis liegt wie $F_x([s_j, s_{j+1}])$ für alle $y \in U$ und alle $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Schreibe nun $F_y(t) = \begin{pmatrix} (F_y(t))_1 \\ (F_y(t))_2 \end{pmatrix}$ und $F(y) = \begin{pmatrix} (F(y))_1 \\ (F(y))_2 \end{pmatrix}$. Dann gibt es für jedes $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$

ein $k_j \in \mathbb{Z}$ s.d. für alle $y \in U$ und $t \in [0, 1]$ gilt entweder $\theta_y(t) = \arcsin((F_y(t))_2) + 2k_j\pi$ (im Fall $F_y([s_j, s_{j+1}]) \subset S_R$) oder $\theta_y(t) = \pi - \arcsin((F_y(t))_2) + 2k_j\pi$ (im Fall $F_y([s_j, s_{j+1}]) \subset S_L$) oder $\theta_y(t) = \arccos((F_y(t))_1) + 2k_j\pi$ (im Fall $F_y([s_j, s_{j+1}]) \subset S_0$) oder $\theta_y(t) = 2\pi - \arccos((F_y(t))_1) + 2k_j\pi$ (im Fall $F_y([s_j, s_{j+1}]) \subset S_U$). Insbesondere gilt $\theta_x(1) - \theta_y(1) = \arcsin((F_y(t))_2) - \arcsin((F_x(t))_2)$ (bzw. $\theta_x(1) - \theta_y(1) = -\arcsin((F_y(t))_2) + \arcsin((F_x(t))_2)$, $\theta_x(1) - \theta_y(1) = \arccos((F_y(t))_1) - \arccos((F_x(t))_1)$, $\theta_x(1) - \theta_y(1) = -\arccos((F_y(t))_1) + \arccos((F_x(t))_1)$ je nach Fall), was ein stetiger Ausdruck in y ist.

□

Beweis des Umlaufsatzes: Sei c periodische Parametrisierung nach Bogenlänge der Kurve und L ihre Länge (die dann mit der Periode von c übereinstimmt, siehe 5. Aufgabe im 2. Übungsblatt). Da die erste Koordinatenfunktion c_1 von c stetig auf dem kompakten Intervall $[0, L]$ ist, existiert es ein $t_0 \in [0, L]$ mit $c_1(t_0) = \max_{t \in [0, L]} (c_1(t))$. Bis auf eine Parametertransformation der Form $t \mapsto t + t_0$ kann angenommen werden, dass $t_0 = 0$ gilt. Wegen $c'_1(0) = 0$ gilt entweder $c'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $c'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bis auf eine Parametertransformation der Form $t \mapsto -t$ kann angenommen werden, dass $c'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2$ gilt. Setze

$$X := \left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq L \right\}.$$

Die Teilmenge X von \mathbb{R}^2 ist sternförmig bzgl. $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Definiere die Abbildung

$$F : X \longrightarrow S^1$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} \frac{c(t_2) - c(t_1)}{\|c(t_2) - c(t_1)\|} & \text{falls } t_2 > t_1 \text{ und } (t_1, t_2) \neq (0, L) \\ c'(t) & \text{falls } t_1 = t_2 = t \\ -c'(0) & \text{falls } (t_1, t_2) = (0, L). \end{cases}$$

Beachte, dass nach Voraussetzung an c die Abbildung F wohldefiniert ist.

Behauptung: die Abbildung F ist stetig.

Beweis der Behauptung: Auf $\left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \in X \mid t_2 > t_1 \text{ und } (t_1, t_2) \neq (0, L) \right\}$ ist F per Konstruktion stetig, auf der Diagonale $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \in X \right\}$ ist F per Definition der Ableitung stetig und im Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}$ ist F wegen

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0^+ \\ t_2 \rightarrow L^-}} \frac{c(t_2) - c(t_1)}{\|c(t_2) - c(t_1)\|} &= \lim_{t_1, t_2 \rightarrow 0^+} \frac{c(L - t_2) - c(t_1)}{\|c(L - t_2) - c(t_1)\|} \\ &= \lim_{t_1, t_2 \rightarrow 0^+} \frac{c(-t_2) - c(t_1)}{\|c(-t_2) - c(t_1)\|} \\ &= \frac{c'(0)}{\|c'(0)\|} \\ &= -c'(0) \end{aligned}$$

auch stetig.

Aus Lemma 1.59 folgt die Existenz einer stetigen Abbildung $\theta : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(x)) \\ \sin(\theta(x)) \end{pmatrix}$ für alle $x \in X$ und $\theta(x_0) = \frac{\pi}{2}$. Wegen $c'(t) = F(t, t)$ gilt für die Umlaufzahl von c die Identität

$$2\pi n_c = \theta(L, L) - \theta(0, 0) = \theta(L, L) - \theta(0, L) + \theta(0, L) - \theta(0, 0).$$

Behauptung: Es gelten $\theta(L, L) - \theta(0, L) = \theta(0, L) - \theta(0, 0) = \pi$.

Beweis der Behauptung: Betrachte die Abbildung $[0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto F(0, t)$. Würde $F(0, t) = e_1$ für ein $t \in]0, L[$ gelten, so würde es insbesondere ein $t \in]0, L[$ geben für welches $c_1(t) > c_1(0)$ gilt, Widerspruch zu $c_1(0) = \max_{t \in [0, L]} (c_1(t))$. Außerdem gelten $F(0, 0) = c'(0) = e_2 \neq e_1$ sowie $F(0, L) = -c'(0) = -e_2 \neq e_1$. Somit gilt $e_1 \notin F(0, [0, L])$, insbesondere $F(0, [0, L]) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_+ e_1$. Die Abbildung $f : [0, L] \rightarrow]0, 2\pi[$, $f(t) := \arg(F(0, t))$, ist daher auch wohldefiniert, stetig und erfüllt

$$\begin{pmatrix} \cos(f(t)) \\ \sin(f(t)) \end{pmatrix} = F(0, t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(0, t)) \\ \sin(\theta(0, t)) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0, L]$ mit $f(0) = \frac{\pi}{2} = \theta(0, 0)$; nach der Eindeutigkeit im Lemma 1.59 muss dann $f(t) = \theta(0, t)$ für alle $t \in [0, L]$ gelten. Daraus folgt

$$\theta(0, L) = \arg(F(0, L)) = \arg(-e_2) = \frac{3\pi}{2}$$

und $\theta(0, L) - \theta(0, 0) = \pi$. Analog zeige man, dass $-e_1 \notin F([0, L], L)$ und somit auch $\theta(L, L) - \theta(0, L) = \pi$ gelten.

Aus der letzten Behauptung folgt $2\pi n_c = 2\pi$, was zu beweisen war. □

Bemerkung 1.60 Es existieren geschlossene aber nicht einfach geschlossene ebene Kurven mit Umlaufzahl 1, siehe 17. Aufgabe im 5. Übungsblatt.

And now, something completely different würde mancher sagen:

Definition 1.61 Sei $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte periodische Kurve mit Periode $T > 0$. Die Totalkrümmung von c ist definiert durch

$$\int_0^T \kappa(t) dt.$$

Bemerkung 1.62 Da c periodisch mit Periode T ist, gilt auch für κ

$$\kappa(t + T) = \kappa(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, und somit, für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} \kappa(t) dt &= \int_{t_0}^0 \kappa(t) dt + \int_0^T \kappa(t) dt + \int_T^{t_0+T} \kappa(t) dt \\ &\stackrel{u:=t-T}{=} - \int_0^{t_0} \kappa(t) dt + \int_0^T \kappa(t) dt + \int_0^{t_0} \kappa(u+T) du \\ &= - \int_0^{t_0} \kappa(t) dt + \int_0^T \kappa(t) dt + \int_0^{t_0} \kappa(u) du \\ &= \int_0^T \kappa(t) dt, \end{aligned}$$

d.h., die Totalkrümmung kann auf einem beliebigen Intervall der Länge T berechnet werden.

Dies motiviert folgende Definition.

Definition 1.63 Die Totalkrümmung einer orientierten geschlossenen ebenen Kurve ist definiert als die Totalkrümmung einer orientierten Parametrisierung nach Bogenlänge der Kurve.

Die Totalkrümmung einer orientierten geschlossenen ebenen Kurve ist wohldefiniert, denn: zwei orientierte Parametrisierungen nach Bogenlänge einer orientierten Kurve unterscheiden sich um eine Parametertransformation der Form $t \mapsto t + r$ (für ein $r \in \mathbb{R}$, siehe Proposition 1.21) und Bemerkung 1.62 impliziert $\int_0^T \kappa(t) dt = \int_r^{T+r} \kappa(t) dt$.

Totalkrümmung und Umlaufzahl hängen eng zusammen:

Satz 1.64 Sei c eine T -periodische nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve mit Krümmung κ und Umlaufzahl n_c . Dann gilt:

$$2\pi n_c = \int_0^T \kappa(t) dt.$$

Beweis: Nach Lemma 1.50 existiert eine C^∞ -Funktion $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $c'(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Beim Ableiten kommt dann

$$c''(t) = \theta'(t) \begin{pmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

heraus für alle $t \in \mathbb{R}$. Andererseits gilt für alle t :

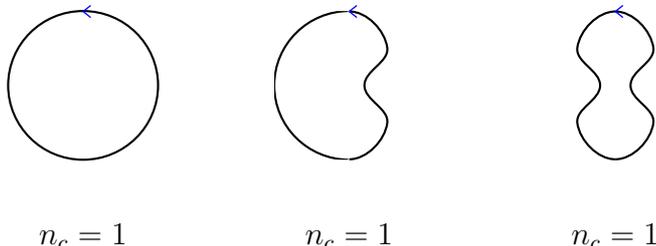
$$n(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix},$$

so dass $\kappa = \theta'$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \int_0^T \kappa(t) dt &= \int_0^T \theta'(t) dt \\ &= \theta(T) - \theta(0), \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Insbesondere bleibt die Totalkrümmung einer geschlossenen Kurve invariant, wenn wir ihr “Beulen” versetzen.



1.2.6 Die isoperimetrische Ungleichung

Erinnerung:

- Ein *Gebiet* in \mathbb{R}^n ist eine nichtleere offene *zusammenhängende* Teilmenge von \mathbb{R}^n , wobei “zusammenhängend” bedeutet, dass es außer \emptyset und Ω keine Teilmenge von Ω gibt, die gleichzeitig offen und abgeschlossen ist. Der Rand eines Gebiets Ω in \mathbb{R}^n wird mit $\partial\Omega$ bezeichnet (nach Definition gilt also $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$, wobei $\overline{\Omega}$ der Abschluss von Ω in \mathbb{R}^n ist). Der Rand von Ω heißt *glatt*, wenn er das Urbild eines regulären Werts einer glatten Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist, vgl. Korollar 2.22 aus Kapitel 2. Zu jedem glatten Rand eines beschränkten Gebiets existieren genau zwei glatte Einheitsnormalenfelder, das sogenannte *innere* und das sogenannte *äußere* Normalenfeld. Beide stehen “orthogonal” auf $\partial\Omega$, haben Länge 1, und das äußere zeigt nach “außen”. Falls glatt trägt der Rand eines Gebiets automatisch ein kanonisches Maß, vgl. Kapitel am Ende der Vorlesung.
- Ein *Vektorfeld* auf einem Gebiet Ω ist eine Abbildung $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die *Divergenz* eines differenzierbaren Vektorfeldes V auf Ω ist die Funktion $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\operatorname{div}(V) := -\sum_{j=1}^n \frac{\partial V_j}{\partial x_j}$, wobei $V = (V_1, \dots, V_n)$ (Zerlegung in der kanonischen Basis).

Der folgende Satz steht im Mittelpunkt des Beweises der isoperimetrischen Ungleichung (siehe z.B. [8]).

Satz 1.65 (Gauss’scher Divergenzsatz) *Seien Ω ein Gebiet mit glattem Rand in \mathbb{R}^n und $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 Vektorfeld. Sei $N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalenfeld zu Ω . Dann gilt*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(V) dx_1 \dots dx_n = - \int_{\partial\Omega} \langle V, N \rangle d\sigma,$$

wobei $d\sigma$ das kanonische Maß auf $\partial\Omega$ ist.

Satz 1.65 liefert eine Formel für die Berechnung des Flächeninhalts eines ebenen Gebiets.

Korollar 1.66 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein von einer einfach geschlossenen ebenen Kurve umschlossenes Gebiet. Sei c eine periodische Parametrisierung mit Periode T und mit $n_c = 1$ von $\partial\Omega$. Dann gilt:*

$$A[\Omega] = \frac{1}{2} \int_0^T \det(c(t), c'(t)) dt,$$

wobei $A[\Omega]$ den Flächeninhalt von Ω bezeichnet.

Beweis: Bemerke erstens, dass Ω wohl beschränkt ist. Dies folgt aus dem Satz von Jordan, der besagt, dass das Komplement jeder einfach geschlossenen ebenen Kurve in \mathbb{R}^2 genau zwei Zusammenhangskomponenten besitzt, von den eine beschränkt und eine unbeschränkt ist. Betrachte zweitens die Abbildung $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $V(x) := x$. Dann ist V ein C^1 Vektorfeld auf Ω und es gilt

$$\operatorname{div}(V) = -\frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = -2.$$

Ferner werden das äußere Einheitsnormalenfeld sowie das kanonische Maß von $\partial\Omega$ gegeben durch $N(c(t)) = -n(t)$ und $d\sigma = \|c'(t)\|dt$, wobei dt das Lebesgue-Maß auf \mathbb{R} ist. Aus Satz 1.65 folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(V) dx_1 dx_2 &= - \int_0^T \langle V(c(t)), N(c(t)) \rangle \|c'(t)\| dt \\ &= \int_0^T \langle c(t), n(t) \rangle \|c'(t)\| dt \\ &= \int_0^T \left\langle c(t), \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|} \right\rangle \|c'(t)\| dt \\ &= - \int_0^T \det(c(t), c'(t)) dt, \end{aligned}$$

und wegen $\int_{\Omega} \operatorname{div}(V) dx_1 dx_2 = -2 \int_{\Omega} dx_1 dx_2 = -2A[\Omega]$ ist damit die Identität bewiesen. \square

Bemerkungen 1.67

1. Partielle Integrationen liefern auch die Formeln (*Übungsaufgabe*)

$$A[\Omega] = \int_0^T c_1(t)c_2'(t)dt = - \int_0^T c_1'(t)c_2(t)dt,$$

wobei $c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$ für alle t .

2. Im Fall $n_c = -1$ gilt $A[\Omega] = -\frac{1}{2} \int_0^T \det(c(t), c'(t)) dt$ (*Übungsaufgabe*).

Satz 1.68 (Isoperimetrische Ungleichung) Sei Ω ein von einer einfach geschlossenen Kurve $[c]$ umschlossenes ebenes Gebiet. Dann gilt

$$L[c]^2 \geq 4\pi A[\Omega]. \tag{1.4}$$

Ferner ist (1.4) genau dann eine Gleichheit, wenn $[c]$ ein Kreis ist.

Die Kurve $[c]$ heißt Kreis, wenn sie eine Parametrisierung folgender Form besitzt: es gibt ein $p \in \mathbb{R}^2$, ein $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und ein $\theta_0 \in \mathbb{R}$ mit $c(t) = p + \frac{1}{\kappa} \begin{pmatrix} \cos(\kappa t + \theta_0) \\ \sin(\kappa t + \theta_0) \end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis der isoperimetrischen Ungleichung: Sei c Parametrisierung nach Bogenlänge der Randkurve mit $n_c = 1$ (bemerke, dass (1.4) nicht von der Orientierung von c abhängt). Setze $L := L[c]$. Definiere die Abbildung

$$\begin{aligned} z : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto x\left(\frac{L}{2\pi}t\right) + iy\left(\frac{L}{2\pi}t\right), \end{aligned}$$

wobei $c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung ist z periodisch mit Periode 2π . Betrachte die Fourier-Koeffizienten von z : setze, für alle $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z(t) e^{-ikt} dt \in \mathbb{C}.$$

Da $(e^{ikt})_{k \in \mathbb{Z}}$ eine vollständige Orthonormalbasis vom Hilbertraum $(L^2([0, 2\pi]), (\cdot, \cdot)_{L^2([0, 2\pi])})$ bildet, gelten

$$z = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt} \quad \text{und} \quad z' = \sum_{k \in \mathbb{Z}} ikc_k e^{ikt}. \quad (1.5)$$

Wir drücken nun L und $A[\Omega]$ durch die Fourier-Koeffizienten von z aus. Es gilt einerseits nach Definition von z

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |z'(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{L^2}{4\pi^2} \underbrace{\|c'(\frac{L}{2\pi}t)\|^2}_1 dt \\ &= \frac{L^2}{4\pi^2}, \end{aligned}$$

andererseits liefert (1.5) die Identität

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |z'(t)|^2 dt &= (z', z')_{L^2([0, 2\pi])} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |ikc_k|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2, \end{aligned}$$

woraus

$$L^2 = 4\pi^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2$$

folgt. Für den Flächeninhalt wenden wir Korollar 1.66 an: es gilt

$$\begin{aligned} A[\Omega] &= \frac{1}{2} \int_0^L \det(c(t), c'(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \Re e \left(i(x(t) + iy(t))(x'(t) - iy'(t)) \right) dt \quad (\text{setze } u := \frac{2\pi}{L}t) \\ &= \frac{1}{2} \Re e \left(\int_0^{2\pi} i \left(x\left(\frac{L}{2\pi}u\right) + iy\left(\frac{L}{2\pi}u\right) \right) \left(x'\left(\frac{L}{2\pi}u\right) - iy'\left(\frac{L}{2\pi}u\right) \right) \frac{L}{2\pi} du \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \Re \left(\int_0^{2\pi} iz(u) \overline{z'(u)} du \right) \\
&= \pi \Re((z, iz')_{L^2([0, 2\pi])}) \\
&\stackrel{(1.5)}{=} \pi \Re \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} ic_k \cdot (-ik\overline{c_k}) \right) \\
&= \pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} k |c_k|^2.
\end{aligned}$$

Es gilt aber

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k |c_k|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2,$$

somit ist (1.4) bewiesen. Die Gleichheit gilt in (1.4) genau dann, wenn die letzte Ungleichung eine Gleichheit ist, d.h., wenn $c_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ (denn $k^2 = k$ g.d.w. $k = 0$ oder 1). Dies ist genau dann der Fall, wenn $z(t) = c_0 + c_1 e^{it}$ gilt, d.h., wenn $[c]$ ein Kreis ist. \square

Geometrische Interpretation der isoperimetrischen Ungleichung: Gegeben sei eine positive reelle Zahl A . Dann sind die *kürzesten* einfach geschlossenen ebenen Kurven, die ein Gebiet von Flächeninhalt A umschließen, die Kreise von Radius $\sqrt{\frac{A}{\pi}}$. Anders ausgedrückt: sei eine positive reelle Zahl L gegeben, dann sind die *größten* ebenen Gebiete, die von einfach geschlossenen ebenen Kurven der Länge L umschlossen werden, die Kreisscheiben von Radius $\frac{L}{2\pi}$.

Beispiel 1.69 Kann ein 80qm-großes flaches Feld von einem 30m-langen Draht umzäunt werden? Nein! Denn es gilt: $\frac{30^2}{4\pi} = \frac{225}{\pi} < 80$, Widerspruch zur isoperimetrischen Ungleichung.

1.3 Raumkurven

Definition 1.70 Eine Raumkurve ist eine Kurve im \mathbb{R}^3 .

Wir behalten dieselben Bezeichnungen für das kanonische euklidische Skalarprodukt " $\langle \cdot, \cdot \rangle$ " und die kanonische Norm " $\| \cdot \|$ " auf \mathbb{R}^3 .

1.3.1 Krümmung

Definition 1.71 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und $t \in I$. Die Krümmung von c in t ist definiert durch

$$\kappa(t) := \|c''(t)\|.$$

Bemerkungen 1.72

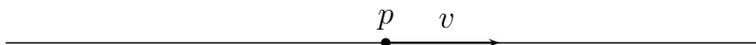
1. Die Krümmung von c ist somit eine reellwertige Funktion auf I , die *nichtnegativ* ist (vergleiche mit der Krümmung ebener Kurven, die sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann). Ferner, verschwindet c'' nirgends auf I , so ist $\kappa \in C^\infty$.
2. Aus der Definition von κ folgt, dass κ invariant unter Orientierungswechsel ist: sei $\bar{c} : -I \rightarrow \mathbb{R}^3$ die durch $\bar{c}(t) := c(-t)$ definierte Abbildung, dann ist \bar{c} nach Bogenlänge parametrisiert und ihre Krümmung $\bar{\kappa}$ ist gegeben durch

$$\bar{\kappa}(t) = \kappa(-t)$$

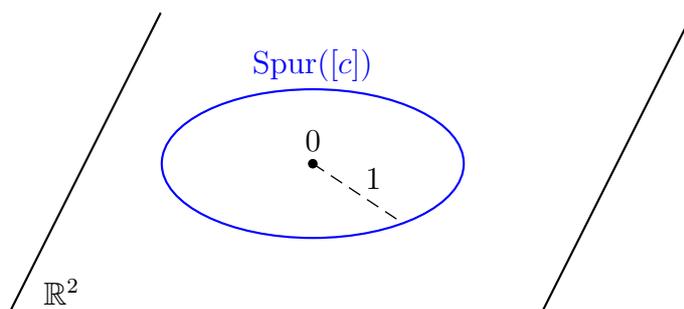
für alle $t \in -I$.

Beispiele 1.73

1. Sei $c(t) := p + tv$ wobei $p, v \in \mathbb{R}^3$ mit $\|v\| = 1$, und für $t \in I := \mathbb{R}$. Aus $c'' = 0$ folgt $\kappa = 0$.



2. Sei $c(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, für $t \in I := \mathbb{R}$. Wegen $c'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $\|c'(t)\| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h., c ist nach Bogenlänge parametrisiert. Ferner, wegen $c''(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} = -c(t)$ gilt $\kappa(t) = \|-c(t)\| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.



3. Jede ebene Kurve kann als Raumkurve gesehen werden vermöge

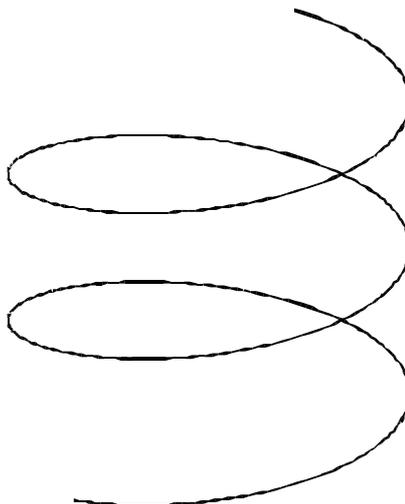
$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ist nämlich $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ nach Bogenlänge parametrisiert, so ist auch $\tilde{c} := \Phi \circ c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ nach Bogenlänge parametrisiert. Es gilt ferner für die entsprechenden Krümmungen κ bzw. $\tilde{\kappa}$ von c bzw. \tilde{c} (*Übungsaufgabe*):

$$\tilde{\kappa} = |\kappa|.$$

4. Sei $c(t) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$ für $t \in I := \mathbb{R}$. Aus $c'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt $\|c'(t)\| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h., c ist nach Bogenlänge parametrisiert. Aus $c''(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt für die Krümmung $\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Die Spur von $[c]$ heißt die *Schraubenlinie*:



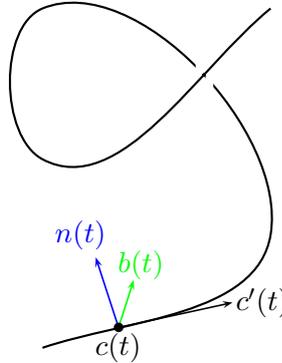
1.3.2 Das Frenet-Dreibein

Definition 1.74 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\kappa > 0$ auf I .

- Das Normalenfeld zu c ist definiert durch

$$n := \frac{1}{\kappa} c''.$$

- Das Binormalenfeld zu c in $t \in I$ ist der eindeutige Vektor $b(t)$ von \mathbb{R}^3 s.d. $\{c'(t), n(t), b(t)\}$ eine p.o.n.B. von \mathbb{R}^3 ist.
- Das Frenet-Dreibein zu c in $t \in I$ ist die Familie $\{c'(t), n(t), b(t)\}$.



Bemerkungen 1.75

1. Wegen $\|c'\| = 1$ gilt $\langle c'', c' \rangle = 0$, insbesondere steht $n(t)$ senkrecht auf $c'(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
2. Aus der Definition von n folgt, dass $n : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^∞ ist.

Das Binormalenfeld b kann explizit durch c' und n berechnet werden:

Proposition 1.76 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\kappa > 0$ auf I . Seien n bzw. b das Normalenfeld bzw. Binormalenfeld von c . Dann gilt, für jedes $t \in I$:

$$b(t) = c'(t) \times n(t),$$

wobei "×" für das Vektorprodukt im \mathbb{R}^3 steht. Insbesondere ist $b : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^∞ .

Beweis: folgt direkt aus den Eigenschaften des Vektorprodukts in \mathbb{R}^3 . □

Erinnerung: Das Vektorprodukt im \mathbb{R}^3 ist definiert durch

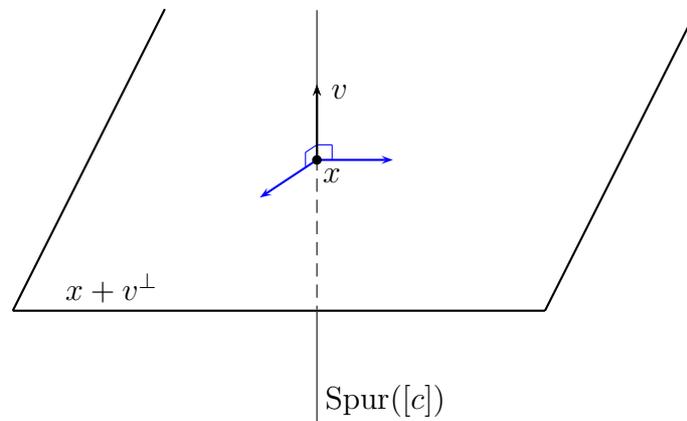
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ zx' - xz' \\ xy' - x'y \end{pmatrix}.$$

Desweiteren gilt, für alle Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$,

$$\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w).$$

Beispiele 1.77

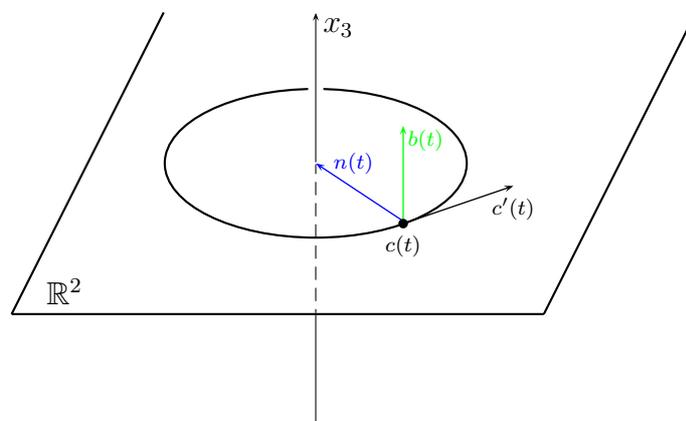
1. Sei $c(t) := p + tv$ wobei $p, v \in \mathbb{R}^3$ mit $\|v\| = 1$ und $t \in I := \mathbb{R}$. Wegen $\kappa = 0$ darf man n nicht definieren! Und tatsächlich gibt es keine kanonische Wahl für n , wie man auf folgender Abbildung sehen kann:



2. Sei $c(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, für $t \in I := \mathbb{R}$. Wegen $c'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $c''(t) = -c(t)$ gilt:

$$n(t) = \frac{1}{\kappa(t)} c''(t) = -c(t)$$

$$b(t) = c'(t) \times n(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



3. Sei $c(t) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$ für $t \in I := \mathbb{R}$. Aus $c'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$ und $c''(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt:

$$\begin{aligned} n(t) &= \frac{1}{\kappa(t)} c''(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ b(t) &= c'(t) \times n(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.3.3 Frenet-Gleichungen und Windung

Proposition 1.78 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\kappa > 0$ auf I . Dann existiert eine eindeutige C^∞ Funktion $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} c' \\ n \\ b \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c' \\ n \\ b \end{pmatrix},$$

d.h.,

$$\begin{cases} c'' = \kappa n \\ n' = -\kappa c' + \tau b \\ b' = -\tau n. \end{cases} \quad (1.6)$$

Beweis: Per Definition von n gilt $c'' = \kappa n$. Da $\{c'(t), n(t), b(t)\}$ eine (positiv-orientierte) Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 ist, zerlegen sich für alle $t \in I$ die Vektoren $n'(t)$ und $b'(t)$ auf folgende Weise:

$$\begin{aligned} n'(t) &= \langle n'(t), c'(t) \rangle c'(t) + \langle n'(t), n(t) \rangle n(t) + \langle n'(t), b(t) \rangle b(t) \\ b'(t) &= \langle b'(t), c'(t) \rangle c'(t) + \langle b'(t), n(t) \rangle n(t) + \langle b'(t), b(t) \rangle b(t). \end{aligned}$$

Durch Ableiten der Skalarprodukte zwischen den Vektoren der Basis $\{c'(t), n(t), b(t)\}$ bekommt man:

$$0 = \underbrace{\langle n, c' \rangle}'(t) = \langle n'(t), c'(t) \rangle + \langle n(t), c''(t) \rangle,$$

konstant

d.h., $\langle n'(t), c'(t) \rangle = -\langle n(t), c''(t) \rangle = -\kappa(t)$. Analog gelten

$$\begin{aligned} 0 &= (\langle n, n \rangle)'(t) = \langle n'(t), n(t) \rangle + \langle n(t), n'(t) \rangle = 2\langle n'(t), n(t) \rangle \\ 0 &= (\langle n, b \rangle)'(t) = \langle n'(t), b(t) \rangle + \langle n(t), b'(t) \rangle \\ 0 &= (\langle b, c' \rangle)'(t) = \langle b'(t), c'(t) \rangle + \langle b(t), c''(t) \rangle \\ 0 &= (\langle b, b \rangle)'(t) = 2\langle b'(t), b(t) \rangle, \end{aligned}$$

d.h.,

$$\begin{aligned}\langle n'(t), n(t) \rangle &= 0 \\ \langle n'(t), b(t) \rangle &= -\langle n(t), b'(t) \rangle \\ \langle b'(t), c'(t) \rangle &= -\langle b(t), c''(t) \rangle = -\kappa(t) \underbrace{\langle b(t), n(t) \rangle}_0 = 0 \\ \langle b'(t), b(t) \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Setze $\tau(t) := \langle n'(t), b(t) \rangle$. Dann ist $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ und erfüllt die obigen Bedingungen (insbesondere sind die Gleichungen erfüllt). Die Eindeutigkeit von τ ist klar. \square

Definition 1.79 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\kappa > 0$ auf I .

- Die in Proposition 1.78 definierte Funktion $\tau := \langle n', b \rangle$ heißt Windung (oder auch Torsion) von c .
- Die Gleichungen (1.6) heißen die Frenet-Gleichungen von c .

Bemerkung 1.80 In der Literatur wird manchmal eine andere Konvention für die Windung verwendet, nämlich $\tau := \langle n, b' \rangle$ (mit dem entgegengesetzten Vorzeichen).

Beispiele 1.81

1. Sei $c(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$. Wegen $c'' = -c$, $n = -c$ und $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für alle t , bekommt man $n' = -c'$, insbesondere $\tau = \langle n', b \rangle = -\langle c', b \rangle = 0$. Die Frenet-Gleichungen lauten in diesem Fall:

$$\begin{pmatrix} c' \\ n \\ b \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c' \\ n \\ b \end{pmatrix}.$$

2. Sei $c(t) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$. Aus $n(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$ bekommt man $n'(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, also

$$\tau = \langle n', b \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin^2(t) + \cos^2(t)) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Die Frenet-Gleichungen lauten in diesem Fall:

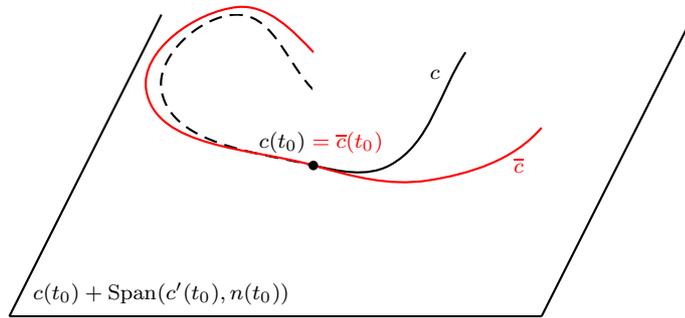
$$\begin{pmatrix} c' \\ n \\ b \end{pmatrix}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c' \\ n \\ b \end{pmatrix}.$$

1.3.4 Geometrische Interpretation der Krümmung und der Windung

Definition 1.82 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\kappa > 0$ und $t \in I$. Die von $c'(t)$ und $n(t)$ aufgespannte Ebene heißt Schmiegeebene von c in t .

Proposition 1.83 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\kappa > 0$ und $t_0 \in I$. Sei $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Span}(c'(t_0), n(t_0))$ die orthogonale Projektion auf die Schmiegeebene von c in t_0 . Setze $\bar{c} := \pi \circ c : I \rightarrow \text{Span}(c'(t_0), n(t_0))$. Dann gilt:

$$\kappa(t_0) = |\bar{\kappa}(t_0)|.$$



Beweis: Für jedes $t \in I$ lässt sich der Vektor $\bar{c}(t)$ schreiben als:

$$\bar{c}(t) = \langle c(t), c'(t_0) \rangle c'(t_0) + \langle c(t), n(t_0) \rangle n(t_0)$$

(denn $\{c'(t_0), n(t_0)\}$ ist eine Orthonormalbasis von $\text{Span}(c'(t_0), n(t_0))$). Für die Vektoren $\bar{c}'(t)$ und $\bar{c}''(t)$ gelten dann:

$$\begin{aligned} \bar{c}'(t) &= \langle c'(t), c'(t_0) \rangle c'(t_0) + \langle c'(t), n(t_0) \rangle n(t_0) \\ \bar{c}''(t) &= \langle c''(t), c'(t_0) \rangle c'(t_0) + \langle c''(t), n(t_0) \rangle n(t_0). \end{aligned}$$

Für $t = t_0$ bekomme $\bar{c}'(t_0) = \underbrace{\langle c'(t_0), c'(t_0) \rangle}_{=1} c'(t_0) + \underbrace{\langle c'(t_0), n(t_0) \rangle}_{=0} n(t_0) = c'(t_0)$ und

$\bar{c}''(t_0) = \underbrace{\langle c''(t_0), c'(t_0) \rangle}_{=0} c'(t_0) + \underbrace{\langle c''(t_0), n(t_0) \rangle}_{=\kappa(t_0)n(t_0)} n(t_0) = \kappa(t_0)n(t_0)$. Sei nun die Orientierung

von $\text{Span}(c'(t_0), n(t_0))$ durch die Basis $\{c'(t_0), n(t_0)\}$ festgelegt. Nach Definition 1.37 ist $\bar{\kappa}(t_0)$ gegeben durch

$$\bar{\kappa}(t_0) = \frac{1}{\|\bar{c}'(t_0)\|^3} \det(\bar{c}'(t_0), \bar{c}''(t_0)) = \kappa(t_0) \det(c'(t_0), n(t_0)) = \kappa(t_0),$$

insbesondere gilt $\bar{\kappa}(t_0) > 0$. Wählt man die andere Orientierung von $\text{Span}(c'(t_0), n(t_0))$, so gilt analog $\bar{\kappa}(t_0) = -\kappa(t_0)$. In beiden Fällen gilt $\kappa(t_0) = |\bar{\kappa}(t_0)|$. \square

Proposition 1.84 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\kappa > 0$ und $t_0 \in I$. Dann gilt für alle $t \in I$:

$$\begin{aligned} c(t) &= c(t_0) \\ &+ (t - t_0) \left(1 - \frac{\kappa^2(t_0)}{6}(t - t_0)^2 \right) c'(t_0) \\ &+ \frac{(t - t_0)^2}{2} \left(\kappa(t_0) + \frac{\kappa'(t_0)}{3}(t - t_0) \right) n(t_0) \\ &+ \frac{(t - t_0)^3}{6} \kappa(t_0) \tau(t_0) b(t_0) \\ &+ (t - t_0)^3 \varepsilon(t - t_0), \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon(t - t_0) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} 0$.

Beweis: Entwickle c bis um die dritte Ordnung in t_0 :

$$c(t) = c(t_0) + (t - t_0)c'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}c''(t_0) + \frac{(t - t_0)^3}{6}c^{(3)}(t_0) + (t - t_0)^3\varepsilon(t - t_0),$$

mit $\varepsilon(t - t_0) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} 0$. Die Frenet-Gleichungen liefern $c''(t_0) = \kappa(t_0)n(t_0)$ und

$$\begin{aligned} c^{(3)}(t_0) &= \kappa'(t_0)n(t_0) + \kappa(t_0)n'(t_0) \\ &= \kappa'(t_0)n(t_0) - \kappa(t_0)^2c'(t_0) + \kappa(t_0)\tau(t_0)b(t_0), \end{aligned}$$

was die Aussage beweist. □

Interpretation: Die Windung von c in t_0 misst, wie stark sich c von ihrer Schmiegeebene in t_0 entfernt.

Proposition 1.85 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Krümmung $\kappa > 0$. Dann gilt $\tau = 0$ g.d.w. c ebene Kurve ist, d.h., wenn ein zweidimensionaler affiner Unterraum E von \mathbb{R}^3 existiert mit $c(I) \subset E$.

Beweis: Angenommen, es gelte $\tau = 0$. Nach den Frenet-Gleichungen gilt $b' = 0$, d.h., b ist eine konstante Abbildung $I \rightarrow \mathbb{R}^3$, also $b = b_0 \in \mathbb{R}^3$. Betrachte jetzt $b_0^\perp := \{x \in \mathbb{R}^3, \langle x, b_0 \rangle = 0\}$ und wähle $t_0 \in I$. Beim Ableiten bekommen wir

$$\begin{aligned} \langle c - c(t_0), b \rangle' &= \langle c', b \rangle \quad (b' = 0) \\ &= 0 \quad (c' \perp b), \end{aligned}$$

d.h., $t \mapsto \langle c(t) - c(t_0), b \rangle$ ist konstant auf I . Beim Einsetzen $t = t_0$ gilt $c(t) - c(t_0) = 0$, und daher $\langle c(t) - c(t_0), b \rangle = 0$ für alle $t \in I$. Somit haben wir bewiesen: $c(I) \subset c(t_0) + b^\perp =: E$, und E ist wohl 2-dimensionaler affiner Unterraum von \mathbb{R}^3 .

Umgekehrt nehmen wir an, dass ein 2-dimensionaler affiner Unterraum E von \mathbb{R}^3 so existiert, dass $c(I) \subset E$ gilt. Es existieren $p_0 \in \mathbb{R}^3$ und $E_0 \subset \mathbb{R}^3$ (2-dimensionaler) Untervektorraum von \mathbb{R}^3 mit $E = p_0 + E_0$. Da $E_0 \subset \mathbb{R}^3$ bzgl. der kanonischen Topologie von

\mathbb{R}^3 abgeschlossen ist, gilt $c'(I) \subset E_0$ und $c''(I) \subset E_0$, insbesondere $n(I) \subset E_0$, und für alle $t \in I$ ist $\{c'(t), n(t)\}$ eine Orthonormalbasis von E_0 . Daraus folgt, dass $b(t)$ senkrecht auf E_0 steht, für alle $t \in I$. Wegen $n'(I) \subset E_0$ gilt dann $\tau = 0$. \square

1.3.5 Der Hauptsatz der Theorie der Raumkurven

Proposition 1.86 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine orientierungserhaltende euklidische Bewegung. Dann ist $F \circ c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ nach Bogenlänge parametrisiert und es gilt für die Krümmung bzw. die Windung von $F \circ c$:

$$\begin{aligned}\kappa_{F \circ c} &= \kappa \\ \tau_{F \circ c} &= \tau.\end{aligned}$$

Beweis: Schreibe $F(x) = A(x) + a$ mit $A \in \text{SO}_3$ und $a \in \mathbb{R}^3$. Setze $\tilde{c} := F \circ c$. Es gelten $\tilde{c}' = A \circ c'$, $\tilde{c}'' = A \circ c''$, insbesondere \tilde{c} ist nach Bogenlänge parametrisiert mit Krümmung $\tilde{\kappa} = \|\tilde{c}''\| = \|c''\| = \kappa$. Ferner gilt für das Normalenfeld $\tilde{n} = \frac{1}{\tilde{\kappa}}\tilde{c}'' = \frac{1}{\kappa}A \circ c'' = A \circ n$. Für das Binormalenfeld brauchen wir folgende Identität.

Behauptung: Ist $A \in \text{SO}_3$, so gilt $A(u \times v) = A(u) \times A(v)$ für alle Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$.

Beweis der Behauptung: Sei $w \in \mathbb{R}^3$, dann folgt aus den elementaren Eigenschaften des Vektorprodukts in \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}\langle A(u \times v), w \rangle &= \langle u \times v, A^{-1}(w) \rangle \quad (\text{denn } AA^* = \text{Id}) \\ &= \det(u, v, A^{-1}(w)) \\ &= \det(A(u), A(v), w) \quad (\text{denn } \det(A) = 1) \\ &= \langle A(u) \times A(v), w \rangle.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann aus der Tatsache, dass das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht ausgeartet ist auf \mathbb{R}^3 . \checkmark

Für das Binormalenfeld folgt $\tilde{b} = \tilde{c}' \times \tilde{n} = \frac{1}{\kappa}(A \circ c') \times (A \circ c'') = A(\frac{1}{\kappa}c' \times c'') = A \circ b$. Somit gilt für die Windung $\tilde{\tau} = \langle \tilde{n}', \tilde{b} \rangle = \langle n, b \rangle = \tau$. \square

Für ebene Kurven reicht die Krümmung, um eine Kurve - bis auf Dahinterschaltung orientierungserhaltender euklidischer Bewegungen - zu bestimmen. Für Raumkurven muss zusätzlich die Windung vorgegeben werden.

Satz 1.87 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ Funktionen mit $f > 0$. Dann existiert eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit

$$\begin{cases} \kappa &= f \\ \tau &= g. \end{cases}$$

Diese Kurve ist bis auf Dahinterschaltung orientierungserhaltender euklidischer Bewegungen eindeutig: sind c und \tilde{c} zwei Lösungen ($\kappa = \tilde{\kappa} = f$ und $\tau = \tilde{\tau} = g$), so existiert eine eindeutige orientierungserhaltende euklidische Bewegung F von \mathbb{R}^3 mit

$$\tilde{c} = F \circ c.$$

Beweis: Wir skizzieren den Beweis, der völlig analog zum Beweis von Satz 1.47 ist.

1. Löse die Frenet-Gleichungen: für ein festes $t_0 \in I$ finde drei C^∞ Abbildungen $u, v, w : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{cases} u' &= f v \\ v' &= -f u + g w \\ w' &= -g v \end{cases}$$

auf I und $u(t_0) = e_1, v(t_0) = e_2$ sowie $w(t_0) = e_3$ (wie üblich bezeichnen hier e_1, e_2, e_3 die kanonischen Basisvektoren von \mathbb{R}^3). Die Existenz und Eindeutigkeit von u, v, w wird durch den Satz über Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen linearer Differentialgleichungen gewährleistet, siehe Beweis von Satz 1.47.

2. Zeige, dass für jedes $t \in I$ das Tripel $\{u(t), v(t), w(t)\}$ eine p.o.n.B. von \mathbb{R}^3 ist. Dafür zeige man, dass alle Funktionen, die als Skalarprodukt zweier der drei Vektorwertigen Funktionen u, v, w auftreten (also $t \mapsto \langle u(t), u(t) \rangle, t \mapsto \langle u(t), v(t) \rangle, t \mapsto \langle u(t), w(t) \rangle$ usw.), konstant auf I sind. Um dies zu erreichen leite man die Funktionen ab und setze die Frenet-Gleichungen ein, vgl. Beweis von Satz 1.47. Als letztes zeige man, dass die Abbildung $t \mapsto \det(u(t), v(t), w(t))$ konstant auf I ist (die Werte dieser Abbildung sind diskret).
3. Setze $c(t) := \int_{t_0}^t u(s) ds$. Zeige, dass c nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve ist mit Frenet-Dreibein $\{u, v, w\}$, Krümmung f und Windung g . Dafür braucht man nur die Definitionen sowie die Frenet-Gleichungen.
4. Die "Eindeutigkeit" bis auf Dahinterschaltung orientierungserhaltender euklidischer Bewegungen lässt sich auf völlig analoge Weise zeigen wie beim Satz 1.47.

□

Bemerkung 1.88 Insbesondere legt die Krümmung eine Raumkurve *nicht* fest: es gibt unendlich viele nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurven, die dieselbe Krümmung besitzen, die aber sich voneinander durch Dahinterschaltung orientierungserhaltender euklidischer Bewegungen *nicht* herleiten lassen (siehe beispielweise die 18. Aufgabe im 5. Übungsblatt).

Als letztes geben wir (ohne Beweis) folgende Formeln für die entsprechenden Größen (Normalenfeld, Krümmung usw.) einer *beliebigen* regulär parametrisierten Raumkurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$:

- Die Krümmung von c ist definiert durch $\kappa := \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3}$. Ist c nach Bogenlänge parametrisiert, so gilt $\kappa = \|c''\|$.

- Falls $\kappa > 0$ auf I gilt, kann folgendes definiert werden:

* Normalenfeld $n = \frac{c'' - \langle c'', \frac{c'}{\|c'\|} \rangle \frac{c'}{\|c'\|}}{\|c'' - \langle c'', \frac{c'}{\|c'\|} \rangle \frac{c'}{\|c'\|}\|} = \frac{c'' - \langle c'', \frac{c'}{\|c'\|} \rangle \frac{c'}{\|c'\|}}{\frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|}}$. Ist c nach Bogenlänge parametrisiert, so gilt $n = \frac{1}{\kappa} c''$.

* Binormalenfeld $b = \frac{c' \times c''}{\|c' \times c''\|}$. Ist c nach Bogenlänge parametrisiert, so gilt $b = c' \times n$.

* Windung $\tau = \frac{\det(c', c'', c^{(3)})}{\|c' \times c''\|^2}$. Ist c nach Bogenlänge parametrisiert, so gilt $\tau = \langle n', b \rangle$.

Ein Vorteil dieser allgemeinen Formulierung besteht darin, dass folgendes Transformationsverhalten erfüllt ist und elementar nachgewiesen werden kann: ist $\tilde{c} = c \circ \varphi$ Umparametrisierung der regulär parametrisierten Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, so gelten $\tilde{\kappa} = \kappa \circ \varphi$, $\tilde{n} = n \circ \varphi$, $\tilde{b} = \text{sgn}(\varphi') b \circ \varphi$ und $\tilde{\tau} = \tau \circ \varphi$, wobei $\text{sgn}(\varphi') \in \{-1, 1\}$ das Vorzeichen von φ' bezeichnet (wohldefiniert wegen $\varphi' > 0$ auf I oder $\varphi' < 0$ auf I).

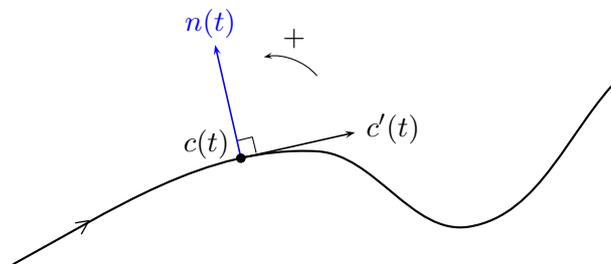
Kurven - Zusammenfassung

Betrachte *regulär* parametrisierte Kurven ($c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^∞ mit $c'(t) \neq 0$ $\forall t \in I$).

1. Existenz einer Umparametrisierung $c \circ \varphi$ nach *Bogenlänge* ($\|(c \circ \varphi)'\| = 1$) von c ; Formel für φ .

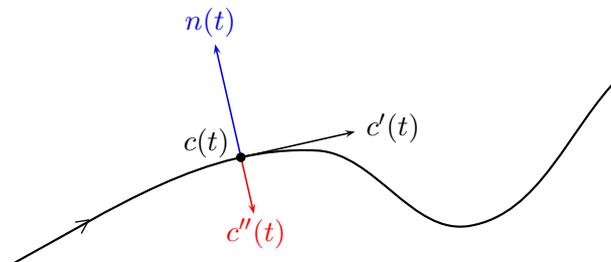
2. **Ebene Kurven** ($n = 2$): für regulär parametrisierte c

- *Normalenfeld* n ($\{\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}, n(t)\}$ p.o.n.B. von \mathbb{R}^2):



$$n(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$$

- *Krümmung* κ :



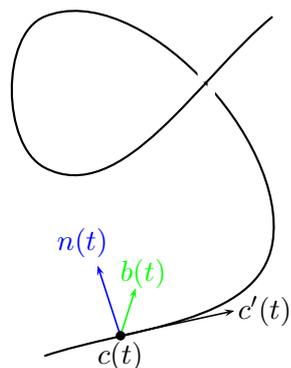
$$\kappa(t) = \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3}$$

- *Frenet-Gleichungen*: falls c nach Bogenlänge parametrisiert gilt $\begin{pmatrix} c' \\ n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c' \\ n \end{pmatrix}$
- *Hauptsatz*: κ legt nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve bis auf euklidische Bewegungen fest

- *Umlaufzahl* $n_c = \frac{\theta(T) - \theta(0)}{2\pi}$ für T -periodische ebene c , wobei $c'(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$ für alle t und θ stetig
- *Umlaufsatz*: $n_c = \pm 1$ für einfach geschlossene $[c]$
- *Totalkrümmung* $\int_0^T \kappa(t) dt$ für T -periodische c ; ist gleich $2\pi n_c$
- *Isoperimetrische Ungleichung*: $L[c]^2 \geq 4\pi A[\Omega]$, wobei Ω ein von einer einfach geschlossenen ebenen Kurve $[c]$ umschlossenes Gebiet ist; Gleichheit g.d.w. $[c]$ Kreis ist

3. Raumkurven ($n = 3$): für nach Bogenlänge parametrisierte c

- *Krümmung* $\kappa := \|c''\|$
- *Falls* $\kappa > 0$:
 - *Frenet-Dreibein* $\{c'(t), n(t), b(t)\}$ (p.o.n.B. von \mathbb{R}^3):



$$\left| \begin{array}{l} n(t) := \frac{1}{\kappa(t)} c''(t) \\ b(t) = c'(t) \times n(t) \end{array} \right.$$

– *Windung* $\tau := \langle n', b \rangle$

– *Frenet-Gleichungen*:

$$\begin{pmatrix} c' \\ n \\ b \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c' \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

– *Hauptsatz*: bis auf euklidische Bewegungen wird Raumkurve von positiver Krümmung *und* Windung festgelegt

Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
N. Ginoux

WS 2008/9

Geometrie (LGy)

1. Übungsblatt

1. Aufgabe

Sei $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $c(t) := \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}$.

1. Zeigen Sie, dass c regulär parametrisiert ist.
2. Geben Sie eine Umparametrisierung von c nach Bogenlänge an.
3. Berechnen Sie die Länge des Kurvenstücks $[c]_{[-2,2]}$.
4. Skizzieren Sie die Spur von $[c]$ (die die Kettenlinie heißt).

Lösung:

1. Die Abbildung c ist offensichtlich C^∞ und $c'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh(t) \end{pmatrix} \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, somit ist c regulär parametrisierte Kurve.
2. Sei $t_0 = 0 \in \mathbb{R}$, dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$: $\|c'(t)\| = \sqrt{1 + \sinh(t)^2} = \cosh(t)$, damit gilt $\psi(t) \stackrel{\text{Def.}}{=} \int_0^t \|c'(s)\| ds = \sinh(t)$. Es gilt außerdem $\psi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Setze $\varphi := \psi^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (φ ist die Umkehrabbildung von ψ), d.h. $\varphi = \operatorname{arsinh}$, dann ist nach der Vorlesung $\tilde{c} := c \circ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ Umparametrisierung nach Bogenlänge von c . Die Abbildung \tilde{c} kann etwas expliziter geschrieben werden: für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\tilde{c}(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{arsinh}(t) \\ \cosh(\operatorname{arsinh}(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{arsinh}(t) \\ \sqrt{1+t^2} \end{pmatrix}.$$

3. Es gilt $L[c]_{[-2,2]} \stackrel{\text{Def.}}{=} \int_{-2}^2 \|c'(s)\| ds = \int_{-2}^2 \cosh(s) ds = [\sinh(s)]_{-2}^2 = 2 \sinh(2)$, oder noch $e^2 - e^{-2}$.
4. In der Übung.

2. Aufgabe

Sei $c_a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $c_a(t) := \begin{pmatrix} a\sqrt{\pi} \int_0^t \cos(\frac{\pi u^2}{2}) du \\ a\sqrt{\pi} \int_0^t \sin(\frac{\pi u^2}{2}) du \end{pmatrix}$, wobei $a > 0$ fest ist.

1. Ermitteln Sie deren Bogenlänge $s(t) := L[c_a]_{[0,t]}$.

2. Geben Sie eine Umparametrisierung von c_a nach Bogenlänge an.
3. Skizzieren Sie die Spur von $[c_a]$ (die die Klotoide heißt).

Lösung:

1. Sei $t \geq 0$, dann gilt $c'_a(t) = a\sqrt{\pi} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi t^2}{2}) \\ \sin(\frac{\pi t^2}{2}) \end{pmatrix}$, somit

$$\|c'_a(t)\| = a\sqrt{\pi} \sqrt{\cos^2(\frac{\pi t^2}{2}) + \sin^2(\frac{\pi t^2}{2})} = a\sqrt{\pi} \text{ und deshalb gilt } s(t) \stackrel{\text{Def.}}{=} \int_0^t \|c'_a(s)\| ds = a\sqrt{\pi}t.$$

2. Sei $t_0 = 0 \in [0, \infty)$, dann gilt $\psi(t) \stackrel{\text{Def.}}{=} \int_0^t \|c'(s)\| ds = s(t) = a\sqrt{\pi}t$ für alle t . Es gilt außerdem $\psi([0, \infty)) = [0, \infty)$. Setze $\varphi = \psi^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, d.h. $\varphi(t) = \frac{t}{a\sqrt{\pi}}$, dann ist nach der Vorlesung $\tilde{c} := c \circ \varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ Umparametrisierung nach Bogenlänge von c . Die Abbildung \tilde{c} kann etwas expliziter geschrieben werden: für alle $t \in [0, \infty)$ gilt

$$\tilde{c}(t) = a\sqrt{\pi} \begin{pmatrix} \int_0^{\frac{t}{a\sqrt{\pi}}} \cos(\frac{\pi u^2}{2}) du \\ \int_0^{\frac{t}{a\sqrt{\pi}}} \sin(\frac{\pi u^2}{2}) du \end{pmatrix} \stackrel{(v=a\sqrt{\pi}u)}{=} \begin{pmatrix} \int_0^t \cos(\frac{v^2}{2a^2}) dv \\ \int_0^t \sin(\frac{v^2}{2a^2}) dv \end{pmatrix}.$$

3. In der Übung.

Bemerkung: die Funktionen $t \mapsto \cos(t^2)$ und $t \mapsto \sin(t^2)$ sind integrierbar auf \mathbb{R} und es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(t^2) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (siehe Berechnung des Fresnel-Integrals).

Daraus folgt, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} (c_a(t)) = \frac{a\sqrt{\pi}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Aufgabe

Seien p und q zwei Punkte im \mathbb{R}^n . Zeigen Sie, dass das Geradensegment mit Endpunkten p und q die kürzeste Verbindung zwischen diesen Punkten ist.

Lösung: O.B.d.A. seien $p \neq q$ (sonst trivial). Sei $c_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c_m(t) := (1-t)p + tq$ mit $t \in [0, 1]$, dann ist c_m C^∞ mit $c'_m(t) = q - p \neq 0$ für alle t , somit ist c_m regulär parametrisierte Kurve mit $c_m(0) = p$ und $c_m(1) = q$, und es gilt $L[c_m] = \int_0^1 \|q - p\| ds = \|q - p\|$.

Sei nun c eine beliebige regulär parametrisierte Kurve in \mathbb{R}^n mit Endpunkten p und q . Bis auf Umparametrisierung kann angenommen werden, dass $c(0) = p$ und $c(1) = q$. Nach der Dreiecksungleichung für Integrale (siehe Proposition unten) gilt

$$\begin{aligned} L[c] &= \int_0^1 \|c'(s)\| ds \\ &\geq \left\| \int_0^1 c'(s) ds \right\| \\ &= \|c(1) - c(0)\| \\ &= \|q - p\| \\ &= L[c_m], \end{aligned}$$

somit ist $[c_m]$ eine kürzeste Verbindung zwischen p und q in \mathbb{R}^n .

Es bleibt noch, zu zeigen, dass falls $L[c] = L[c_m]$ gilt $[c] = [c_m]$, d.h. c ist eine Umparometrisierung von c_m . Dafür brauchen wir eine Charakterisierung des Gleichheitsfalls in der Dreiecksungleichung für Integrale. Zur Erinnerung geben wir und beweisen wir die folgende Proposition.

Proposition. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbare Abbildung mit $-\infty < a < b < \infty$. Dann gilt

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt,$$

mit Gleichheit g.d.w. ein $v \in \mathbb{R}^n$ und ein $l \in C^1([a, b], \mathbb{R}_+)$ existieren mit $f = l \cdot v$.

Beweis: Setze $v := \int_a^b f(t) dt \in \mathbb{R}^n$. Falls $v = 0$ ist die Aussage trivial. Nehmen wir also an, dass $v \neq 0$. Nach Definition der euklidischen Norm gilt

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\|^2 = \left\langle \int_a^b f(t) dt, \int_a^b f(t) dt \right\rangle = \left\langle \int_a^b f(t) dt, v \right\rangle,$$

und nach Konstruktion des Integralen für \mathbb{R}^n -wertige Funktionen gilt

$$\left\langle \int_a^b f(t) dt, v \right\rangle = \int_a^b \langle f(t), v \rangle dt.$$

Nach Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir $\langle f(t), v \rangle \leq \|f(t)\| \cdot \|v\|$ für alle $t \in [a, b]$ und somit

$$\left\langle \int_a^b f(t) dt, v \right\rangle \leq \left(\int_a^b \|f(t)\| dt \right) \cdot \|v\|.$$

Auf der linken Seite steht aber $\|v\|^2$. Wegen $v \neq 0$ gilt dann $\|v\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$, was nichts anderes als die gesuchte Ungleichung ist.

Falls diese Ungleichung eine Gleichheit ist, so muss insbesondere $\langle f(t), v \rangle = \|f(t)\| \cdot \|v\|$ für alle $t \in [a, b]$ gelten. Aus dem Gleichheitsfall in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt $f(t) = l(t)v$ für ein $l(t) \in \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Nach Berechnung kommt $l(t) = \frac{\langle f(t), v \rangle}{\|v\|^2}$ heraus, was zeigt, dass $l \in C^1([a, b], \mathbb{R}_+)$. Die notwendige Bedingung ist damit bewiesen. Ist umgekehrt f der Form $f = l \cdot v$ mit $v \in \mathbb{R}^n$ und $l \in C^1([a, b], \mathbb{R}_+)$, so ist f C^1 und es gilt

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b f(t) dt \right\| &= \left\| \int_a^b l(t)v dt \right\| \\ &= \left\| \left(\int_a^b l(t) dt \right) v \right\| \\ &= \left| \int_a^b l(t) dt \right| \cdot \|v\| \\ &= \left(\int_a^b l(t) dt \right) \cdot \|v\| \\ &= \int_a^b l(t) \|v\| dt \\ &= \int_a^b \|f(t)\| dt. \end{aligned}$$

Die Funktion f erfüllt also den Gleichheitsfall. Somit ist die Äquivalenz bewiesen. \square

Gilt also $L[c] = \|q - p\|$ (mit $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ s.d. $c(0) = p$ und $c(1) = q$), so existiert ein $l \in C^1([a, b], \mathbb{R}_+)$ und ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $c' = l \cdot v$. Da c bereits C^∞ ist, muss l auch C^∞ sein. Insbesondere gilt für alle $t \in [0, 1]$,

$$c(t) = c(0) + \int_0^t c'(s) ds = p + \left(\int_0^t l(s) ds \right) v$$

mit $v = \frac{q-p}{\int_0^1 l(s) ds}$ (wohldefiniert, sonst wäre c konstant, Widerspruch zu $p \neq q$). Daraus folgt, dass c der Form

$$c(t) = p + \frac{\int_0^t l(s) ds}{\int_0^1 l(s) ds} (q - p)$$

für alle $t \in [0, 1]$ ist. Da die Abbildung $t \mapsto \frac{\int_0^t l(s) ds}{\int_0^1 l(s) ds}$ ein Diffeomorphismus $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ist, gilt dann $[c] = [c_m]$, QED.

Bemerkungen:

1. Die Formel

$$L[c] = \sup_{0=t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1}=1, k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j=0}^k \|c(t_{j+1}) - c(t_j)\| \right),$$

die aber in der Vorlesung nicht besprochen wurde, kann auch einen Beweis liefern.

2. Falls ein Punkt aus \mathbb{R}^n herausgenommen wird, wird die Aussage falsch. Z.B. falls $0 \in \mathbb{R}^n$ herausgenommen wird, gibt es keine kürzeste Verbindung zwischen p und $-p$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ für alle $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
N. Ginoux

WS 2008/9

Geometrie (LGy)

2. Übungsblatt

4. Aufgabe

Sei in der xy -Ebene eine Kreisscheibe von Radius 1 und Mittelpunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben. Sei eine weitere Kreisscheibe von Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ fest an dieser Scheibe angeschlossen. Die erste Kreisscheibe rolle auf der x -Achse ab.

1. Ermitteln Sie eine Parametrisierung der Bahn des Punktes $\begin{pmatrix} 0 \\ 1-r \end{pmatrix}$. Ist diese Parametrisierung regulär?
2. Skizzieren Sie das Bild dieser Parametrisierung für $r < 1$, $r = 1$ und $r > 1$.
3. Berechnen Sie für $r = 1$ die Länge des Kurvenstücks, das einem Umlauf der Kreisscheibe entspricht.

Lösung:

1. Sei die Winkelgeschwindigkeit gleich 1, sei t der Zeitparameter und sei $c_{(r)}(t)$ die Stelle des gesuchten Punktes im Zeitpunkt t . Im Zeitpunkt t hat sich der Mittelpunkt der Kreisscheibe von Radius 1 verschoben (die Länge eines Kreisbogens mit Radius R und Winkelgröße θ ist $R\theta$). Der Verschiebungsvektor ist genau $\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$, also der Mittelpunkt im Zeitpunkt t ist $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Mittelpunkte der beiden Kreisscheiben stimmen überein, weil die andere Kreisscheibe fest an der ersten angeschlossen ist. Da die Kreisscheiben um den Winkel t gedreht wurden, muss zu diesem Mittelpunkt der Vektor $\begin{pmatrix} -r \sin(t) \\ -r \cos(t) \end{pmatrix}$ addiert werden, der das Bild vom Punkt $\begin{pmatrix} t \\ 1-r \end{pmatrix}$ unter der Drehung um $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ mit dem Winkel $-t$ liefert (Vorzeichen beachten!). Zusammengefasst bekommen wir

$$c_{(r)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r \sin(t) \\ -r \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - r \sin(t) \\ 1 - r \cos(t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Die Abbildung $c_{(r)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist offenbar C^∞ und es gilt $c'_{(r)}(t) = \begin{pmatrix} 1 - r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Es gilt $(c_{(r)})'_2(t) = 0$ g.d.w. $t = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, und es gilt $(c_{(r)})'_1(k\pi) = 1 - (-1)^k r$. Falls $r \neq 1$, gilt also $(c_{(r)})'_1(k\pi) \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, somit ist $c_{(r)}$ regulär parametrisiert. Falls $r = 1$, gilt $(c_{(r)})'_1(k\pi) = 0$ für alle $k \in 2\mathbb{Z}$, somit ist $c_{(1)}$ nicht regulär parametrisiert.

2. In der Übung.

3. Es ist $L[c_{(1)}|_{[0,2\pi]}]$ zu berechnen. Bemerke, dass $c_{(1)}|_{[0,2\pi]}$ wohl regulär parametrisiert ist. Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}
 L[c_{(1)}|_{[0,2\pi]}] &= \int_0^{2\pi} \|c'_{(1)}(s)\| ds \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos(s))^2 + \sin(s)^2} ds \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(s)} ds \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2\left(\frac{s}{2}\right)} ds \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} \left| \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right| ds \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{s}{2}\right) ds \\
 &= 8.
 \end{aligned}$$

5. Aufgabe

Zeigen Sie, dass jede Parametrisierung nach Bogenlänge einer geschlossenen Kurve periodisch ist mit Periode gleich der Länge der Kurve.

Lösung: Sei c bzw. \tilde{c} periodische (reguläre) Parametrisierung mit Periode T bzw. Parametrisierung nach Bogenlänge der Kurve. Bezeichne mit L die Länge der Kurve. Nach Vorlesung gilt

$$\tilde{c}(t) = c \circ \varphi(t+r) \quad \text{oder} \quad \tilde{c}(t) = c \circ \varphi(-t+r) \quad (1.7)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei $r \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist und $\varphi^{-1}(t) := \int_0^t \|c'(s)\| ds$. Wegen $c'(s) \neq 0$ für alle s und c periodisch, gilt $\varphi^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ferner gilt $\varphi(t+L) = \varphi(t) + T$ für alle $t \in \mathbb{R}$, denn: nach Definition gilt

$$\begin{aligned}
 \varphi^{-1}(t+T) &= \int_0^{t+T} \|c'(s)\| ds \\
 &= \int_0^t \|c'(s)\| ds + \int_t^{t+T} \|c'(s)\| ds \\
 &= \varphi^{-1}(t) + L
 \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, somit auch $\varphi(t+L) = \varphi(t) + T$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Daraus folgt

$$\tilde{c}(t+L) = c \circ \varphi(\pm(t+L)+r) = c \circ \varphi(\pm t+r \pm L) = c \circ \varphi(\pm t+r) = \tilde{c}(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, insbesondere \tilde{c} ist periodisch mit Periode $\frac{T}{k}$ für eine ganze Zahl $k \geq 1$. Gilt aber $\tilde{c}(t+L') = \tilde{c}(t)$ für ein $L' > 0$ und für alle $t \in \mathbb{R}$, so gilt nach (1.7) $c \circ \varphi(\pm(t+L')+r) = c \circ \varphi(\pm t+r)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Aus der L -Periodizität von c folgt, dass eine ganze Zahl $k' \geq 1$ so existiert, dass $\varphi(t+L') = \varphi(t) + k'T$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Da φ injektiv ist, muss dann

$L' = k'L$ gelten. Damit ist $k = 1$, d.h., T die Periode von \tilde{c} , QED.

6. Aufgabe

Gegeben seien die parametrisierten Kurven $c_1, c_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$c_1(t) := \begin{pmatrix} r \sin^2(t) \\ r \cos^2(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c_2(t) := \begin{pmatrix} r \sin^3(t) \\ r \cos^3(t) \end{pmatrix}$$

für ein festes $r > 0$.

1. Handelt es sich um reguläre Parametrisierungen? Begründen.
2. Skizzieren Sie die Bilder von c_1 und c_2 für $r = 2$.
3. Bestimmen Sie die Länge der Kurvenstücke zwischen $c_j(0)$ und $c_j(\frac{\pi}{2})$, für $j = 1, 2$ und ein beliebiges r .

Lösung:

1. Die Abbildungen c_1 und c_2 sind offensichtlich C^∞ und es gilt

$$c_1'(t) = 2r \begin{pmatrix} \sin(t) \cos(t) \\ -\cos(t) \sin(t) \end{pmatrix} = 2r \sin(t) \cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$c_2'(t) = 3r \begin{pmatrix} \sin^2(t) \cos(t) \\ -\cos^2(t) \sin(t) \end{pmatrix} = 3r \sin(t) \cos(t) \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Daraus folgt, dass $c_1'(t) = 0$ g.d.w. $t \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ bzw. $c_2'(t) = 0$ g.d.w. $t \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Somit sind c_1 und c_2 nicht regulär parametrisiert.

2. In der Übung.

3. Es gilt

$$\begin{aligned} \|c_1'(t)\| &= \|2r \sin(t) \cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\| \\ &= 2\sqrt{2}r |\sin(t) \cos(t)| \\ &= \sqrt{2}r |\sin(2t)| \\ &= \sqrt{2}r \sin(2t) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \|c_2'(t)\| &= \|3r \sin(t) \cos(t) \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}\| \\ &= 3r |\sin(t) \cos(t)| \\ &= \frac{3r}{2} \sin(2t) \end{aligned}$$

für alle $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Nach Definition gilt dann

$$L[c_1|_{]0, \frac{\pi}{2}[}] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}r \sin(2s) ds = r\sqrt{2}$$

bzw.

$$L[c_2|_{]0, \frac{\pi}{2}[}] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3r}{2} \sin(2s) ds = \frac{3r}{2}.$$

7. Aufgabe

Berechnen Sie das Normalenfeld und die Krümmung von c bzw. c_a , wobei c bzw. c_a aus der 1. bzw. 2. Aufgabe (1. Übungsblatt) sind.

Lösung:

1. Sei $c(t) := \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ aus der 1. Aufgabe. Wegen $c'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh(t) \end{pmatrix}$ mit $\|c'(t)\| = \cosh(t)$, lautet das Normalenfeld n zu c

$$n(t) = \frac{1}{\cosh(t)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tanh(t) \\ \frac{1}{\cosh(t)} \end{pmatrix}.$$

Wegen $c''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cosh(t) \end{pmatrix}$ gilt dann für die Krümmung κ von c

$$\begin{aligned} \kappa(t) &\stackrel{(\text{Def.})}{=} \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3} \\ &= \frac{1}{\cosh(t)^3} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\cosh(t)^2} \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

2. Sei $c_a(t) := \begin{pmatrix} a\sqrt{\pi} \int_0^t \cos(\frac{\pi u^2}{2}) du \\ a\sqrt{\pi} \int_0^t \sin(\frac{\pi u^2}{2}) du \end{pmatrix}$, $t \in [0, \infty)$, wobei $a > 0$ fest ist. Wegen $c'_a(t) = a\sqrt{\pi} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi t^2}{2}) \\ \sin(\frac{\pi t^2}{2}) \end{pmatrix}$ mit $\|c'_a(t)\| = a\sqrt{\pi}$, lautet das Normalenfeld n zu c

$$n(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi t^2}{2}) \\ \sin(\frac{\pi t^2}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\pi t^2}{2}) \\ \cos(\frac{\pi t^2}{2}) \end{pmatrix}.$$

Wegen $c''_a(t) = a\pi\sqrt{\pi}t \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\pi t^2}{2}) \\ \cos(\frac{\pi t^2}{2}) \end{pmatrix}$ gilt dann für die Krümmung κ_a von c_a

$$\begin{aligned} \kappa_a(t) &\stackrel{(\text{Def.})}{=} \frac{\det(c'_a(t), c''_a(t))}{\|c'_a(t)\|^3} \\ &= \frac{(a\sqrt{\pi}) \cdot (a\pi\sqrt{\pi}t)}{(a\sqrt{\pi})^3} \det \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi t^2}{2}) & -\sin(\frac{\pi t^2}{2}) \\ \sin(\frac{\pi t^2}{2}) & \cos(\frac{\pi t^2}{2}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{a} t \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
N. Ginoux

WS 2008/9

Geometrie (LGy)

3. Übungsblatt

8. Aufgabe

Für feste $a, b > 0$ definiere $c : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) := \begin{pmatrix} ae^{-bt} \cos(t) \\ ae^{-bt} \sin(t) \end{pmatrix}$.

1. Zeigen Sie, dass c regulär parametrisiert ist und bestimmen Sie eine Umparametrisierung nach Bogenlänge von c .
2. Skizzieren Sie die Spur von $[c]$.
3. Bestimmen Sie die Länge und die Krümmung von c .
4. Man bezeichne mit O den Ursprung im \mathbb{R}^2 . Zeigen Sie, dass der Winkel α zwischen der Geraden $(Oc(t))$ und der Tangente an c im Punkt $c(t)$ konstant ist mit $|\tan(\alpha)| = \frac{1}{b}$.

Lösung:

1. Die Abbildung c ist offensichtlich C^∞ und es gilt, für alle $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} c'(t) &= -abe^{-bt} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + ae^{-bt} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \\ &= ae^{-bt} \begin{pmatrix} -b \cos(t) - \sin(t) \\ -b \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

insbesondere

$$\begin{aligned} \|c'(t)\| &= ae^{-bt} \sqrt{(b \cos(t) + \sin(t))^2 + (b \sin(t) - \cos(t))^2} \\ &= ae^{-bt} \sqrt{b^2 + 1}. \end{aligned}$$

Wegen $ae^{-bt} \sqrt{b^2 + 1} \neq 0$ für alle t ist c regulär parametrisiert. Für die Bogenlänge gilt, für alle $t \in [0, \infty[$,

$$\begin{aligned} \psi(t) &\stackrel{(\text{Def.})}{=} \int_0^t \|c'(s)\| ds \\ &= \frac{a\sqrt{b^2 + 1}}{b} (1 - e^{-bt}). \end{aligned}$$

Es gilt $\psi([0, \infty[) = [0, \frac{a\sqrt{b^2+1}}{b}[$ und die Umkehrabbildung $\varphi := \psi^{-1} : [0, \frac{a\sqrt{b^2+1}}{b}[\rightarrow [0, \infty[$ ist gegeben durch $\varphi(t) = -\frac{1}{b} \ln(1 - \frac{bt}{a\sqrt{b^2+1}})$. Eine Umparametrisierung nach

Bogenlänge von c ist also gegeben durch $c \circ \varphi : [0, \frac{a\sqrt{b^2+1}}{b}[\rightarrow \mathbb{R}^2$, oder genauer geschrieben

$$c \circ \varphi(t) = a \left(1 - \frac{bt}{a\sqrt{b^2+1}}\right) \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{1}{b} \ln\left(1 - \frac{bt}{a\sqrt{b^2+1}}\right)\right) \\ \sin\left(-\frac{1}{b} \ln\left(1 - \frac{bt}{a\sqrt{b^2+1}}\right)\right) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0, \frac{a\sqrt{b^2+1}}{b}[$.

2. In der Übung.

3. Die Länge von $[c]$ ist

$$\begin{aligned} L[c] &\stackrel{(\text{Def.})}{=} \int_0^\infty \|c'(s)\| ds \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) \\ &= \frac{a\sqrt{b^2+1}}{b}. \end{aligned}$$

Für die Krümmung von c brauchen wir c'' : für alle $t \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} c''(t) &= -abe^{-bt} \begin{pmatrix} -b \cos(t) - \sin(t) \\ -b \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix} + ae^{-bt} \begin{pmatrix} b \sin(t) - \cos(t) \\ -b \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix} \\ &= -bc'(t) + ae^{-bt} \begin{pmatrix} b \sin(t) - \cos(t) \\ -b \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so dass für die Krümmung κ von c gilt

$$\begin{aligned} \kappa(t) &\stackrel{(\text{Def.})}{=} \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3} \\ &= \frac{ae^{-bt} \det\left(c'(t), \begin{pmatrix} b \sin(t) - \cos(t) \\ -b \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix}\right)}{a^3(b^2+1)^{\frac{3}{2}}e^{-3bt}} \\ &= \frac{a^2e^{-2bt} \det\begin{pmatrix} -b \cos(t) - \sin(t) & b \sin(t) - \cos(t) \\ -b \sin(t) + \cos(t) & -b \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix}}{a^3(b^2+1)^{\frac{3}{2}}e^{-3bt}} \\ &= \frac{e^{bt}}{a\sqrt{b^2+1}} \end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$.

4. Es ist erstens, zu zeigen, dass das Skalarprodukt $\langle \frac{c(t)}{\|c(t)\|}, \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|} \rangle$ unabhängig von t ist. Nach obigen Rechnungen ergibt sich

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{c(t)}{\|c(t)\|}, \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \frac{ae^{-bt}}{a\sqrt{b^2+1}e^{-bt}} \begin{pmatrix} -b \cos(t) - \sin(t) \\ -b \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}, \end{aligned}$$

was wohl nicht von $t \geq 0$ abhängt. Außerdem bekommen wir dann $\cos(\alpha) = -\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}$, woraus $|\tan(\alpha)| = \sqrt{\frac{1}{\cos(\alpha)^2} - 1} = \frac{1}{b}$ folgt.

9. Aufgabe

Es sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine ebene nach Bogenlänge parametrisierte Kurve.

1. Für $t_0 \in I$ mit $\kappa(t_0) \neq 0$ definiere

$$\begin{aligned} \bar{c} : \left[0, \frac{2\pi}{|\kappa(t_0)|}\right] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \tau &\longmapsto c(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)} \left((1 - \cos(\kappa(t_0)\tau))n(t_0) + \sin(\kappa(t_0)\tau)c'(t_0) \right). \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

- Spur $[\bar{c}]$ ist ein Kreis (der Krümmungskreis in $c(t_0)$) mit dem Mittelpunkt $m(t_0) = c(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}n(t_0)$ und dem Radius $r_0 = \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$.
- Es gilt $c(t_0) = \bar{c}(0)$, $c'(t_0) = \bar{c}'(0)$ und $c''(t_0) = \bar{c}''(0)$. Deuten Sie diese Aussagen geometrisch.
- Es ist $c'''(t_0) = \bar{c}'''(0)$ genau dann, wenn $\kappa'(t_0) = 0$ gilt.

2. Sei $t_0 \in I$ mit $\kappa(t_0) = 0$. Ist die Spur von c in der Nähe von $c(t_0)$ ein Geradensegment? Begründen.

Lösung:

- Es gilt, für alle $\tau \in [0, \frac{2\pi}{|\kappa(t_0)|}]$, $c(\tau) - (c(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}n(t_0)) = \frac{1}{\kappa(t_0)} \left(-\cos(\kappa(t_0)\tau)n(t_0) + \sin(\kappa(t_0)\tau)c'(t_0) \right)$. Auf der linken Seite steht aber eine Standardparametrisierung vom Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius $\frac{1}{|\kappa(t_0)|}$. Das Bild von \bar{c} ist die Verschiebung von diesem Kreis durch den Vektor $c(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}n(t_0)$, insbesondere es ist der Kreis mit Mittelpunkt $c(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}n(t_0)$ und Radius $\frac{1}{|\kappa(t_0)|}$.
 - Wir rechnen nach. Nach Definition von \bar{c} gilt $\bar{c}(0) = c(t_0)$: der oben erwähnte Kreis schneidet die Kurve im Punkt $c(t_0)$ (bemerke, dass er die Kurve noch woanders schneiden kann!). Für alle $\tau \in [0, \frac{2\pi}{|\kappa(t_0)|}]$ gilt

$$\bar{c}'(\tau) = \sin(\kappa(t_0)\tau)n(t_0) + \cos(\kappa(t_0)\tau)c'(t_0),$$

insbesondere für $\tau = 0$ gilt $\bar{c}'(0) = c'(t_0)$: der oben erwähnte Kreis liegt tangential an der Kurve im Punkt $c(t_0)$ (bemerke, dass er die Kurve noch woanders berühren kann!). Nach zweimaligem Ableiten kommt

$$\bar{c}''(\tau) = \kappa(t_0) \left(\cos(\kappa(t_0)\tau)n(t_0) - \sin(\kappa(t_0)\tau)c'(t_0) \right),$$

was $\bar{c}''(0) = \kappa(t_0)n(t_0)$ liefert, deren rechte Seite genau $c''(t_0)$ gleicht (denn c ist nach Voraussetzung nach Bogenlänge parametrisiert): der oben erwähnte Kreis ist tangential bis um die 2. Ordnung an der Kurve im Punkt $c(t_0)$, er hat insbesondere dieselbe Krümmung als c in diesem Punkt.

c) Für alle $\tau \in [0, \frac{2\pi}{|\kappa(t_0)|}]$ gilt

$$\bar{c}'''(\tau) = -\kappa(t_0)^2 \left(\sin(\kappa(t_0)\tau)n(t_0) + \cos(\kappa(t_0)\tau)c'(t_0) \right).$$

Beim Einsetzen von $\tau = 0$ kommt $\bar{c}'''(0) = -\kappa(t_0)^2 c'(t_0)$. Nach Ableiten der Identität $c'' = \kappa n$ kommt aber $c'''(t_0) = \kappa'(t_0)n(t_0) + \kappa(t_0)n'(t_0)$, was zusammen mit der zweiten Frenet-Gleichung

$$c'''(t_0) = \kappa'(t_0)n(t_0) - \kappa(t_0)^2 c'(t_0)$$

liefert. Daraus folgt, dass $c'''(t_0) = \bar{c}'''(0)$ genau dann gilt, wenn $\kappa'(t_0) = 0$ gilt.

2. Gilt $\kappa(t_0) = 0$, so kann man überhaupt keine Aussage über die Gestalt der Kurve c um den Punkt $c(t_0)$ treffen! Betrachte z.B. $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) := \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$ für eine beliebige C^∞ Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, wobei I ein offenes und 0 enthaltendes Intervall ist. Dann ist c regulär parametrisiert und eine kurze Rechnung liefert für das Normalenfeld $n(t) = \frac{1}{\sqrt{1+f'(t)^2}} \begin{pmatrix} -f'(t) \\ 1 \end{pmatrix}$ und für die Krümmung $\kappa(t) = \frac{f''(t)}{(1+f'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$ für alle $t \in I$. Nun kann κ entweder gleich Null in einer Umgebung von 0 sein (ggf. ist die Kurve lokal um $c(0)$ ein Geradensegment), oder kann sein Vorzeichen in 0 wechseln, oder noch $\kappa > 0$ auf $I \setminus \{0\}$ (bzw. $\kappa < 0$ auf $I \setminus \{0\}$) erfüllen. Als Beispiele können die Funktionen $f(t) := t^3$ und $\pm t^4$ angegeben werden.

10. Aufgabe

1. Bestimmen Sie die ebenen nach Bogenlänge parametrisierten Kurven verschwindender Krümmung.
2. Sei $\kappa \in \mathbb{R}$, $\kappa \neq 0$, gegeben. Bestimmen Sie die ebenen nach Bogenlänge parametrisierten Kurven mit Krümmung κ .

Lösung:

1. Jedes Geradensegment mit einer Parametrisierung der Form (sog. Standardparametrisierung) $c_{p,v,I} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto p + tv$ (wobei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall ist, $p, v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = 1$) hat nach Vorlesung verschwindende Krümmung. Aus dem Hauptsatz der Theorie der ebenen Kurven folgt, dass jede nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\tilde{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ verschwindender Krümmung der Form $\tilde{c}(t) = A \circ c_{p,v,I}(t)$ ist für eine orientierungserhaltende euklidische Bewegung A von \mathbb{R}^2 , für ein Paar $(p, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = 1$ und ein Definitionsintervall I . Da \tilde{c} die gleiche Form hat wie $c_{p,v,I}$ (denn $A \circ c_{p,v,I} = c_{A(p),Av,I}$), sind alle nach Bogenlänge parametrisierten Kurven verschwindender Krümmung der Form $c_{p,v,I}$ für ein Paar $(p, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = 1$ und ein Definitionsintervall I .
2. Jeder Kreisbogen von Radius $\frac{1}{|\kappa|}$ und mit einer Parametrisierung der Form $c_{p,I} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c_{p,I}(t) := p + \frac{1}{\kappa} \begin{pmatrix} \cos(\kappa t) \\ \sin(\kappa t) \end{pmatrix}$ (wobei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall ist und $p \in \mathbb{R}^2$), hat nach Vorlesung Krümmung κ . Aus dem Hauptsatz der Theorie der ebenen Kurven

folgt, dass jede nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\tilde{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Krümmung κ der Form $\tilde{c}(t) = A \circ c_{p,I}(t)$ ist für eine orientierungserhaltende euklidische Bewegung A von \mathbb{R}^2 , ein $p \in \mathbb{R}^2$ und ein Definitionsintervall I . Da \tilde{c} die gleiche Form hat wie $c_{p,I}$ (denn $A \circ c_{p,I} = c_{A(p), \frac{\rho}{\kappa} + I}$ wobei B die Drehung vom Winkel θ um 0 ist), sind alle nach Bogenlänge parametrisierten Kurven mit Krümmung κ der Form $c_{p,I}$ für ein $p \in \mathbb{R}^2$ und ein Definitionsintervall I .

11. Aufgabe

Bestimmen Sie die ebenen nach Bogenlänge parametrisierten Kurven, deren Krümmung mit der Bogenlänge übereinstimmt. (Hinweis: 7. Aufgabe)

Lösung: Die Abbildung $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) := \begin{pmatrix} \int_0^t \cos(\frac{u^2}{2}) du \\ \int_0^t \sin(\frac{u^2}{2}) du \end{pmatrix}$ ist nach der 7. Aufgabe eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Eine kurze Rechnung liefert für die Krümmung $\kappa(t) = t$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Kurve c ist also eine Lösung. Sei jetzt ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$, ein $t_0 \in I$ und eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\tilde{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\kappa(t) = t - t_0$ für alle $t \in I$, gegeben. Nach eventueller Parameterverschiebung $\varphi(t) = t + t_0$ können wir annehmen, dass $t_0 = 0$ und $0 \in I$. Aus dem Hauptsatz der Theorie der ebenen Kurven folgt, dass eine orientierungserhaltende euklidische Bewegung A von \mathbb{R}^2 so existiert, dass $\tilde{c} = A \circ c|_I$. Alle Lösungen sind somit von dieser Form.

Bemerkung: I.A. wird eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Krümmung $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$ durch die folgende Formel geliefert:

$$c(t) := \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} \cos(\int_{t_0}^s f(u) du) \\ \sin(\int_{t_0}^s f(u) du) \end{pmatrix} ds,$$

wobei $t_0 \in I$ beliebig gewählt werden kann.

Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
N. Ginoux

WS 2008/9

Geometrie (LGy)

4. Übungsblatt

12. Aufgabe

Sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x) := B(x) + b$ mit $B \in O(2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$. Sei $[c]$ eine ebene Kurve. Zeigen Sie:

1. Ist $[c]$ geschlossen bzw. einfach geschlossen, so ist $[F \circ c]$ auch geschlossen bzw. einfach geschlossen.
2. Falls $[c]$ geschlossen ist gilt für die Umlaufzahlen $n_{[F \circ c]} = \det(B) \cdot n_{[c]}$.

Lösung:

1. Angenommen, die Kurve $[c]$ sei geschlossen. Nach Definition existiert es eine periodische Parametrisierung c von $[c]$. Da aber $F \circ c$ dann auch periodisch und dieselbe Periode hat wie c (denn F ist injektiv), ist auch $[F \circ c]$ geschlossen. Ist $[c]$ einfach geschlossen, so existiert es eine periodische Parametrisierung c mit Periode T so, dass $c|_{[0, T[}$ injektiv ist. Aus der Injektivität von F folgt dann, dass $(F \circ c)|_{[0, T[}$ injektiv ist, somit ist auch $[F \circ c]$ einfach geschlossen.
2. Sei $\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ Winkelfunktion zu einer orientierten Parametrisierung nach Bogenlänge c von $[c]$, d.h. $c'(t) = \begin{pmatrix} \cos(\nu(t)) \\ \sin(\nu(t)) \end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wegen $(F \circ c)' = B \circ c'$ und $B \in O(2)$ ist dann auch $F \circ c$ nach Bogenlänge parametrisiert. Betrachte zwei Fälle:

- i) Falls $\det(B) > 0$, d.h. $\det(B) = 1$, dann ist B eine Drehung um $0 \in \mathbb{R}^2$ mit Winkel θ : es existiert ein $\theta \in \mathbb{R}$ s.d. die Matrix von B bzgl. der Standardbasis von \mathbb{R}^2 gegeben ist durch $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Daraus folgt, für alle $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (F \circ c)'(t) &= B(c'(t)) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\nu(t)) \\ \sin(\nu(t)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\nu(t)) - \sin(\theta)\sin(\nu(t)) \\ \sin(\theta)\cos(\nu(t)) + \cos(\theta)\sin(\nu(t)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\nu(t) + \theta) \\ \sin(\nu(t) + \theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit ist $\tilde{\nu}(t) := \nu(t) + \theta$ eine C^∞ Winkelfunktion für $F \circ c$. Für die Umlaufzahlen gilt dann

$$2\pi n_{[F \circ c]} \stackrel{(\text{Def.})}{=} \tilde{\nu}(L) - \tilde{\nu}(0)$$

$$\begin{aligned}
 &= \nu(L) - \nu(0) \\
 &\stackrel{(\text{Def.})}{=} 2\pi n_{[c]},
 \end{aligned}$$

was die Behauptung in diesem Fall beweist. Bemerke, dass dies insbesondere für den Fall gilt, wenn $B = \text{Id}$ (die Transformation F ist dann eine Verschiebung).

- ii) Falls $\det(B) < 0$, d.h. $\det(B) = -1$, so definiere die neue Transformation $B' := S \cdot B$, wobei S in der kanonischen Basis von \mathbb{R}^2 gegeben ist durch $S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Mit anderen Worten, B' die Nacheinanderausführung von B und der orthogonalen Spiegelung an der e_1 -Achse. Wegen

$$\det(B') = \det(S) \det(B) = 1$$

ist B' eine Drehung wie im Fall i). Aus dem Fall i) folgt dann, dass für die Transformation $F'(x) := B'(x)$ (für alle $x \in \mathbb{R}^2$) gilt $n_{[F' \circ c]} = n_{[c]}$. Es bleibt nur, zu zeigen, dass $n_{[S \circ c]} = -n_{[c]}$, denn wie schon im Fall i) bewiesen ändert sich die Umlaufzahl unter Verschiebungen nicht.

Es gilt aber

$$(S \circ c)'(t) = S(c'(t)) = \begin{pmatrix} \cos(\nu(t)) \\ -\sin(\nu(t)) \end{pmatrix},$$

so dass $\tilde{\nu}(t) := -\nu(t)$ eine C^∞ Winkelfunktion zu $S \circ c$ definiert. Daraus folgt unmittelbar für die Umlaufzahl $n_{[S \circ c]} = -n_{[c]}$, was die Behauptung in diesem Fall beweist.

13. Aufgabe

Sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x) := B(x) + b$ mit $B \in \text{GL}(\mathbb{R}^2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$. Sei $[c]$ eine ebene Kurve. Zeigen Sie:

1. Ist $[c]$ einfach geschlossen, so gilt für das von $[c]$ umschlossene Gebiet Ω

$$A[F(\Omega)] = |\det(B)| \cdot A[\Omega].$$

(Man akzeptiere ohne Beweis, dass $[F \circ c]$ einfach geschlossen ist mit $n_{[F \circ c]} = \text{sgn}(\det(B)) \cdot n_{[c]}$, wobei $\text{sgn}(\det(B)) \in \{-1, 1\}$ das Vorzeichen von $\det(B)$ bezeichnet)

2. Ist $[c]$ ein Kreis, so gilt $L[F \circ c] \geq \sqrt{|\det(B)|} \cdot L[c]$.

Lösung:

1. Sei c eine periodische reguläre Parametrisierung von $[c]$ mit Periode T . Da wir keine Orientierung an $[c]$ festgesetzt haben, können wir annehmen, dass $n_{[c]} = 1$. Dann umschließt $F \circ c$ das Gebiet $F(\Omega)$ im positiven Umlaufsinn falls $\det(B) > 0$ und im negativen falls $\det(B) < 0$. Im Fall $\det(B) > 0$ gilt nach der Vorlesung

$$\begin{aligned}
 A[F(\Omega)] &= \frac{1}{2} \int_0^T \det((F \circ c)(t), (F \circ c)'(t)) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^T \det(B(c(t)) + b, B(c'(t))) dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^T \det(B(c(t)), B(c'(t))) dt + \frac{1}{2} \int_0^T \det(b, B(c'(t))) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \det(B) \cdot \det(c(t), c'(t)) dt + \frac{1}{2} \int_0^T (\det(b, B \circ c))'(t) dt \\
&= \det(B) \frac{1}{2} \int_0^T \det(c(t), c'(t)) dt + \frac{1}{2} [\det(b, B \circ c)(t)]_0^T \\
&= \det(B) A[\Omega],
\end{aligned}$$

da die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \det(b, B \circ c)(t)$ die Bedingung $\det(b, B \circ c)(t+T) = \det(b, B \circ c)(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Dies zeigt die Behauptung für $\det(B) > 0$. Im Fall $\det(B) < 0$ muss einfach ein Vorzeichen an der rechten Seite angebracht werden; die gleichen Rechnungen zeigen dann, dass $A[F(\Omega)] = -\det(B)A[\Omega]$, was die Behauptung im Fall $\det(B) < 0$ beweist.

2. Nach der isoperimetrischen Ungleichung gilt

$$L[F \circ c]^2 \geq 4\pi A[F(\Omega)],$$

und nach 1. gilt $A[F(\Omega)] = |\det(B)| \cdot A[\Omega]$. Da aber $[c]$ ein Kreis ist, gilt die Gleichheit $L[c]^2 = 4\pi A[\Omega]$, somit bekommen wir

$$L[F \circ c]^2 \geq |\det(B)| 4\pi A[\Omega] = |\det(B)| L[c]^2,$$

was zu beweisen war.

14. Aufgabe

Sei c eine ebene nach Bogenlänge parametrisierte periodische Kurve der Länge L . Es gebe ein $R > 0$ so dass für die Krümmung κ der Kurve $0 < \kappa \leq \frac{1}{R}$ gilt. Die Umlaufzahl von c sei mit n_c bezeichnet.

1. Zeigen Sie $L \geq 2\pi R n_c$ und interpretieren Sie diese Ungleichung geometrisch.
2. Für jedes $r \in]0, R[$ definieren wir

$$b_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad b_r(t) := c(t) + r n(t),$$

wobei n das Normalenfeld zu c ist. Zeigen Sie, dass b_r eine geschlossene regulär parametrisierte Kurve definiert mit Länge $L[b_r] = L - 2\pi r n_c$.

Lösung:

1. Nach einem Satz aus der Vorlesung und wegen der Voraussetzung an κ gilt

$$\begin{aligned}
2\pi n_c &= \int_0^L \kappa(t) dt \\
&\leq \int_0^L \frac{1}{R} dt \\
&= \frac{L}{R},
\end{aligned}$$

woraus $L \geq 2\pi R n_c$ folgt.

2. Die Abbildung b_r ist offenbar C^∞ und es gilt nach den Frenet-Gleichungen

$$\begin{aligned} b'_r &= c' + rn' \\ &= c' - r\kappa c' \\ &= (1 - r\kappa)c', \end{aligned}$$

mit $1 - r\kappa \geq 1 - \frac{r}{R} > 0$. Daraus folgt $\|b'_r\| = 1 - r\kappa > 0$, insbesondere muss b_r regulär parametrisiert sein. Da ferner c periodisch mit Periode L ist, erfüllt n die Gleichung $n(t + L) = n(t)$ für alle t , somit erfüllt auch b_r die Gleichung $b_r(t + L) = b_r(t)$ für alle t . Dies zeigt, dass $[b_r]$ geschlossen ist. Es bleibt noch, zu zeigen, dass die Periode von b_r genau L gleicht. Dies beruht auf folgende Behauptung:

Behauptung: ist $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ periodische regulär parametrisierte Kurve mit Periode $T > 0$, so ist $c' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ periodisch mit Periode T .

Beweis der Behauptung: Die Abbildung c' erfüllt offenbar $c'(t + T) = c'(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, was zeigt, dass c' periodisch ist mit Periode $T' = \frac{T}{k}$ für eine positive natürliche Zahl k . Wir zeigen jetzt $k = 1$. Die Gleichung $c'(t + T') = c'(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ impliziert nach Integration die Existenz einer Konstante $d \in \mathbb{R}^n$ mit $c(t + T') - c(t) = d$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Daraus folgt $c(t + kT') - c(t) = kd$ für alle $t \in \mathbb{R}$; da aber c nach Voraussetzung T -periodisch ist, gilt $kd = 0$, also $d = 0$. Dieselbe Voraussetzung liefert dann $T' = T$. \square

Nun wenden wir die Behauptung auf b_r an. Es gilt $b'_r(t) = (1 - r\kappa(t))c'(t)$. Gilt aber $(1 - r\kappa(t + L'))c'(t + L') = (1 - r\kappa(t))c'(t)$ für ein $L' \leq L$ und alle $t \in \mathbb{R}$, so gilt für die Normen $1 - r\kappa(t + L') = 1 - r\kappa(t)$, was nach Voraussetzung nirgends verschwindet. Daraus folgt $c'(t + L') = c'(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, was nach der Behauptung $L' = L$ impliziert. Daraus folgt, dass b_r Periode L hat.

Für die Länge von $[b_r]$ bekommen wir

$$\begin{aligned} L[b_r] &= \int_0^L \|b'_r(t)\| dt \\ &= \int_0^L 1 - r\kappa(t) dt \\ &= L - r \int_0^L \kappa(t) dt \\ &= L - 2\pi r n_c, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

15. Aufgabe

Sei c gegeben durch $c(t) := \begin{pmatrix} \sin(t) \cos(t) \\ \cos(t)^2 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie, dass c eine einfach geschlossene regulär parametrisierte ebene Kurve ist und ermitteln Sie deren Periode.
2. Bestimmen Sie die Länge L von $[c]$ sowie den Flächeninhalt A des von $[c]$ umschlossenen Gebiets.
3. Vergleichen Sie L^2 mit $4\pi A$ und kommentieren Sie das Ergebnis.

Lösung:

1. Die Abbildung c kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$c(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sin(2t)}{2} \\ \frac{(1+\cos(2t))}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix},$$

insbesondere c ist regulär parametrisiert, periodisch mit Periode π , und injektiv auf $[0, \pi[$ (siehe Standardparametrisierung des Kreises).

2. Die Spur von $[c]$ ist der Kreis mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und Radius $\frac{1}{2}$, somit gelten $L[c] = \pi$ sowie $A = \frac{\pi}{4}$.
3. Es gilt $L^2 = \pi^2 = 4\pi \cdot \frac{\pi}{4} = 4\pi A$, was dem Gleichheitsfall in der isoperimetrischen Ungleichung entspricht. Es ist allerdings keine Überraschung denn $[c]$ ist bereits ein Kreis!

Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
N. Ginoux

WS 2008/9

Geometrie (LGy)

5. Übungsblatt

16. Aufgabe

Zeigen Sie, dass es eine eindeutige nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gibt mit $c(-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c'(-1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ und $\kappa(t) = -t - 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie sie.

Lösung: Die Eindeutigkeit folgt aus dem Hauptsatz der Theorie der ebenen Kurven und der Tatsache, dass eine orientierungserhaltende euklidische Bewegung in \mathbb{R}^2 der Form $F(x) = B(x) + b$ (mit $B \in SO(2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$) eindeutig festgelegt ist durch $B(e_1)$ und $F(0)$. Zur Existenz: Wir haben schon in der 11. Aufgabe gesehen, dass $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$d(t) := \begin{pmatrix} \int_0^t \cos(\frac{u^2}{2}) du \\ \int_0^t \sin(\frac{u^2}{2}) du \end{pmatrix}$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve ist mit Krümmung

$\kappa(t) = t$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Eine orientierungserhaltende Parametertransformation der Form $\varphi(t) := t + 1$, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, liefert eine neue nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\tilde{d} = d \circ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Krümmung $\tilde{\kappa}(t) = \kappa \circ \varphi(t) = t + 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach Anwendung einer orthogonalen Spiegelung, z.B. der orthogonalen Spiegelung an der x_1 -Achse, bekommen wir eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\hat{d} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Krümmung $\hat{\kappa}(t) = -t - 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (siehe Bemerkung in der Vorlesung). Explizit

wird \hat{d} gegeben durch $\hat{d}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^{t+1} \cos(\frac{u^2}{2}) du \\ -\int_0^{t+1} \sin(\frac{u^2}{2}) du \end{pmatrix}$. Es bleibt nun $B \in SO_2$ und $b \in \mathbb{R}^2$ so

zu bestimmen, dass $c := b + B \circ \hat{d}$ die verlangten "Anfangsbedingungen" in $t = -1$ erfüllt (denn c hat bereits dieselbe Krümmung wie \hat{d}): wegen $\hat{d}(-1) = d(0) = 0$ soll $c(-1) = b$

gelten, d.h. $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; wegen $\hat{d}'(-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ soll $B(e_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ gelten, d.h. die B

ist die Drehung um $0 \in \mathbb{R}^2$ mit dem Winkel $\frac{3\pi}{4}$, deren Matrix in der kanonischen Basis von \mathbb{R}^2 gegeben ist durch

$$\text{Mat}_{\{e_1, e_2\}}(B) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt bekommen wir für c folgende Abbildung: für alle $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \int_0^{t+1} \cos(\frac{u^2}{2}) du \\ -\int_0^{t+1} \sin(\frac{u^2}{2}) du \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(-\int_0^{t+1} \cos(\frac{u^2}{2}) du + \int_0^{t+1} \sin(\frac{u^2}{2}) du) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\int_0^{t+1} \cos(\frac{u^2}{2}) du + \int_0^{t+1} \sin(\frac{u^2}{2}) du) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Durch die Substitution $s := u - 1$ und nach Anwendung elementarer trigonometrischer Formeln kann c wie folgt umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} c(t) &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(-\int_{-1}^t \cos(\frac{(s+1)^2}{2})ds + \int_{-1}^t \sin(\frac{(s+1)^2}{2})ds) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\int_{-1}^t \cos(\frac{(s+1)^2}{2})ds + \int_{-1}^t \sin(\frac{(s+1)^2}{2})ds) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \int_{-1}^t \cos(\frac{(s+1)^2}{2} + \frac{\pi}{4})ds \\ \int_{-1}^t \sin(\frac{(s+1)^2}{2} + \frac{\pi}{4})ds \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

17. Aufgabe

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie es kurz:

1. Es existiert eine regulär parametrisierte Kurve $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, deren Krümmung $\kappa|_{[0, \pi]} = 0$ und $\kappa|_{[\pi, 2\pi]} = 1$ erfüllt.
2. Ist c eine reguläre periodisch parametrisierte ebene Kurve mit Periode $T > 0$, so ist ihre Krümmung auch periodisch mit Periode höchstens T .
3. Ist $[c]$ eine orientierte geschlossene ebene Kurve mit $|n_{[c]}| = 1$, so ist $[c]$ einfach geschlossen.
4. Ist $[c]$ eine orientierte einfach geschlossene ebene Kurve, so gilt $|n_{[c]}| \leq 1$.
5. Ist $[c]$ eine orientierte geschlossene aber nicht einfach geschlossene ebene Kurve, so gilt $|n_{[c]}| \geq 2$.
6. Ist $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre periodisch parametrisierte ebene Kurve mit $n_{[c]} > 0$, so gilt $\kappa > 0$ auf \mathbb{R} .
7. Ist $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre periodisch parametrisierte ebene Kurve mit $n_{[c]} > 0$, so gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\kappa(t) > 0$.
8. Zu jedem $m \in \mathbb{Z}$ existiert eine orientierte geschlossene ebene Kurve $[c]$ mit $n_{[c]} = m$.
9. Es existiert ein 700m^2 -großes flaches Feld, das mit einem 100m -langen Drahtseil umzäunt werden kann.
10. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert es eine einfach geschlossene Kurve $[c]$ mit $A[\Omega] \leq \varepsilon$ und $L[c] \geq 1$, wobei Ω das von $[c]$ umschlossene Gebiet bezeichnet.

Lösung:

1. FALSCH: die Krümmung einer regulär parametrisierten Kurve ist immer C^∞ , insbesondere stetig.
2. WAHR: die Krümmung κ einer regulären periodisch parametrisierten ebenen Kurve mit Periode $T > 0$ erfüllt $\kappa(t + T) = \kappa(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, somit ist κ periodisch mit Periode kleiner gleich T . Beachte aber, dass diese Periode strikt kleiner als T sein kann. Betrachte z.B. eine Standardparametrisierung von einem Kreis (die

Krümmung ist dann konstant) oder einen “ m -mal-gebeulten-Kreis” (wobei $m \geq 1$), der invariant ist unter der Drehung um den Mittelpunkt mit dem Winkel $\frac{2\pi}{m}$: die Krümmung davon ist dann $\frac{2\pi}{m}$ -periodisch.

3. FALSCH: deformiere z.B. einen Kreis so, dass eine Hälfte die andere in zwei Punkten schneidet.
4. WAHR: der Umlaufsatz impliziert bereits, dass $|n_{[c]}| = 1$ gilt.
5. FALSCH: siehe 3. Frage. Alternativ wähle eine ebene Kurve mit verschwindender Umlaufzahl (z.B. eine sogenannte *Lemniskate*).
6. FALSCH: deformiere z.B. einen positiv orientierten Kreis “nach Innen” in der Nähe eines Punktes.
7. WAHR: sonst würde $\kappa \leq 0$ auf einer Periode gelten, woraus $2\pi n_{[c]} = \int_0^T \kappa(t) dt \leq 0$ folgern würde, im Widerspruch zu $n_{[c]} > 0$.
8. WAHR: skizzieren!
9. WAHR: es gilt $4\pi \cdot 700 = 2800\pi < 2800 \times \frac{7}{2} = 9800 < 10000 = (100)^2$, somit ist die isoperimetrische Ungleichung erfüllt.
10. WAHR: skizzieren!

Bemerkung: Unter welchen Voraussetzungen an ihrer Krümmung ist eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ periodisch mit Periode $T > 0$? Notwendig sind dafür die Identität $\kappa(t+T) = \kappa(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ sowie die Ganzzahligkeit von $\frac{1}{2\pi} \int_0^T \kappa(t) dt$. Diese beiden Bedingungen sind aber nicht hinreichend. Wähle z.B. für ein gegebenes $m \in \mathbb{Z}$ die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) := m + \cos(t)$. Dann ist f 2π -periodisch mit $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 2\pi m \in 2\pi\mathbb{Z}$; die Abbildung $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) := \begin{pmatrix} \int_0^t \cos(\int_0^s f(u) du) ds \\ \int_0^t \sin(\int_0^s f(u) du) ds \end{pmatrix}$ ist dann eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve mit Krümmung f . Es stellt sich aber heraus, dass $[c]$ nicht geschlossen ist!

18. Aufgabe

Seien $\kappa_0 > 0$, $\beta > 0$ fest, und α durch $\alpha := \sqrt{\frac{\kappa_0^2 + \kappa_0 \sqrt{\kappa_0^2 + 4\beta^2}}{2}}$ gegeben. Man definiere

$$c_{\kappa_0, \beta} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) \\ \sin(\alpha t) \\ \beta t \end{pmatrix}.$$

1. Zeigen Sie, dass $c_{\kappa_0, \beta}$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve ist.
2. Berechnen Sie das Normalenfeld zu $c_{\kappa_0, \beta}$ und zeigen Sie, dass die Krümmung von $c_{\kappa_0, \beta}$ konstant gleich κ_0 ist.
3. Berechnen Sie das Binormalenfeld zu $c_{\kappa_0, \beta}$ und zeigen Sie, dass die Windung von $c_{\kappa_0, \beta}$ konstant gleich $\frac{\beta \kappa_0}{\alpha}$ ist.

4. Leiten Sie daraus her, dass es für gegebene $\beta_1, \beta_2 > 0$ mit $\beta_1 \neq \beta_2$ keine euklidische Bewegung A von \mathbb{R}^3 so existiert, dass $A \circ c_{\kappa_0, \beta_1} = c_{\kappa_0, \beta_2}$.

Lösung:

1. Die Abbildung $c_{\kappa_0, \beta}$ ist offenbar C^∞ und es gilt, für alle $t \in \mathbb{R}$,

$$c'_{\kappa_0, \beta}(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{pmatrix} -\alpha \sin(\alpha t) \\ \alpha \cos(\alpha t) \\ \beta \end{pmatrix},$$

insbesondere $\|c'_{\kappa_0, \beta}(t)\| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$. Daraus folgt, dass $c_{\kappa_0, \beta}$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

2. Es gilt, für alle $t \in \mathbb{R}$,

$$c''_{\kappa_0, \beta}(t) = \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{pmatrix} -\cos(\alpha t) \\ -\sin(\alpha t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

insbesondere $\|c''_{\kappa_0, \beta}(t)\| = \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$. Das Normalenfeld zu c wird somit durch

$$n_{\kappa_0, \beta}(t) = \frac{c''_{\kappa_0, \beta}(t)}{\|c''_{\kappa_0, \beta}(t)\|} = \begin{pmatrix} -\cos(\alpha t) \\ -\sin(\alpha t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Die Krümmung von $c_{\kappa_0, \beta}$ an der Stelle t ist gegeben durch $\frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ (insbesondere ist konstant), was zusammen mit der Definition von α die Identität

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} &= \frac{\kappa_0^2 + \kappa_0 \sqrt{\kappa_0^2 + 4\beta^2}}{2\sqrt{\frac{\kappa_0^2 + \kappa_0 \sqrt{\kappa_0^2 + 4\beta^2}}{2} + \beta^2}} \\ &= \frac{\kappa_0(\kappa_0 + \sqrt{\kappa_0^2 + 4\beta^2})}{\sqrt{2\kappa_0^2 + 2\kappa_0 \sqrt{\kappa_0^2 + 4\beta^2} + 4\beta^2}} \\ &= \frac{\kappa_0(\kappa_0 + \sqrt{\kappa_0^2 + 4\beta^2})}{\sqrt{(\kappa_0 + \sqrt{\kappa_0^2 + 4\beta^2})^2}} \\ &= \kappa_0 \end{aligned}$$

und das Ergebnis liefert.

3. Das Binormalenfeld zu $c_{\kappa_0, \beta}$ an der Stelle t ist nach der Vorlesung gegeben durch

$$\begin{aligned} b_{\kappa_0, \beta}(t) &= c'_{\kappa_0, \beta}(t) \times n_{\kappa_0, \beta}(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{pmatrix} -\alpha \sin(\alpha t) \\ \alpha \cos(\alpha t) \\ \beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos(\alpha t) \\ -\sin(\alpha t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{pmatrix} \beta \sin(\alpha t) \\ -\beta \cos(\alpha t) \\ \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt, für alle $t \in \mathbb{R}$,

$$n'_{\kappa_0, \beta}(t) = \alpha \begin{pmatrix} \sin(\alpha t) \\ -\cos(\alpha t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

woraus für die Windung

$$\begin{aligned} \langle n'_{\kappa_0, \beta}(t), b_{\kappa_0, \beta}(t) \rangle &= \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ &= \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ &= \frac{\beta\kappa_0}{\alpha} \end{aligned}$$

folgt, was zu beweisen war.

4. Sind $\beta_1, \beta_2 > 0$ mit $\beta_1 \neq \beta_2$, so gilt auch $\frac{\beta_1}{\alpha_1} \neq \frac{\beta_2}{\alpha_2}$ (nachrechnen). Gäbe es eine euklidische Bewegung A von \mathbb{R}^3 mit $A \circ c_{\kappa_0, \beta_1} = c_{\kappa_0, \beta_2}$, so hätten die Windung von c_{κ_0, β_1} und von c_{κ_0, β_2} denselben Betrag, Widerspruch.

Bemerkung: Somit bekommen wir eine unendliche Familie von nach Bogenlänge parametrisierten Raumkurven, die alle dieselbe und konstante Krümmung haben, die aber nicht ineinander durch Nacheinanderausführung einer euklidischen Bewegung überführt werden können. Dies zeigt einen deutlichen Unterschied mit ebenen Kurven, die allein durch ihre Krümmung und bis auf Nacheinanderausführung einer orientierungserhaltenden euklidischen Bewegung festgelegt sind.

19. Aufgabe

Beweisen Sie die folgenden Formeln für die Berechnung der Windung τ einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit Krümmung $\kappa > 0$:

$$\tau = \frac{\langle c' \times c'', c^{(3)} \rangle}{\kappa^2} \quad (1.8)$$

$$\tau = \frac{\det(c', c'', c^{(3)})}{\|c' \times c''\|^2}. \quad (1.9)$$

Lösung:

Zu (1): Das Ableiten der Identität $c'' = \kappa n$ liefert $c^{(3)} = \kappa' n + \kappa n'$, was zusammen mit den Frenet-Gleichungen

$$c^{(3)} = \kappa' n - \kappa^2 c' + \kappa \tau b$$

liefert. Da $c' \times c'' = \kappa c' \times n = \kappa b$ (siehe Vorlesung) gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{\langle c' \times c'', c^{(3)} \rangle}{\kappa^2} &= \frac{\langle \kappa b, \kappa' n - \kappa^2 c' + \kappa \tau b \rangle}{\kappa^2} \\ &= \tau, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Zu (2): Nach obiger Rechnung ergibt sich einerseits $\|c' \times c''\|^2 = \|\kappa b\|^2 = \kappa^2$, und andererseits

$$\begin{aligned} \det(c', c'', c^{(3)}) &= \det(c', \kappa n, \kappa' n - \kappa^2 c' + \kappa \tau b) \\ &= \kappa^2 \tau \det(c', n, b) \\ &= \kappa^2 \tau, \end{aligned}$$

was unmittelbar zum Ergebnis führt.

Geometrie (LGy)

6. Übungsblatt

20. Aufgabe

Bestimmen Sie die Krümmung und die Windung der Raumkurve $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ für:

$$1. \ c(t) := \begin{pmatrix} a \cosh(t) \\ a \sinh(t) \\ at \end{pmatrix} \quad (a > 0).$$

$$2. \ c(t) := \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Lösung:

1. Die Abbildung c ist offenbar C^∞ und es gilt, für alle $t \in \mathbb{R}$,

$$c'(t) = a \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \\ 1 \end{pmatrix},$$

insbesondere c ist regulär parametrisiert. Ferner gilt

$$c''(t) = a \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

so dass die Krümmung von c gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \kappa(t) &\stackrel{(\text{Def.})}{=} \frac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3} \\ &= \frac{1}{2^{\frac{3}{2}} a^3 \cosh(t)^3} \|a^2 \begin{pmatrix} -\sinh(t) \\ \cosh(t) \\ -1 \end{pmatrix}\| \\ &= \frac{1}{2a \cosh(t)^2} \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Wegen

$$c^{(3)}(t) = a \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt für die Windung von c

$$\begin{aligned}\tau(t) &\stackrel{(\text{Def.})}{=} \frac{\det(c'(t), c''(t), c^{(3)}(t))}{\|c'(t) \times c''(t)\|^2} \\ &= \frac{a^3}{2a^4 \cosh(t)^2} \det \begin{pmatrix} \sinh(t) & \cosh(t) & \sinh(t) \\ \cosh(t) & \sinh(t) & \cosh(t) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2a \cosh(t)^2}\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

2. Die Abbildung c ist offenbar C^∞ und es gilt, für alle $t \in \mathbb{R}$,

$$c'(t) = \begin{pmatrix} e^t(\cos(t) - \sin(t)) \\ e^t(\sin(t) + \cos(t)) \\ 1 \end{pmatrix},$$

insbesondere c ist regulär parametrisiert. Ferner gilt

$$c''(t) = 2e^t \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

so dass die Krümmung von c gegeben ist durch

$$\begin{aligned}\kappa(t) &\stackrel{(\text{Def.})}{=} \frac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3} \\ &= \frac{2e^t}{(1 + 2e^{2t})^{\frac{3}{2}}} \left\| \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ e^t \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{2e^t(1 + e^{2t})^{\frac{1}{2}}}{(1 + 2e^{2t})^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Wegen

$$c^{(3)}(t) = 2e^t \begin{pmatrix} -\sin(t) - \cos(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt für die Windung von c

$$\begin{aligned}\tau(t) &\stackrel{(\text{Def.})}{=} \frac{\det(c'(t), c''(t), c^{(3)}(t))}{\|c'(t) \times c''(t)\|^2} \\ &= \frac{4e^{2t}}{4e^{2t}(1 + e^{2t})} \det \begin{pmatrix} e^t(\cos(t) - \sin(t)) & -\sin(t) & -\sin(t) - \cos(t) \\ e^t(\sin(t) + \cos(t)) & \cos(t) & \cos(t) - \sin(t) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1 + e^{2t}}\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

21. Aufgabe

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie es kurz:

1. Die Krümmung einer periodischen regulär parametrisierten ebenen Kurve mit verschwindender Umlaufzahl nimmt sowohl positive wie negative Werte an.
2. Eine regulär parametrisierte Raumkurve hat genau dann verschwindende Krümmung, wenn ihre Spur in einer Geraden enthalten ist.
3. Eine regulär parametrisierte Raumkurve mit positiver Krümmung hat genau dann verschwindende Windung, wenn ihre Spur in einem Kreis enthalten ist.
4. Haben zwei regulär parametrisierte Raumkurven mit positiver Krümmung dieselbe Windung, so haben sie auch dieselbe Krümmung.
5. Für gegebene unendlich oft differenzierbare Abbildungen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f > 0$ existiert eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve c mit Krümmung f , Windung g und $c(0) = 0$.

Lösung:

1. WAHR: Wegen der Gleichung $2\pi n_c = \int_0^T \kappa(t) dt$ muss $\int_0^T \kappa(t) dt$ verschwinden. Da die Krümmung aber eine stetige Funktion ist, muss sie entweder identisch verschwinden (dann muss Spur($[c]$) in einer Geraden enthalten sein, ggf. ist $[c]$ nicht geschlossen, Widerspruch) oder nicht konstant sein, ggf. kann weder $\kappa \geq 0$ noch $\kappa \leq 0$ gelten, es sei denn $\int_0^T \kappa(t) dt > 0$ bzw. < 0 . Daraus folgt, dass κ sowohl positive wie negative Werte annimmt.
2. WAHR: Eine Richtung wurde schon in der Vorlesung bewiesen. Angenommen, c habe verschwindende Krümmung. Ist c nach Bogenlänge parametrisiert, so gilt nach Definition $\kappa = \|c''\|$, so dass $c'' = 0$. Die Gleichung $c'' = 0$ ist aber dazu äquivalent, dass $c(t) = p + tv$ für ein $p \in \mathbb{R}^3$ und ein $v \in \mathbb{R}^3$ mit $\|v\| = 1$. Ist c nicht nach Bogenlänge parametrisiert, so parametrisiere es nach Bogenlänge um; die Spur ändert sich unter Umparametrisierung nicht.
3. FALSCH: Jede als Raumkurve aufgefasste ebene Kurve mit positiver Krümmung hat verschwindende Windung. Wähle z.B. die Kettenlinie!
4. FALSCH: Alle regulär parametrisierten ebenen Kurven mit positiver Krümmung haben, als Raumkurven aufgefasst, verschwindende Windung.
5. WAHR: Ist eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve \tilde{c} mit Krümmung f und Windung g (deren Existenz vom Hauptsatz der Theorie der Raumkurven gewährleistet ist) gegeben, so ist $c := -\tilde{c}(0) + \tilde{c}$ nach Bogenlänge parametrisiert mit Krümmung f , Windung g und $c(0) = 0$.

22. Aufgabe

Für eine unendlich oft differenzierbare Abbildung $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei f die durch $f(x_1, x_2) :=$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ h(x_1, x_2) \end{pmatrix}$ definierte Abbildung, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Sei eine regulär parametrisierte ebene Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung $c := f \circ \gamma$ eine regulär parametrisierte Raumkurve definiert.
2. Zeigen Sie, dass für die Längen die Ungleichung $L[c|_{[t_0, t_1]}] \geq L[\gamma|_{[t_0, t_1]}]$ gilt für alle $t_0 < t_1$.
3. Geben Sie ein Beispiel von γ und h an, für die die Gleichheit in dieser Ungleichung erfüllt ist.

Lösung:

1. Nach Definition ist f unendlich oft differenzierbar, insbesondere $c = f \circ \gamma$ ist C^∞ . Ferner impliziert die Kettenregel folgende Identitäten für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} c'(t) &= d_{\gamma(t)}f(\gamma'(t)) \\ &= \gamma'_1(t) \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) + \gamma'_2(t) \frac{\partial f}{\partial x_2}(\gamma(t)) \\ &= \gamma'_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x_1}(\gamma(t)) \end{pmatrix} + \gamma'_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x_2}(\gamma(t)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \\ \gamma'_1(t) \frac{\partial h}{\partial x_1}(\gamma(t)) + \gamma'_2(t) \frac{\partial h}{\partial x_2}(\gamma(t)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Norm von c' gilt dann

$$\begin{aligned} \|c'(t)\| &= \sqrt{\gamma'_1(t)^2 + \gamma'_2(t)^2 + \left(\gamma'_1(t) \frac{\partial h}{\partial x_1}(\gamma(t)) + \gamma'_2(t) \frac{\partial h}{\partial x_2}(\gamma(t))\right)^2} \\ &= \sqrt{\|\gamma'(t)\|^2 + \underbrace{\left(\gamma'_1(t) \frac{\partial h}{\partial x_1}(\gamma(t)) + \gamma'_2(t) \frac{\partial h}{\partial x_2}(\gamma(t))\right)^2}_{\geq 0}}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Wegen $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt dann auch $\|c'(t)\| > 0$, somit ist c regulär parametrisierte Raumkurve.

2. Aus (1.10) folgt für die Längen zwischen t_0 und t_1

$$\begin{aligned} L[c|_{[t_0, t_1]}] &\stackrel{(\text{Def.})}{=} \int_{t_0}^{t_1} \|c'(s)\| ds \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\|\gamma'(s)\|^2 + \underbrace{\left(\gamma'_1(s) \frac{\partial h}{\partial x_1}(\gamma(s)) + \gamma'_2(s) \frac{\partial h}{\partial x_2}(\gamma(s))\right)^2}_{\geq 0}} ds \\ &\geq \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(s)\| ds \\ &= L[\gamma|_{[t_0, t_1]}], \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

3. Ist γ beliebig und h konstant (z.B. $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h = 1$), so ist die Gleichheit in der Ungleichung erfüllt, denn das Differential von h verschwindet. Ein nichttriviales Beispiel wäre, für dasselbe γ , die Funktion $h(x_1, x_2) := x_2$.

Bemerkung: Tatsächlich gilt die Gleichheit genau dann, wenn $\text{Spur}([\gamma])$ in einer sogenannten *Niveaulinie* der Funktion h enthalten ist (d.h., $h \circ \gamma$ ist konstant).

23. Aufgabe

Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve, deren Spur in $S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ liegt. Zeigen Sie, dass für die Krümmung κ von c die Ungleichung $\kappa \geq 1$ gilt.

Lösung: Da c nach Bogenlänge parametrisiert ist, gilt nach Definition $\kappa = \|c''\|$ auf I . Da aber c auf der Sphäre S^2 verläuft, gilt $\|c(t)\|^2 = 1$ für alle $t \in I$, was nach Ableiten die Gleichung

$$\langle c(t), c'(t) \rangle = 0$$

für alle $t \in I$ liefert. Durch wiederholtes Ableiten bekommen wir

$$\|c'(t)\|^2 + \langle c(t), c''(t) \rangle = 0$$

für alle $t \in I$. Es gilt $\|c'\| = 1$ (Parametrisierung nach Bogenlänge), somit

$$\langle c(t), c''(t) \rangle = -1 \tag{1.11}$$

für alle $t \in I$. Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt dann

$$\begin{aligned} 1 &= |\langle c(t), c''(t) \rangle| \\ &\leq \|c(t)\| \cdot \|c''(t)\|, \end{aligned}$$

und wegen $\|c(t)\| = 1$ gilt dann $1 \leq \|c''(t)\|$ für alle $t \in I$, was die Ungleichung beweist.

Bemerkung: Die Gleichheit in dieser Ungleichung gilt genau dann, wenn

$$\text{Spur}([c]) \subset S^2 \cap E$$

für eine lineare Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ (d.h. g.d.w. $\text{Spur}([c])$ ein sogenannter *Großkreis* in S^2 ist). Denn die Gleichheit ist genau dann erfüllt, wenn die Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erfüllt ist, d.h. wenn für jedes $t \in I$ ein $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ so existiert, dass $c''(t) = \lambda(t)c(t)$. Aus (1.11) und $\|c\|^2 = 1$ folgt dann $\lambda(t) = -1$ für alle $t \in I$, was zu $c(t) = \cos(t)u + \sin(t)v$ für alle $t \in I$ äquivalent ist, wobei $\{u, v\}$ ein Orthonormalsystem in \mathbb{R}^3 ist (NR: integriere die Differentialgleichung $c'' = -c$ mit den Anfangsbedingungen $c(0) = u \in S^2$ und $c'(0) = v$ mit $v \perp u$ und $\|v\| = 1$). Dies ist aber genau eine Standardparametrisierung eines ebenen Kreises mit Mittelpunkt 0 in \mathbb{R}^3 .

Kapitel 2

Äußere Geometrie von Flächen im \mathbb{R}^3

2.1 Definition einer regulären Fläche

Wir werden etliche äquivalente Definitionen von regulären Flächen geben (siehe Definition 2.1, Proposition 2.11 und Proposition 2.19). Im Mittelpunkt der Beweise der Äquivalenz der verschiedenen Definitionen liegt der folgende Satz aus der Differentialrechnung (siehe z.B. [2]):

Satz (Umkehrsatz): Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nichtleere offene Teilmenge und $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^∞ -Abbildung (d.h., die partielle Ableitung $\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ existiert und ist stetig auf Ω , für alle $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$). Sei $x \in \Omega$.

Angenommen, das Differential von φ in x

$$d_x \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sei bijektiv. Dann existiert eine offene Umgebung U von x in Ω s.d. $\varphi(U)$ offen ist und $\varphi|_U : U \rightarrow \varphi(U)$ ein C^∞ -Diffeomorphismus ist (d.h., $\varphi|_U : U \rightarrow \varphi(U)$ ist C^∞ , bijektiv, und $(\varphi|_U)^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U$ ist auch C^∞).

Dem Differential von φ in x kann seine Matrix in der kanonischen Basis von \mathbb{R}^n zugeordnet werden, die die *Jacobimatrix* von φ in x heißt. Sie ist die $n \times n$ reelle Matrix $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Wir erinnern auch an den zum Umkehrsatz äquivalenten

Satz über implizite Funktionen: Sei $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ nichtleere offene Teilmenge, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^∞ Abbildung und $(x_0, y_0) \in U$ gegeben. Angenommen, die lineare Abbildung

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sei bijektiv. Dann existieren eine offene Umgebung der Form $V \times W$ von (x_0, y_0) in U und eine C^∞ Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ so, dass gilt:

$$\left| \begin{array}{l} (x, y) \in V \times W \\ f(x, y) = f(x_0, y_0) \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} x \in V \\ y = \varphi(x). \end{array} \right.$$

Hiermit bezeichnet $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ das Differential im Punkt y_0 der in einer Umgebung von y_0 definierten Abbildung $y \mapsto f(x_0, y)$.

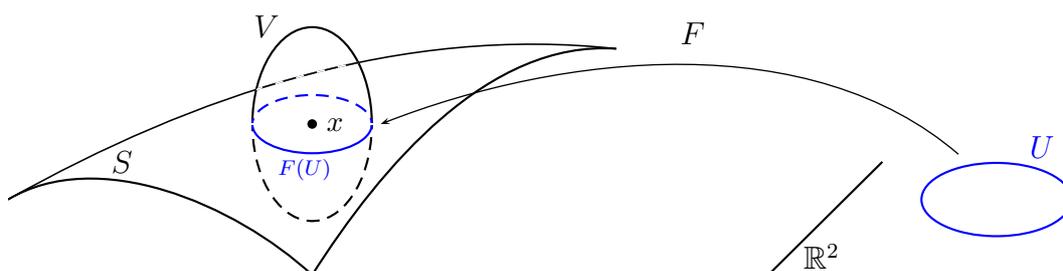
2.1.1 Durch Parametrisierungen

Definition 2.1 Eine nichtleere Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt reguläre Fläche falls für jedes $x \in S$

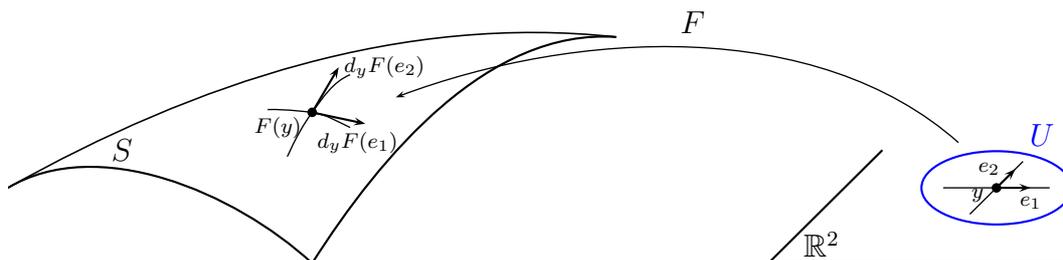
- eine offene Umgebung V von x im \mathbb{R}^3 ,
- eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$,
- eine C^∞ -Abbildung $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$

so existieren, dass

- i) für alle $y \in U$, die Abbildung $d_y F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ injektiv ist,
- ii) $F(U) = S \cap V$,
- iii) $F : U \longrightarrow S \cap V$ Homöomorphismus ist (d.h., $F : U \longrightarrow S \cap V$ ist stetig, bijektiv, und $F^{-1} : S \cap V \longrightarrow U$ ist auch stetig).



Bemerkung 2.2 Die Bedingung “ $d_y F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ist injektiv für alle $y \in U$ ” stellt sicher, dass die zwei Veränderlichen, die S lokal beschreiben, unabhängig voneinander sind. Wenn man lediglich “ $d_y F \neq 0$ für alle $y \in U$ ” voraussetzen würde, könnte auch z.B. eine Gerade - als Bild von $F(x_1, x_2) := p + x_1 v$ (mit $p, v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$) - auch Fläche sein!



Definition 2.3 Das Tripel (U, F, V) aus Definition 2.1 heißt lokale Parametrisierung von S um x .

Beispiele 2.4

1. Betrachte eine affine Ebene $S := p + E_0$ (wobei $p \in \mathbb{R}^3$ und $E_0 \subset \mathbb{R}^3$ 2-dimensionaler Untervektorraum ist). Sei $\{u, v\}$ eine Basis von E_0 . Setze $U := \mathbb{R}^2$, $V := \mathbb{R}^3$ und

$$F : U \longrightarrow V$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \longmapsto p + y_1 u + y_2 v.$$

Dann ist S reguläre Fläche und $(\mathbb{R}^2, F, \mathbb{R}^3)$ ist eine Parametrisierung von S um jeden ihrer Punkte, d.h., $(\mathbb{R}^2, F, \mathbb{R}^3)$ ist eine sogenannte *globale* Parametrisierung von S . *Begründung:* \mathbb{R}^2 ist natürlich offen im \mathbb{R}^2 (bzw. \mathbb{R}^3 ist offen in sich); die Abbildung F ist C^∞ (weil F affin-linear ist), es gelten $d_y F(X) = X_1 u + X_2 v$ für alle $y \in U$ und $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, insbesondere $d_y F(X) = 0 \iff X = 0$, d.h., $d_y F$ ist injektiv; die Abbildung $F : U \longrightarrow S = S \cap V$ ist bijektiv (klar), stetig (da C^∞), und ihre Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$p + x_1 u + x_2 v \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in U,$$

was offenbar eine stetige Abbildung $S \longrightarrow U$ ist. Daraus folgt, dass S eine reguläre Fläche ist.

2. Betrachte einen Funktionsgraphen

$$S := \text{Graph}(h)$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ h(x_1, x_2) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in U \right\},$$

wobei $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine feste C^∞ -Funktion auf einer (nichtleeren) offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ ist. Setze

$$F : U \rightarrow V := \mathbb{R}^3 \\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ h(y_1, y_2) \end{pmatrix}.$$

Dann ist S reguläre Fläche und (U, F, \mathbb{R}^3) ist eine globale Parametrisierung von S . *Begründung:* U ist offen im \mathbb{R}^2 ; die Abbildung F ist C^∞ (alle Komponentenfunktionen $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto y_1$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto y_2$ und $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto h(y_1, y_2)$ von F sind nämlich C^∞), es gilt

$$\begin{aligned} d_y F(X) &= X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1}(y) + X_2 \frac{\partial F}{\partial x_2}(y) \\ &= X_1(1, 0, \frac{\partial h}{\partial x_1}(y)) + X_2(0, 1, \frac{\partial h}{\partial x_2}(y)) \end{aligned}$$

für alle $y \in U$ und $X \in \mathbb{R}^2$, insbesondere $d_y F(X) = 0 \iff X = 0$, d.h., $d_y F$ ist injektiv; die Abbildung $F : U \rightarrow S = S \cap V$ ist stetig (sie ist bereits C^∞), bijektiv da sie eine Umkehrabbildung besitzt, nämlich

$$(\pi_{\mathbb{R}^2})|_{F(U)} : F(U) \rightarrow U \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ h(x_1, x_2) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

und $\pi_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ist stetig, also $F : U \rightarrow S$ ist ein Homöomorphismus. Daraus folgt, dass S eine reguläre Fläche ist.

3. Betrachte "die Sphäre"

$$S := S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Die Menge S ist die euklidische Sphäre vom Radius 1 um den Ursprung $0 \in \mathbb{R}^3$ (beachte, dass $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$ für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt). Diese

Benennung kann man ein bisschen komisch finden, da es nicht nur eine Sphäre in \mathbb{R}^3 gibt, sondern unendlich viele! Man könnte ja jede Sphäre - mit beliebigem positivem Radius und beliebigem Zentrum - betrachten; die Beschreibung wäre aber analog, deswegen schränkt man sich auf diesen Fall ein und nennt S^2 "die" Sphäre.

Im Unterschied zu einer affinen Ebene oder einem Funktionsgraphen gibt es hier *keine* globale Parametrisierung von S . Der Grund dafür ist rein topologisch: nach dem Satz von Heine-Borel (siehe z.B. [5]) ist die Sphäre *kompakt*, was keine nicht-leere offene Teilmenge des \mathbb{R}^2 ist; es kann deswegen kein Homöomorphismus von $U \subset \mathbb{R}^2$ auf S existieren. Somit müssen wir auf jeden Fall mit *mehreren* (lokalen)

Parametrisierungen auskommen.

Die einfachste Beschreibung geht wie folgt. Setze, für $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$V_i^+ := \{x \in \mathbb{R}^3, x_i > 0\} \text{ bzw. } V_i^- := \{x \in \mathbb{R}^3, x_i < 0\}$$

und $U_i := U := \{y \in \mathbb{R}^2, y_1^2 + y_2^2 < 1\}$. Die V_i^\pm sind offene Halbräume in \mathbb{R}^3 und U ist die offene euklidische Scheibe von Radius 1 um $0 \in \mathbb{R}^2$.

Definiere folgende Abbildungen:

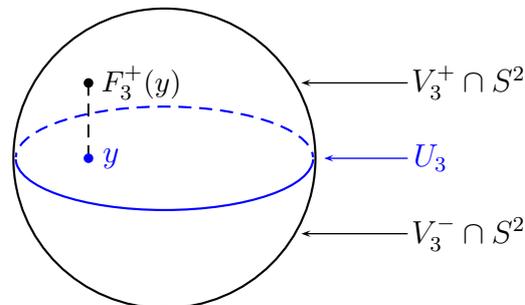
$$\begin{aligned} F_1^\pm : U_1 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ y &\longmapsto \begin{pmatrix} \pm\sqrt{1-y_1^2-y_2^2} \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} F_2^\pm : U_2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ y &\longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \pm\sqrt{1-y_1^2-y_2^2} \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F_3^\pm : U_3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ y &\longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \pm\sqrt{1-y_1^2-y_2^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Bemerke zuerst, dass die V_i^\pm 's die Sphäre wohl überdecken, d.h., jedes $x \in S$ ist in einem V_i^\pm enthalten (denn $\|x\| = 1$ liefert $x \neq 0$ und daher entweder $x_1 \neq 0$ oder $x_2 \neq 0$ oder $x_3 \neq 0$). Die F_i^\pm 's sind nach Definition C^∞ -Abbildungen. In Matrixdarstellung bzgl. der kanonischen Basis $\{e_1, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 gilt, für alle $y \in U$,

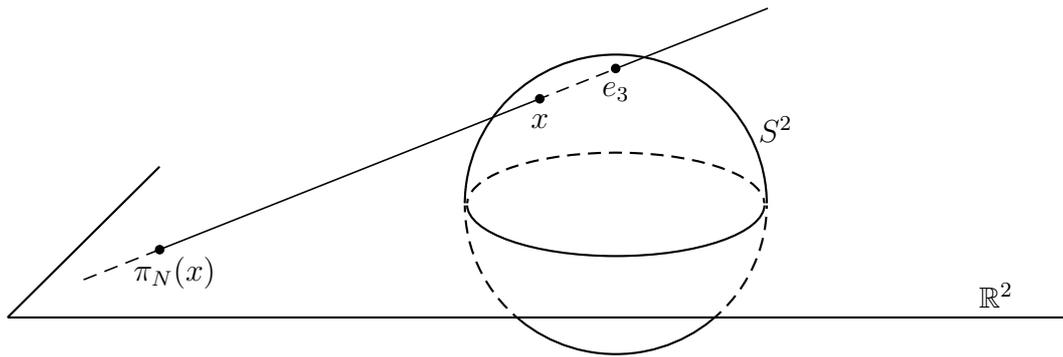
$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\{e_1, e_2\}}(d_y F_1^\pm) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(y) \mid \frac{\partial F}{\partial x_2}(y) \right) \\ &= \begin{pmatrix} \mp \frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} & \mp \frac{y_2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Matrix hat Rang 2 (die Spalten sind linear unabhängig), somit ist $d_y F_1^\pm : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ injektiv. Analog gilt es für F_2^\pm und F_3^\pm . Es ist nicht schwierig, zu sehen, dass $F_i^\pm(U_i) = S \cap V_i^\pm$ und dass $F_i^\pm : U_i \rightarrow S \cap V_i^\pm$ Homöomorphismus ist. Die Umkehrabbildung kann jeweils explizit angegeben werden. Z.B. die Abbildung $(\pi_{23})|_{S \cap V_1^\pm} : S \cap V_1^\pm \rightarrow U_1$, wobei $\pi_{23} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, ist die Umkehrabbildung von F_1^\pm und ist offensichtlich stetig, da π_{23} selber stetig ist. Daraus folgt, dass die (U_i, F_i^\pm, V_i^\pm) 's lokale Parametrisierungen von S sind, und dass S eine reguläre Fläche ist.

- 3'. Betrachte wiederum die Sphäre $S := S^2$. Diesmal wollen wir sie mit (nur) *zwei* lokalen Parametrisierungen (statt sechs) beschreiben. Setze

$$V_N := \{x \in \mathbb{R}^3, x_3 < 1\} \text{ bzw. } V_S := \{x \in \mathbb{R}^3, x_3 > -1\}.$$

Definiere die Abbildungen $\pi_N : S^2 \setminus \{e_3\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ bzw. $\pi_S : S^2 \setminus \{-e_3\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (hierbei $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$) durch: für jedes $x \in S^2 \setminus \{e_3\}$ bzw. $S^2 \setminus \{-e_3\}$ sei $\pi_N(x)$ bzw. $\pi_S(x)$ der Schnittpunkt zwischen der Geraden $e_3 + \mathbb{R}(x - e_3)$ bzw. $-e_3 + \mathbb{R}(x + e_3)$ und der Ebene $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$.



Die Abbildungen π_N und π_S können explizit ausgedrückt werden. Z.B. für π_N muss man ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so finden, dass $e_3 + \lambda(x - e_3) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ liegt, d.h., so dass die dritte Koordinate davon verschwindet. Dies führt zu $1 + \lambda(x_3 - 1) = 0$, d.h., $\lambda = \frac{1}{1-x_3}$ (dies ist wohldefiniert wegen $x \neq e_3$, insbesondere $x_3 < 1$). Somit gilt

$$\begin{aligned} \pi_N(x) &= e_3 + \frac{1}{1-x_3}(x - e_3) \\ &= \frac{1}{1-x_3}(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Analog gilt $\pi_S(x) = \frac{1}{1+x_3}(x_1, x_2)$ für jedes $x \in S^2 \setminus \{-e_3\}$. Setze jetzt $U_N := U_S := \mathbb{R}^2$ und $F_N := \pi_N^{-1} : U_N \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ bzw. $F_S := \pi_S^{-1} : U_S \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Es gilt

$$F_N(y) = \frac{1}{1 + \|y\|^2} \begin{pmatrix} 2y_1 \\ 2y_2 \\ \|y\|^2 - 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } F_S(x) = \frac{1}{1 + \|y\|^2} \begin{pmatrix} 2y_1 \\ 2y_2 \\ 1 - \|y\|^2 \end{pmatrix}$$

für alle $y \in \mathbb{R}^2$ (*Übungsaufgabe!*). Wir weisen nach, dass (U_N, F_N, V_N) und (U_S, F_S, V_S) lokale Parametrisierungen von S^2 sind.

Die Abbildungen $F_N : U_N \rightarrow S^2 \setminus \{e_3\} = S^2 \cap V_N$ und $F_S : U_S \rightarrow S^2 \setminus \{-e_3\} = S^2 \cap V_S$ sind Homöomorphismen, weil π_N und π_S offenbar stetig sind. Für jede $y \in \mathbb{R}^2$ und $X \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$d_y F_N(X) = \frac{2}{(1 + \|y\|^2)^2} \begin{pmatrix} (1 + \|y\|^2)X_1 - 2\langle y, X \rangle y_1 \\ (1 + \|y\|^2)X_2 - 2\langle y, X \rangle y_2 \\ 2\langle y, X \rangle \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

und somit

$$\begin{aligned} d_y F_N(X) = 0 &\iff \langle y, X \rangle = 0 \text{ und } (1 + \|y\|^2)X - 2\langle y, X \rangle y = 0 \\ &\iff \langle y, X \rangle = 0 \text{ und } \underbrace{(1 + \|y\|^2)}_{>0} X = 0 \\ &\iff X = 0, \end{aligned}$$

d.h., $d_y F_N$ ist injektiv. Analog ist $d_y F_S$ injektiv. Daraus folgt, dass (U_N, F_N, V_N) und (U_S, F_S, V_S) lokale Parametrisierungen von S^2 sind. Da jeder Punkt von S^2 entweder in V_N oder in V_S enthalten ist, können wir daraus folgern, dass S^2 eine reguläre Fläche ist.

Definition 2.5 Die Abbildung $\pi_N : S^2 \setminus \{e_3\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ bzw. $\pi_S : S^2 \setminus \{-e_3\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt stereographische Projektion vom Nordpol bzw. Südpol.

2.1.2 Durch lokale Karten

In diesem Abschnitt wird bewiesen werden, dass eine reguläre Fläche anders beschrieben werden kann, und zwar durch *lokale Karten* (siehe Definition 2.12). Dafür brauchen wir allgemeinen Stoff.

Definition 2.6 Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 1$, und Ω eine nichtleere offene Teilmenge von \mathbb{R}^m . Eine Abbildung $\iota : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt genau dann Immersion, wenn sie C^∞ ist und wenn $d_x \iota : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv ist für alle $x \in \Omega$.

Bemerkung 2.7 Insbesondere muss $m \leq n$ dafür gelten, dass eine Immersion $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert.

Beispiele 2.8

1. Sei $n \geq m$. Sieht man \mathbb{R}^m als Teilmenge von \mathbb{R}^n durch $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m \times \{0\}_{\mathbb{R}^{n-m}}$, so ist die Inklusionsabbildung $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Immersion, für alle $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen.
2. Jede lokale Parametrisierung $F : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$ einer Fläche ist eine Immersion $U \rightarrow \mathbb{R}^3$ (eine lokale Parametrisierung ist eine Immersion, die ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist).

3. Jede regulär parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (wobei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall ist) ist eine Immersion, denn es gilt für alle $t \in I$ und $X \in \mathbb{R}$:

$$d_t c(X) = Xc'(t),$$

und wegen $c'(t) \neq 0$ muss dann $d_t c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv sein.

Bemerkung 2.9 Beachte, dass eine Immersion nicht injektiv sein muss! Z.B. $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$, ist wohl eine Immersion, ist aber nicht injektiv.

Immersionen sind zwar nicht notwendigerweise injektiv, immer aber *lokale* Homöomorphismen auf ihr Bild:

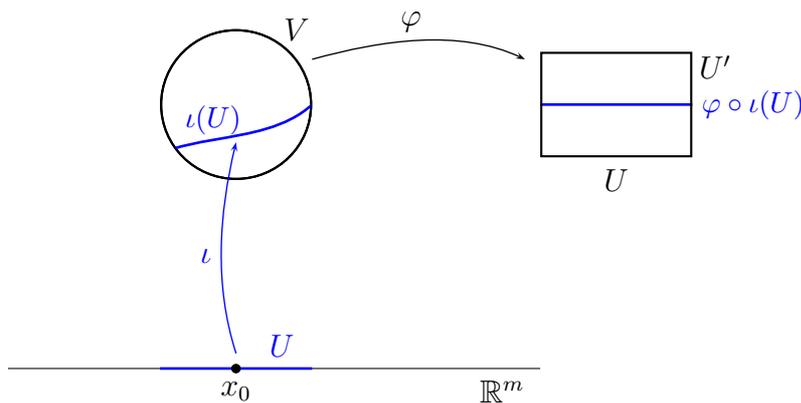
Satz 2.10 (Satz über Immersionen) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ eine (nichtleere) offene Teilmenge und $\iota : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^∞ Abbildung. Sei $x_0 \in \Omega$. Angenommen, die Abbildung $d_{x_0} \iota : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei injektiv. Dann existieren

- eine offene Umgebung U von x_0 in Ω und eine offene Umgebung U' von 0 in \mathbb{R}^{n-m} ,
- eine offene Umgebung V von $\iota(x_0)$ in \mathbb{R}^n ,
- ein C^∞ -Diffeomorphismus $\varphi : V \rightarrow U \times U'$

s.d. $\iota(U) \subset V$ und

$$\varphi \circ \iota(x) = (x, 0) \in \mathbb{R}^n$$

für alle $x \in U$ gelten. Insbesondere ist $\iota|_U : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion.



Für Anhänger von Diagrammen: Satz 2.10 impliziert, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & & V \\
 & \nearrow \iota & \downarrow \varphi \\
 U & \xrightarrow{\text{Inkl.}} & U \times U'
 \end{array}$$

kommutiert (hierbei bezeichnet Inkl. die Abbildung $x \mapsto (x, 0)$).

Beweis des Satzes über Immersionen: Da $d_{x_0}\iota : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektive lineare Abbildung ist, bildet $\{d_{x_0}\iota(e_1), \dots, d_{x_0}\iota(e_m)\}$ ein System linear unabhängiger Vektoren in \mathbb{R}^n (hierbei wird mit $\{e_1, \dots, e_m\}$ die kanonische Basis von \mathbb{R}^m bezeichnet). Ergänze dies zu einer Basis

$$\{d_{x_0}\iota(e_1), \dots, d_{x_0}\iota(e_m), v_{m+1}, \dots, v_n\}$$

von \mathbb{R}^n und betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : \Omega \times \mathbb{R}^{n-m} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, \alpha) &\longmapsto i(x) + \sum_{j=m+1}^n \alpha_j v_j \quad (\text{mit } \alpha = (\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n-m}). \end{aligned}$$

Die Abbildung ψ ist nach Definition C^∞ , und für jedes $X \in \mathbb{R}^m$ und $\beta \in \mathbb{R}^{n-m}$ gilt

$$d_{(x_0, 0)}\psi(X, \beta) = d_x\iota(X) + \sum_{j=1}^m \beta_j v_j,$$

insbesondere $d_{(x_0, 0)}\psi(X, \beta) = 0 \iff (X, \beta) = 0$ (nach Wahl der v_j 's), d.h., $d_{(x_0, 0)}\psi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \cong \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist injektiv, und somit ein Isomorphismus. Aus dem Umkehrsatz folgt die Existenz einer offenen Umgebung von $(x_0, 0)$ - o.B.d.A. der Form $U \times U'$, wobei U offene Umgebung von x_0 in Ω ist und U' offene Umgebung von 0 in \mathbb{R}^{n-m} ist - s.d. $\psi(U \times U') \subset \mathbb{R}^n$ offen ist und $\psi|_{U \times U'} : U \times U' \rightarrow \psi(U \times U')$ ein (C^∞ -)Diffeomorphismus ist. Setze $\varphi := (\psi|_{U \times U'})^{-1}$ und $V := \psi(U \times U')$. Dann ist V offene Umgebung von $\iota(x_0) = \iota(x_0) + 0$, $\iota(U) = \psi(U \times \{0\}) \subset V$, $\varphi : V \rightarrow U \times U'$ ist ein Diffeomorphismus auf $U \times U'$ (offene Teilmenge von \mathbb{R}^n) und es gilt

$$\begin{aligned} \varphi \circ \iota(x) &= (\psi|_{U \times U'})^{-1}(\iota(x) + 0) \\ &= (x, 0_{\mathbb{R}^{n-m}}), \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Interpretation: Bis auf Dahinterschaltung von Diffeomorphismen gleicht eine Immersion lokal (aber i.A. *nur* lokal) immer einer Inklusion (wie im Beispiel 2.8.1).

Proposition 2.11 *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ nichtleere Teilmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) S ist reguläre Fläche.

ii) Für jedes $x \in S$ existiert eine offene Umgebung V von x in \mathbb{R}^3 und ein (C^∞ -)Diffeomorphismus $\varphi : V \rightarrow \varphi(V)$ auf eine offene Teilmenge $\varphi(V) \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(V \cap S) = \varphi(V) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}).$$

Beweis:

“i) \implies ii)”: Angenommen, S sei reguläre Fläche. Sei $x \in S$. Dann existiert eine offene

Teilmenge $U' \subset \mathbb{R}^2$, eine offene Umgebung V' von x in \mathbb{R}^3 und eine Immersion $F : U' \rightarrow \mathbb{R}^3$ s.d. $F(U') = V' \cap S$ und $F : U' \rightarrow F(U')$ ein Homöomorphismus ist. Setze $x_0 := F^{-1}(x)$. Aus Satz 2.10 (angewendet auf $F : U' \rightarrow \mathbb{R}^3$) folgt die Existenz einer offenen Umgebung U bzw. U'_0 von x_0 in U' bzw. von 0 in \mathbb{R} , einer offenen Umgebung V_0 von $F(x_0) = x$ in \mathbb{R}^3 , und eines Diffeomorphismus $\varphi : V_0 \rightarrow U \times U'_0$ s.d. $F(U) \subset V_0$ und $\varphi \circ F(y) = (y, 0)$ für alle $y \in U$. Beachte jetzt, dass $F(U) = V_0 \cap S$ nicht notwendigerweise gilt. Diese Schwierigkeit kann man allerdings durch das Verkleinern von V_0 beheben: sei $V \subset V_0 \cap V'$ offen s.d.

$$V \cap S = F(U)$$

(da $F|_{U'} : U' \rightarrow F(U')$ Homöomorphismus ist, ist $F(U)$ offen in S). Dann ist $\varphi(V)$ eine offene Umgebung von $U \times \{0\}$ in $U \times U'$ (wegen $\varphi(V) \ni \varphi \circ F(y) = (y, 0)$ für alle $y \in U$) und $\varphi : V \rightarrow \varphi(V)$ ist ein (C^∞ -) Diffeomorphismus. Es gilt auch

$$\varphi(V) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \subset (U \times U') \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = U \times \{0\} \subset \varphi(V) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}),$$

und somit $U \times \{0\} = \varphi(V) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \varphi(V \cap S) &= \varphi(F(U)) \\ &= U \times \{0\} \\ &= \varphi(V) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}), \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

“*i*” \implies “*i*”): Sei $x \in S$ und (V, φ) wie in den Voraussetzungen. Setze

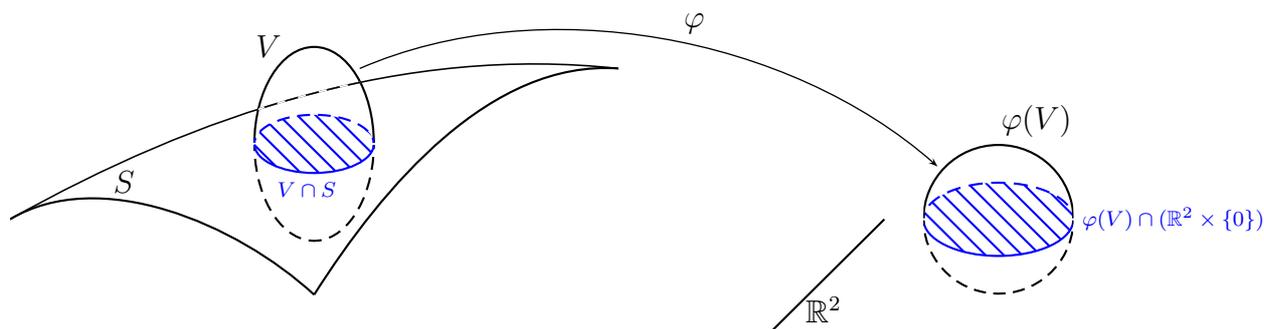
$$U := \varphi(V) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad F(y) := \varphi^{-1}(y, 0)$$

für alle $y \in U$. Dann ist $F : U \rightarrow V$ eine C^∞ -Abbildung, $d_y F(Y) = d_{(y,0)} \varphi^{-1}(Y, 0)$ für alle $y \in U$ und $Y \in \mathbb{R}^2$ (insbesondere ist $d_y F$ injektiv), $F(U) = \varphi^{-1}(\varphi(V) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})) = V \cap S$ (nach Voraussetzungen an φ) und $F : U \rightarrow V \cap S$ ist Homöomorphismus (da φ Homöomorphismus ist). Daraus folgt, dass (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S ist. Dies gilt für alle $x \in S$, somit ist S eine reguläre Fläche. \square

Definition 2.12 Sei S eine reguläre Fläche in \mathbb{R}^3 . Sei (V, φ) gegeben durch

- $V \subset \mathbb{R}^3$ ist offen mit $V \cap S \neq \emptyset$,
- $\varphi : V \rightarrow \varphi(V)$ ist (C^∞ -)Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge $\varphi(V) \subset \mathbb{R}^3$,
- $\varphi(V \cap S) = \varphi(V) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$.

Dann heißt das Paar (V, φ) lokale Karte von S .



Die Benennung kommt offensichtlich aus der Erdkunde her, in welcher die Oberfläche der Erde durch Karten beschrieben wird.

Bemerkungen 2.13

1. Und in unserem Fall ist es auch so gemeint! Aus Proposition 2.11 folgt, dass jede reguläre Fläche durch eine Menge lokaler Karten beschrieben werden kann.
2. Aus Proposition 2.11 folgt auch, dass jede nichtleere *offene* Teilmenge einer regulären Fläche noch eine reguläre Fläche ist. Ist nämlich S' eine offene Teilmenge einer regulären Fläche S , so existiert eine offene Teilmenge Ω von \mathbb{R}^3 mit $S' = \Omega \cap S$. Ist nun (V, φ) eine lokale Karte von S mit $V \cap S' \neq \emptyset$, so ist $(V \cap \Omega, \varphi|_{V \cap \Omega})$ lokale Karte von S' (beachte dabei, dass $V \cap \Omega$ wohl offen in \mathbb{R}^3 ist).
Ist umgekehrt eine Teilmenge S' einer regulären Fläche S selbst reguläre Fläche, so ist sie offen in S , denn: Ist S' reguläre Fläche, so gibt es um jeden Punkt $x \in S'$ eine lokale Karte (V', φ') von S' ; da S reguläre Fläche ist, existiert eine lokale Karte (V, φ) von S um x . Die Abbildung $\varphi \circ \varphi'^{-1} : \varphi'(V \cap V' \cap S') \rightarrow \varphi(V \cap V' \cap S')$ ist C^∞ und ihre Differentialabbildung ist in jedem Punkt ein Automorphismus von \mathbb{R}^2 . Mit dem Umkehrsatz folgt, dass $\varphi(V \cap V' \cap S')$ offen im \mathbb{R}^2 ist, somit ist $V \cap V' \cap S'$ offen in S . Da $V \cap V' \cap S'$ eine Umgebung von x in S' ist, folgt insgesamt, dass S' offen in S ist.
3. Sind (V, φ) und (W, ψ) lokale Karten von S mit $V \cap W \cap S \neq \emptyset$, so ist

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(V \cap W \cap S) \rightarrow \psi(V \cap W \cap S)$$

ein Diffeomorphismus (da φ und ψ Diffeomorphismen sind). Dies führt zum Begriff von *abstrakter Mannigfaltigkeit*, siehe Vorlesung *Differentialgeometrie 1*.

2.1.3 Durch Submersionen

Jetzt wollen wir einen noch anderen Ansatz angeben, der es erlaubt, *Niveaumengen* einer reellwertigen Funktion auf \mathbb{R}^3 behandeln zu können.

Definition 2.14 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen und nichtleer. Eine Abbildung $\pi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Submersion falls sie C^∞ ist und $d_x\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ surjektiv ist für alle $x \in \Omega$.

Bemerkung 2.15 Damit eine Submersion $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert muss insbesondere $m \geq n$ gelten, .

Beispiele 2.16

1. Sei $m \geq n$ und π die lineare Projektion auf die n -letzten Koordinaten, d.h., $\pi(x) := (x_{m-n+1}, \dots, x_m)$ für alle $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Wegen $d_x\pi = \pi$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$, und weil $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ surjektiv ist, ist $\pi|_\Omega : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Submersion.
2. Eine reelle C^∞ -Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann eine Submersion, wenn $d_x f \neq 0$ für alle $x \in \Omega$. Denn: eine Linearform auf \mathbb{R}^m entweder verschwindet identisch oder ist surjektiv.

Bemerkung 2.17 Eine Submersion muss nicht surjektiv sein. Z.B. $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Submersion (wegen $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$), ist aber offenbar nicht surjektiv.

Wie im Fall Immersionen, gleicht - bis auf "Parametertransformation" durch Diffeomorphismen - eine Submersion lokal immer einer linearen Projektion wie im Beispiel 2.16.1:

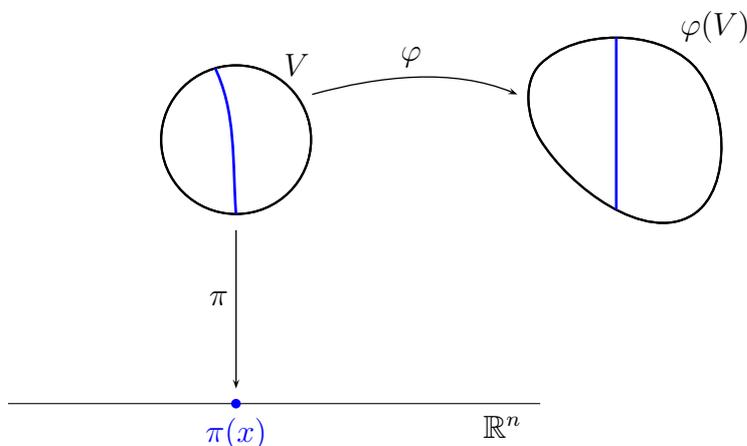
Satz 2.18 (Satz über Submersionen) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ eine nichtleere offene Teilmenge und $\pi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^∞ Abbildung. Sei $x \in \Omega$. Angenommen, die Abbildung $d_x\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei surjektiv. Dann existiert

- eine offene Umgebung V von x in Ω ,
- ein Diffeomorphismus $\varphi : V \rightarrow \varphi(V)$ auf eine offene Teilmenge $\varphi(V)$ von \mathbb{R}^m ,

s.d.

$$\pi \circ \varphi^{-1}(y) = (y_{m-n+1}, \dots, y_m)$$

für alle $y \in \varphi(V)$ gilt. Insbesondere ist $\pi|_V : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Submersion.



Für Anhänger von Diagrammen: Satz 2.18 impliziert, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R}^n \\ & \nearrow \pi & \uparrow \pi_n^m \\ V & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(V) \end{array}$$

kommutiert, wobei π_n^m die (lineare) Projektion auf die n -letzten Koordinaten bezeichnet.

Beweis des Satzes über Submersionen: Schreibe $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$, wobei $\pi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die i -te Koordinatenfunktion von π ist.

Behauptung: Die Linearformen $d_x\pi_1, \dots, d_x\pi_n$ sind linear unabhängig.

Beweis der Behauptung: Wegen $d_x\pi = (d_x\pi_1, \dots, d_x\pi_n)$ gilt

$$\begin{aligned} \text{Ker}(d_x\pi) &= \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(d_x\pi_i) \\ &= \{d_x\pi_1, \dots, d_x\pi_n\}^o \\ &= \text{Span}(d_x\pi_1, \dots, d_x\pi_n)^o. \end{aligned}$$

Hierbei wird mit F^o der Polarraum (oder Annulator) zu einer Teilmenge F von $(\mathbb{R}^m)^*$ bezeichnet. Zur Erinnerung wird F^o definiert durch

$$F^o := \{x \in \mathbb{R}^m \text{ s.d. } f(x) = 0 \ \forall f \in F\} \subset \mathbb{R}^m.$$

Aus der Linearalgebra wissen wir aber, dass falls F Untervektorraum von $(\mathbb{R}^m)^*$ ist, gilt $\dim(F) + \dim(F^o) = m$. In unserem Fall bedeutet dies

$$\begin{aligned} \dim(\text{Span}(d_x\pi_1, \dots, d_x\pi_n)) &= m - \dim(\text{Span}(d_x\pi_1, \dots, d_x\pi_n)^o) \\ &= m - \dim(\text{Ker}(d_x\pi)) \\ &= \dim(\text{Im}(d_x\pi)) \\ &= n \end{aligned}$$

(denn $d_x\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist surjektiv), d.h., $d_x\pi_1, \dots, d_x\pi_n$ spannen einen n -dimensionalen Untervektorraum von $(\mathbb{R}^m)^*$ auf, somit sind sie linear unabhängig. \checkmark

Ergänze nun $\{d_x\pi_1, \dots, d_x\pi_n\}$ zu einer Basis

$$\{d_x\pi_1, \dots, d_x\pi_n, l_{n+1}, \dots, l_m\}$$

von $(\mathbb{R}^m)^*$ (für jedes $i \in \{n+1, \dots, m\}$ ist $l_i \in (\mathbb{R}^m)^*$) und setze

$$\begin{aligned} \phi : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n \\ y &\longmapsto (l_{n+1}(y), \dots, l_m(y), \pi(y)). \end{aligned}$$

Die Abbildung ϕ ist C^∞ auf Ω und die Abbildung

$$d_x\phi = (l_{n+1}, \dots, l_m, d_x\pi) = (l_{n+1}, \dots, l_m, d_x\pi_1, \dots, d_x\pi_n)$$

ist - nach Wahl der l_i 's - ein Isomorphismus. Aus dem Umkehrsatz folgt die Existenz einer offenen Umgebung V von x in Ω s.d. $\phi|_V : V \rightarrow \phi(V)$ Diffeomorphismus auf eine

offene Teilmenge $\phi(V)$ von \mathbb{R}^m ist. Setze $\varphi := \phi|_V$; dann ist $\varphi : V \rightarrow \phi(V) = \varphi(V)$ ein Diffeomorphismus s.d., für alle $z \in \varphi(V)$, gilt

$$\begin{aligned} \pi \circ \varphi^{-1}(z) &= \pi \circ (\phi|_V)^{-1}(\phi(y)) \quad \text{wobei } z = \phi(y) = (l_{n+1}(y), \dots, l_m(y), \underbrace{\pi(y)}_{n \text{ letzte Koord.}}) \\ &= \pi(y) \\ &= \pi_n^m(z), \end{aligned}$$

was zu beweisen war. \square

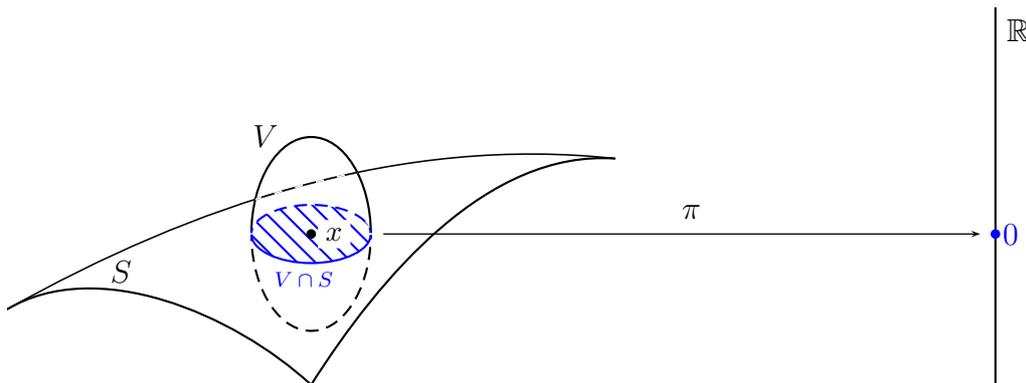
Satz 2.18 erlaubt es, reguläre Flächen lokal als Nullstellenmenge einer Submersion beschreiben zu können:

Proposition 2.19 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine nichtleere Teilmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) S ist reguläre Fläche.

ii) Für alle $x \in S$ existiert eine offene Umgebung V von x in \mathbb{R}^3 und eine Submersion $\pi : V \rightarrow \mathbb{R}$ s.d.

$$V \cap S = \pi^{-1}(\{0\}).$$



Beweis:

“i) \implies ii)”: Sei (V, φ) bzgl. x wie in Proposition 2.11, d.h., V ist offene Umgebung von x in \mathbb{R}^3 und $\varphi : V \rightarrow \varphi(V)$ ist Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge $\varphi(V)$ von \mathbb{R}^3 mit $\varphi(V \cap S) = \varphi(V) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$. Setze

$$\pi := \varphi_3 : V \rightarrow \mathbb{R}$$

(φ_3 ist die dritte Koordinatenfunktion von φ). Die Funktion π ist C^∞ und da φ ein Diffeomorphismus ist, darf $y \mapsto d_y \varphi_3$ nirgends verschwinden auf V (es sei denn $d_y \varphi$ wäre in mindestens einem y nicht invertierbar), d.h., π ist eine Submersion. Ferner gilt

$$\begin{aligned} V \cap S &= \varphi^{-1}(\varphi(V) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})) \\ &= \{y \in V \text{ s.d. } \varphi_3(y) = 0\} \\ &= \pi^{-1}(\{0\}), \end{aligned}$$

somit wird die Behauptung bewiesen.

“ $ii) \implies i)$ ”: Sei $x \in S$ und (V, π) wie in den Voraussetzungen. Aus Satz 2.18 (angewendet auf $\pi : V \longrightarrow \mathbb{R}$) folgt die Existenz einer offenen Umgebung V' von x in V und eines Diffeomorphismus $\varphi : V' \longrightarrow \varphi(V')$ auf eine offene Teilmenge $\varphi(V')$ von \mathbb{R}^3 s.d.

$$\pi \circ \varphi^{-1}(y) = y_3$$

für alle $y = (y_1, y_2, y_3) \in \varphi(V')$ gilt. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \varphi(V' \cap S) &= \varphi(V' \cap V \cap S) \\ &= \varphi(\pi^{-1}(\{0\}) \cap V') \\ &= \varphi((\pi|_{V'})^{-1}(\{0\})) \\ &= (\pi \circ \varphi^{-1})^{-1}(\{0\}) \\ &= \{(y_1, y_2, 0) \in \varphi(V')\} \\ &= \varphi(V') \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass (V', φ) die Voraussetzungen von Proposition 2.11 $ii)$ erfüllt; somit ist S eine reguläre Fläche. \square

Definition 2.20 Sei $\pi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Für $c \in \pi(\Omega)$ heißt die Teilmenge

$$\pi^{-1}(\{c\}) = \{x \in \Omega \mid \pi(x) = c\}$$

von Ω Niveaumenge der Abbildung π .

Definition 2.21 Sei $\pi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^∞ Abbildung, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen und nichtleer ist.

1. Ein Punkt $x \in \Omega$ heißt regulärer Punkt von π g.d.w. $d_x\pi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ maximalen Rang hat (d.h., $d_x\pi$ ist injektiv oder surjektiv).
2. Ein Punkt $x \in \Omega$ heißt singulärer (oder auch kritischer) Punkt von π g.d.w. x kein regulärer Punkt von π ist.
3. Ein $c \in \pi(\Omega)$ heißt regulärer Wert von π g.d.w. $\pi^{-1}(\{c\})$ nur reguläre Punkte von π enthält.
4. Ein $c \in \pi(\Omega)$ heißt singulärer (oder auch kritischer) Wert von π g.d.w. c kein regulärer Wert von π ist.

Als wichtiges Werkzeug zur Herstellung regulärer Flächen gilt folgendes

Korollar 2.22 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine nichtleere offene Teilmenge und $\pi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ Abbildung. Dann ist für jeden regulären Wert c von π die Niveaumenge $\pi^{-1}(\{c\})$ eine reguläre Fläche im \mathbb{R}^3 , die Niveaufäche von π heißt.

Beweis: Setze $S := \pi^{-1}(\{c\})$ und $\pi' := \pi - c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $x \in S$. Nach Voraussetzung ist $d_x \pi' = d_x \pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ surjektiv. Aus Satz 2.18 folgt die Existenz einer offenen Umgebung V von x in Ω (die insbesondere auch offen in \mathbb{R}^3 ist) s.d. $\pi'|_V : V \cap S \rightarrow \mathbb{R}$ eine Submersion ist. Nach Definition von S und π' gilt $V \cap S = (\pi'|_V)^{-1}(\{0\})$. Da dies für alle Punkte von S gilt, folgt aus Proposition 2.19, dass S eine reguläre Fläche ist. \square

Bemerkung 2.23 Folgende Behauptung ist falsch:

“ c ist kein regulärer Wert von $\pi \implies \pi^{-1}(\{c\})$ ist keine reguläre Fläche im \mathbb{R}^3 .”

Betrachte z.B. $\pi(x) := x_1^2$ auf \mathbb{R}^3 . Die Funktion π ist C^∞ , aber $0 \in \mathbb{R}$ ist kein regulärer Wert von π (denn $d_x \pi(X) = 2x_1 X_1$ für alle $x, X \in \mathbb{R}^3$). Nichtsdestotrotz ist $\pi^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R}^3, x_1 = 0\}$ eine affine Ebene, insbesondere eine reguläre Fläche. Falls c also singulärer Wert von π ist, muss man trotzdem überprüfen, ob $\pi^{-1}(\{c\})$ eine reguläre Fläche ist oder nicht.

Beispiele 2.24

1. Sei S eine affine Ebene. Dann kann S durch eine Gleichung der Form

$$S = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ s.d. } ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0\}$$

beschrieben werden, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Definiere die Abbildung $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi(x) := ax_1 + bx_2 + cx_3 + d$. Es gilt $S = \pi^{-1}(\{0\})$. Andererseits ist π eine Submersion: für alle $x, X \in \mathbb{R}^3$ gilt $d_x \pi(X) = aX_1 + bX_2 + cX_3$, und $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $X \mapsto aX_1 + bX_2 + cX_3$ ist surjektiv g.d.w. $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Insbesondere sind alle Werte von π reguläre Werte von π , d.h., alle reellen Zahlen sind reguläre Werte von π (denn $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ist selber surjektiv). Aus Korollar 2.22 folgt, dass S eine reguläre Fläche ist.

2. Sei S die Kugel. Setze $\Omega := \mathbb{R}^3$ und $\pi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \langle x, x \rangle$. Es gilt $S^2 = \pi^{-1}(\{1\})$. Wegen $d_x \pi(X) = 2\langle x, X \rangle$ für alle $x \in \Omega$ und $X \in \mathbb{R}^3$ gilt, dass $d_x \pi$ genau dann surjektiv ist, wenn $x \neq 0$ gilt. Der einzige singuläre Punkt von π ist somit $0 \in \mathbb{R}^3$ und der einzige singuläre Wert von π ist $0 \in \mathbb{R}$. Aus Korollar 2.22 folgt, dass S eine reguläre Fläche ist.
3. Sei $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3 \text{ s.d. } x_1 > 0\}$ und

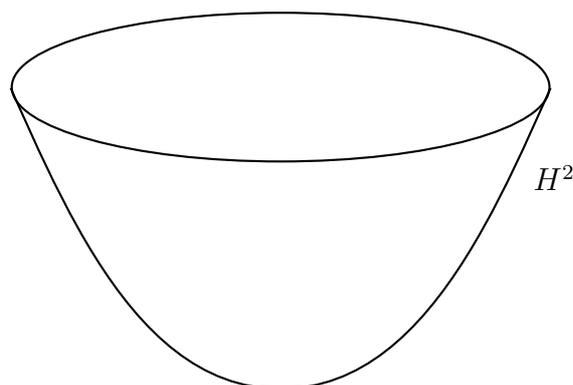
$$\begin{aligned} \pi : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \end{aligned}$$

Die Funktion π ist C^∞ auf Ω , und es gilt $d_x \pi(X) = 2(-x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3)$ für alle $x \in \Omega$ und $X \in \mathbb{R}^3$, insbesondere ist $d_x \pi$ surjektiv, d.h., π ist eine Submersion. Bemerke, dass $\pi(\Omega) = \mathbb{R}$ (wegen des Minusvorzeichens in der Definition von π). Aus Korollar 2.22 folgt dann, dass $\pi^{-1}(\{-1\})$ eine reguläre Fläche ist.

Definition 2.25 Die reguläre Fläche

$$H^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \text{ s.d. } x_1 > 0 \text{ und } -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1\}$$

heißt hyperbolische Ebene.



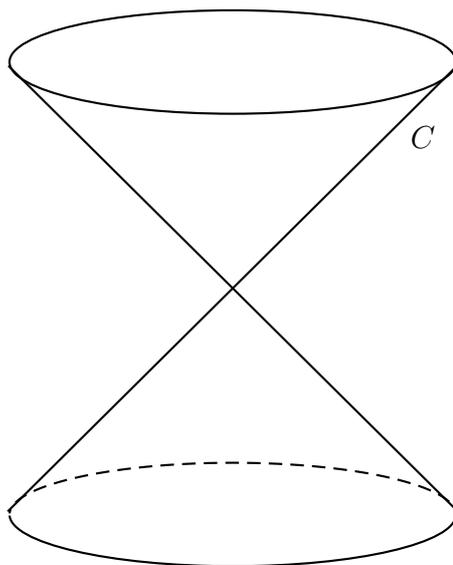
Jetzt wollen wir drei Beispielen von Teilmengen von \mathbb{R}^3 beschreiben, die *keine* regulären Flächen sind.

Beispiele 2.26

1. Sei

$$C := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$$

der sogenannte *Doppelkegel* in \mathbb{R}^3 .



Bemerke zuerst, dass $C \setminus \{0\} = (\pi|_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}})^{-1}(\{0\})$ mit $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi(x) := -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$; da $\pi|_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}}$ eine Submersion $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist (analog wie im Beispiel 2.24.3), folgt aus Korollar 2.22, dass $C \setminus \{0\}$ eine reguläre Fläche ist. Es gilt aber $d_0\pi = 0$, somit ist $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ keine Submersion. Wir dürfen Korollar 2.22 auf C also nicht anwenden. Und tatsächlich gibt es ein Problem im Punkt $0 \in C$, denn C ist *keine* reguläre Fläche.

Begründung: Angenommen, C wäre reguläre Fläche. Dann würden insbesondere eine offene Umgebung V von 0 im \mathbb{R}^3 , eine nichtleere offene Teilmenge U von \mathbb{R}^2 und eine lokale Parametrisierung $F : U \rightarrow V$ von C um 0 existieren. Sei $x_0 := F^{-1}(0) \in U$ und x, \tilde{x} Punkte aus $V \cap C$ mit $x_1 > 0$ und $\tilde{x}_1 < 0$. Setze $y := F^{-1}(x)$ und $\tilde{y} := F^{-1}(\tilde{x})$. Bemerke, dass wegen $F : U \rightarrow F(U)$ bijektiv $y \neq \tilde{y}$ gelten. Da

$U \setminus \{x_0\}$ zusammenhängend ist, können y und \tilde{y} durch eine stetige Kurve in $U \setminus \{x_0\}$ verbunden werden, d.h., es existiert eine stetige Abbildung $\bar{c} : [0, 1] \rightarrow U \setminus \{x_0\}$ mit $\bar{c}(0) = y$ und $\bar{c}(1) = \tilde{y}$. Setze $c := F \circ \bar{c} : [0, 1] \rightarrow V$. Dann ist c eine stetige Kurve, die x mit \tilde{x} verbindet, und die in $F(U \setminus \{x_0\}) = F(U) \setminus \{0\} = (V \cap C) \setminus \{0\}$ verläuft. Betrachte nun die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) := c_1(t)$ (die Abbildung f ist die erste Koordinatenfunktion von c). Die Funktion f ist stetig auf dem Intervall $[0, 1]$ und es gilt: $f(0) = x_1 > 0$ und $f(1) = \tilde{x}_1 < 0$. Daraus folgt die Existenz eines $t_0 \in]0, 1[$ mit $f(t_0) = 0$. Wegen aber $c(t_0) \in C$ muss dann

$$-\underbrace{c_1(t_0)^2}_0 + c_2(t_0)^2 + c_3(t_0)^2 = 0$$

gelten, und somit gelten auch $c_2(t_0) = c_3(t_0) = 0$, d.h. $c(t_0) = 0$, Widerspruch zu $c([0, 1]) \subset C \setminus \{0\}$. Daraus folgt, dass C keine reguläre Fläche ist.

2. Sei $C_+ := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \text{ und } x_1 \geq 0\}$ der abgeschlossene obere Teil des Doppelkegels C . Analog wie oben zeigt man, dass $C_+ \setminus \{0\}$ reguläre Fläche ist.

Behauptung: C_+ ist keine reguläre Fläche.

Beweis der Behauptung: Angenommen, C_+ wäre reguläre Fläche, so gäbe es eine lokale Karte (V, φ) um den Punkt $x := 0 \in C_+$. Sei $x_0 := \varphi(x) \in \varphi(V)$ und betrachte eine beliebige regulär parametrisierte Kurve $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \varphi(V) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$ mit $\gamma(0) = x_0$ (eine solche Kurve existiert, wähle z.B. ein Geradensegment durch x_0 und parametrisiere es eventuell um). Setze $c := \varphi^{-1} \circ \gamma :]-1, 1[\rightarrow V \cap C_+$. Dann müsste $c = (c_1, c_2, c_3)$ regulär parametrisiert sein mit $c(0) = 0$. Wegen $c_1(0) = \min_{t \in]-1, 1[} (c_1(t))$ müsste aber $c'_1(0) = 0$ gelten. Andererseits liefert die Bedingung $c(t) \in C_+$ für alle t nach zweimaligem Ableiten

$$-c'_1(0)^2 + c'_2(0)^2 + c'_3(0)^2 = 0,$$

was $c'_1(0) = c'_2(0) = c'_3(0) = 0$ implizieren würde, Widerspruch zur Regularität von c .

Hat allgemeiner eine Fläche eine "Spitze" oder eine "Kante" (z.B. alle Polyederflächen), so ist sie keine reguläre Fläche.

3. Ein anderes Beispiel von Teilmenge von \mathbb{R}^3 , die keine reguläre Fläche ist, ist $S := F(\mathbb{R}^2)$ wobei

$$F(y) := \begin{pmatrix} \sin(2y_1) \\ \sin(y_1) \\ y_2 \end{pmatrix}$$

für alle $y \in \mathbb{R}^2$. Wäre S eine reguläre Fläche, so gäbe es insbesondere eine lokale Karte (V, φ) um den Punkt $0 \in S$. Das Bild von $(V \cap S) \setminus \mathbb{R} \cdot e_3$ unter φ hätte dann zwei Zusammenhangskomponenten, $(V \cap S) \setminus \mathbb{R} \cdot e_3$ hätte hingegen vier Zusammenhangskomponenten, was die Tatsache widersprechen würde, dass $\varphi : (V \cap S) \setminus \mathbb{R} \cdot e_3 \rightarrow \varphi((V \cap S) \setminus \mathbb{R} \cdot e_3)$ Homöomorphismus ist. Daraus folgt, dass S keine reguläre Fläche ist.

Damit die Bezeichnungen nicht zu kompliziert werden, bezeichnen wir von hier aus eine lokale Parametrisierung einer regulären Fläche stets mit (U, F) (statt (U, F, V)).

2.2 Differenzierbare Abbildungen

Von hier aus trage jede reguläre Fläche die vom \mathbb{R}^3 induzierte Topologie.

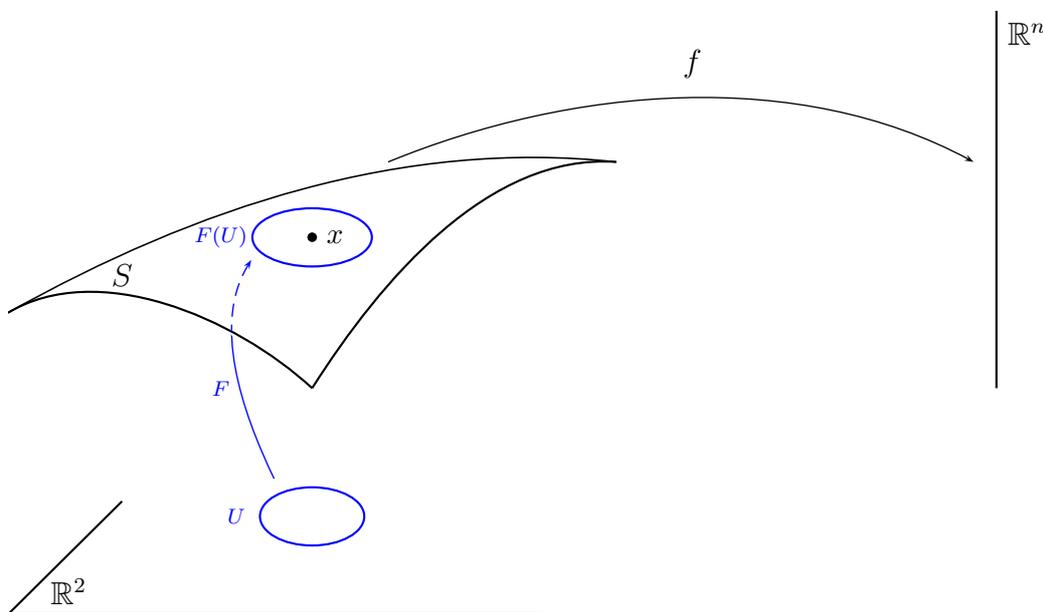
Definition 2.27 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung (wobei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$). Sei $x \in S$.

- i) Die Abbildung f heißt differenzierbar in x g.d.w. eine lokale Parametrisierung (U, F) von S um x so existiert, dass

$$f \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

differenzierbar in $x_0 := F^{-1}(x)$ ist (im üblichen Sinne).

- ii) Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Die Abbildung f heißt C^k um x g.d.w. eine lokale Parametrisierung (U, F) von S um x so existiert, dass $f \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^k um $x_0 := F^{-1}(x)$ ist (im üblichen Sinne).



Proposition 2.28 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Sei $x \in S$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) f ist differenzierbar in x .
- ii) Für jede lokale Parametrisierung (U, F) von S um x ist die Abbildung $f \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $x_0 := F^{-1}(x)$.
- iii) Eine lokale Karte (V, φ) von S um x existiert, so dass $f \circ (\varphi|_{V \cap S})^{-1} : \varphi(V \cap S) \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $\varphi(x)$ ist (im üblichen Sinne).

iv) Für jede lokale Karte (V, φ) von S um x ist die Abbildung $f \circ (\varphi|_{V \cap S})^{-1} : \varphi(V \cap S) \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar an der Stelle $\varphi(x)$ (im üblichen Sinne).

Beweis:

“*i*) \implies *iii*)”: Da f differenzierbar in x ist, existiert eine lokale Parametrisierung (U, F) von S um x s.d. $f \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $x_0 := F^{-1}(x)$ ist. Bemerke dann - wie im Beweis von Proposition 2.11 -, dass aus Satz 2.10 folgt, dass eine lokale Karte aus einer lokalen Parametrisierung definiert werden kann: Da $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ Immersion ist, existiert nach Satz 2.10 eine offene Umgebung U' von x_0 im \mathbb{R}^2 , eine offene Umgebung U'' von 0 im \mathbb{R} , eine offene Umgebung V von $F(x_0) = x$ im \mathbb{R}^3 , und ein Diffeomorphismus $\varphi : V \rightarrow U' \times U''$ mit $F(U) \subset V$ und $\varphi \circ F(y) = (y, 0)$ für alle $y \in U'$. Bis auf Verkleinerung von V (siehe Beweis von Proposition 2.11) ist dann (V, φ) lokale Karte von S um x und $f \circ F = f \circ (\varphi|_{V \cap S})^{-1} : \varphi(V \cap S) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist differenzierbar in $x_0 = \varphi|_{V \cap S}(x)$. “*iii*) \implies *iv*)”: Seien (V, φ) und (W, ψ) lokale Karten von S um x . Angenommen, $f \circ (\varphi|_{V \cap S})^{-1} : \varphi(V \cap S) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei differenzierbar an der Stelle $\varphi(x)$. Die Menge $V \cap S \cap W$ ist eine offene Umgebung von x in S , und es gilt

$$f \circ (\psi|_{V \cap S \cap W})^{-1} = f \circ (\varphi|_{V \cap S \cap W})^{-1} \circ \varphi|_{V \cap S \cap W} \circ (\psi|_{V \cap S \cap W})^{-1} : \psi(V \cap S \cap W) \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Die Abbildung $\varphi|_{V \cap S \cap W} \circ (\psi|_{V \cap S \cap W})^{-1} : \psi(V \cap S \cap W) \rightarrow \varphi(V \cap S \cap W)$ ist aber ein C^∞ -Diffeomorphismus (Bemerkung 2.13.3.), insbesondere sie ist differenzierbar an der Stelle $\psi(x)$. Nach der Kettenregel muss dann $f \circ (\psi|_{V \cap S \cap W})^{-1}$ differenzierbar an der Stelle $\psi(x)$ sein und somit $f \circ (\psi|_{W \cap S})^{-1}$ auch.

“*iv*) \implies *ii*)”: Sei (U, F) eine Parametrisierung von S um x . Sei (V, φ) lokale Karte von S um x . Da F stetig in x_0 ist, existiert eine offene Umgebung U' von x_0 im \mathbb{R}^2 mit $F(U') \subset V$. Die Abbildung

$$f \circ F = \underbrace{f \circ (\varphi|_{V \cap S})^{-1}}_{\text{differenzierbar in } \varphi(x)} \circ \underbrace{\varphi|_{V \cap S} \circ F}_{\text{differenzierbar in } x_0}$$

ist Verknüpfung zweier differenzierbarer Abbildungen ($\varphi \circ F$ ist sogar C^∞), also ist differenzierbar in x_0 .

“*ii*) \implies *i*)” ist trivial. □

Bemerkungen 2.29

1. Wird “differenzierbar in/an der Stelle” durch “ C^k um” ersetzt, so gilt Proposition 2.28 wortwörtlich.

2. Ist f differenzierbar in $x \in S$, so ist f stetig in x (denn $f = \underbrace{f \circ F}_{\text{stetig}} \circ \underbrace{F^{-1}}_{\text{stetig}}$).

Beispiele 2.30

1. Ist $S \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Fläche, so ist die kanonische Inklusion $\iota : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine C^∞ -Abbildung auf S , denn: für jedes $x \in S$ existiert eine lokale Parametrisierung (U, F) von S um x und $\iota \circ F = F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist C^∞ .

2. Ist Ω offene Umgebung von S in \mathbb{R}^3 und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in bzw. C^k um $x \in S$ (im üblichen Sinne), so ist $f|_S : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in bzw. C^k um x , denn: für jede lokale Parametrisierung (U, F) von S um x ist die Abbildung $f \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ - als Verknüpfung zweier differenzierbarer Abbildungen - differenzierbar in $x_0 := F^{-1}(x)$.

Jede differenzierbare bzw. C^k -Abbildung auf S ist Einschränkung auf S einer differenzierbaren bzw. C^k -Abbildung, die auf einer offenen Umgebung von S definiert ist:

Proposition 2.31 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Fläche und $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) Die Abbildung f ist differenzierbar auf S .
- ii) Es existiert eine offene Umgebung Ω von S in \mathbb{R}^3 und eine differenzierbare bzw. C^k Abbildung $\tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\tilde{f}|_{V \cap S} = f.$$

Beweis:

“ii) \implies i)“: Wurde bereits in Beispiel 2.30.2 erklärt.

“i) \implies ii)“: Man zeige erstens eine lokale Version der Aussage: um jeden Punkt $x \in S$ existiert eine offene Umgebung Ω_x in \mathbb{R}^3 und eine differenzierbare bzw. C^k Abbildung $\tilde{f}_x : \Omega_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{f}_x|_{\Omega_x \cap S} = f|_{\Omega_x \cap S}$. Dies ist der Gegenstand der 31. Aufgabe im Blatt 8. Lösung: Für $x \in S$ beliebig sei (V, φ) eine lokale Karte von S um x , d.h., V ist eine offene Umgebung von x im \mathbb{R}^3 und $\varphi : V \rightarrow \varphi(V)$ ist ein C^∞ Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge $\varphi(V)$ von \mathbb{R}^3 mit $\varphi(V \cap S) = \varphi(V) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$. O.B.d.A. sei $\varphi(V) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \|y\| < r\}$ für ein $r > 0$ (sonst verschiebe oder verkleinere $\varphi(V)$). Definiere $\tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\tilde{f}(y) := f \circ \varphi^{-1}(\varphi_1(y), \varphi_2(y), 0)$$

wobei $\varphi(y) = (\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y))$ für alle $y \in V$ (man kann \tilde{f} als konstante Fortsetzung von $f|_{V \cap S}$ “in der y_3 -Richtung” auffassen). Die Abbildung \tilde{f} ist wohldefiniert wegen $(z_1, z_2, 0) \in \varphi(V)$ für alle $z = (z_1, z_2, z_3) \in \varphi(V)$, sie ist offenbar C^∞ und für alle $y \in V \cap S = \varphi^{-1}(\varphi(V) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}))$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y) &= f \circ \varphi^{-1}(\varphi_1(y), \varphi_2(y), 0) \\ &= f \circ \varphi^{-1}(\varphi(y)) \\ &= f(y), \end{aligned}$$

was zu beweisen war. ✓

Als letztes zeige man, dass man all diese Ω_x und \tilde{f}_x “zusammenaddieren” kann. Dieser letzte Schritt verlangt fortgeschrittenere Kenntnisse aus der mengentheoretischen Topologie und wird weggelassen (siehe Differentialgeometrie 1). □

Definition 2.32 Seien S, S' reguläre Flächen und $f : S \rightarrow S'$ eine Abbildung. Sei $x \in S$. Die Abbildung f heißt differenzierbar in bzw. C^k um x (mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) g.d.w.

lokale Karten (V, φ) bzw. (W, ψ) von S um x bzw. von S' um $f(x)$ so existieren, dass $f(V \cap S) \subset W \cap S'$ und

$$\psi \circ f \circ (\varphi|_{V \cap S})^{-1} : \varphi(V \cap S) \longrightarrow \psi(W \cap S')$$

differenzierbar in bzw. C^k um x ist (im üblichen Sinne).

Bemerke, dass eine differenzierbare Abbildung in einem Punkt insbesondere stetig in diesem Punkt ist.

Proposition 2.33 Seien $f : S \longrightarrow S'$ und $g : S' \longrightarrow S''$ Abbildungen, wobei S, S', S'' reguläre Flächen sind. Ist f differenzierbar in (bzw. C^k um) $x \in S$ und g differenzierbar in (bzw. C^k um) $f(x) \in S'$, so ist $g \circ f$ differenzierbar in (bzw. C^k um) x .

Beweis: Sei (V, φ) bzw. (V', φ') , (V'', φ'') lokale Karte von S um x bzw. von S' um $f(x)$ bzw. von S'' um $g \circ f(x)$, s.d. $f(V \cap S) \subset V' \cap S'$ und $g(V' \cap S') \subset V'' \cap S''$ (dies ist möglich, weil f stetig in x ist). Dann gilt

$$\varphi'' \circ g \circ f \circ (\varphi|_{V \cap S})^{-1} = \underbrace{\varphi'' \circ g \circ (\varphi'|_{V' \cap S'})^{-1}}_{\text{diff. in } \varphi'(f(x))} \circ \underbrace{\varphi'|_{V' \cap S'} \circ f \circ (\varphi|_{V \cap S})^{-1}}_{\text{diff. in } \varphi(x)},$$

insbesondere ist $\varphi'' \circ g \circ f \circ (\varphi|_{V \cap S})^{-1}$ differenzierbar in bzw. C^k um $\varphi(x)$. □

Proposition 2.34 Seien S, S' reguläre Flächen und $x \in S$. Eine Abbildung $f : S \longrightarrow S'$ ist genau dann differenzierbar in bzw. C^k um x , wenn $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ differenzierbar in bzw. C^k um x ist (als Abbildung $S \longrightarrow \mathbb{R}^3$, im Sinne von Definition 2.27).

Beweis: Ist $f : S \longrightarrow S'$ differenzierbar in (bzw. C^k um) $x \in S$, so ist nach Beispiel 2.30.1 und Proposition 2.33 die Abbildung $\iota \circ f : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ differenzierbar in (bzw. C^k um) x , wobei $\iota : S' \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die kanonische Inklusion ist.

Ist umgekehrt $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ differenzierbar in (bzw. C^k um) $x \in S$, so wähle eine lokale Parametrisierung (U, F) von S um x und eine lokale Karte (W, ψ) um $f(x)$ mit $f \circ F(U) \subset W$ (dies ist möglich wegen der Stetigkeit von f in x). Da nach Definition $f \circ F$ differenzierbar in (bzw. C^k um) $x_0 := F^{-1}(x)$ ist, muss auch - nach der üblichen Kettenregel - $\psi \circ f \circ F$ differenzierbar in (bzw. C^k um) x_0 sein (dies hat Sinn nur wenn U hinreichend klein um x gewählt wird, was wir annehmen können); wiederum nach Definition bedeutet dies, dass f differenzierbar in (bzw. C^k um) x ist als Abbildung $S \longrightarrow S'$. □

Bemerkung 2.35 Ist $U \subset \mathbb{R}^2$ nichtleere offene Teilmenge und $f : U \longrightarrow S'$ bzw. $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Abbildungen, so stimmen die unterschiedlichen Begriffe von Differenzierbarkeit von f (der übliche und der für Abbildungen auf Flächen, denn U ist auch reguläre Fläche) überein, denn: eine globale Parametrisierung von U ist gegeben durch (U, Id_U) .

Beispiel 2.36 Ist $S \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Fläche, so ist die Identität $\text{Id}_S : S \rightarrow S$ eine C^∞ -Abbildung.

Definition 2.37 Seien $S, S' \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen.

- i) Eine Abbildung $f : S \rightarrow S'$ heißt C^∞ Diffeomorphismus g.d.w. sie C^∞ ist, bijektiv, und ihre Umkehrabbildung $f^{-1} : S' \rightarrow S$ ebenfalls C^∞ ist.
- ii) Existiert ein Diffeomorphismus zwischen zwei regulären Flächen S und S' , so heißen S und S' diffeomorph.

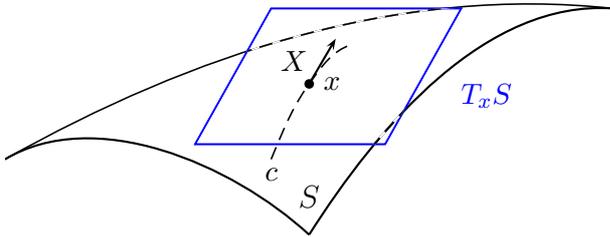
Beispiele 2.38

1. Die Identität $\text{Id}_S : S \rightarrow S$ ist ein C^∞ Diffeomorphismus, für jede reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$.
2. Sei (U, F) eine lokale Parametrisierung einer regulären Fläche. Dann ist $F : U \rightarrow F(U)$ ein C^∞ Diffeomorphismus (bemerke, dass $F(U)$ als offene Teilmenge einer regulären Fläche selbst reguläre Fläche ist). Denn: F ist C^∞ , bijektiv von U auf $F(U)$, und $F^{-1} : F(U) \rightarrow U$ ist C^∞ , da $F^{-1} \circ F = \text{Id}_U$ C^∞ auf U ist!
3. Die regulären Flächen $S := \mathbb{R}^2$ und $S' := S^2$ sind *nicht* C^∞ diffeomorph, es sei denn sie wären homöomorph (jeder Diffeomorphismus ist ein Homöomorphismus), das ist aber unmöglich da S^2 kompakt ist und \mathbb{R}^2 nicht.
- 3.' Die stereographischen Projektionen $\pi_N : S^2 \setminus \{e_3\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\pi_S : S^2 \setminus \{-e_3\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (siehe Definition 2.5) sind C^∞ Diffeomorphismen, denn die entsprechenden Umkehrabbildungen sind lokale Parametrisierungen von S^2 (siehe Beispiel 2.4.3').
*** Allgemeiner sind \mathbb{R}^2 und $S^2 \setminus \{\text{Pkt.}\}$ (" S^2 minus ein Punkt") diffeomorph.
4. Die regulären Flächen $S := \mathbb{R}^2$ und $S' := H^2$ (Definition 2.25) sind C^∞ diffeomorph, siehe 30. Aufgabe im 8. Übungsblatt.

2.3 Die Tangentialebene

Definition 2.39 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Fläche und $x \in S$. Die Tangentialebene an S in x ist definiert durch

$$T_x S := \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \text{ s.d. } \exists \varepsilon > 0 \text{ und eine in } t = 0 \text{ ableitbare Abbildung } c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S \right. \\ \left. \text{mit } c(0) = x \text{ und } c'(0) = X \right\}.$$



Proposition 2.40 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Fläche und $x \in S$ ein Punkt.

1. Ist (U, F) lokale Parametrisierung von S um x , so gilt

$$T_x S = d_{F^{-1}(x)} F(\mathbb{R}^2).$$

2. Ist (V, φ) lokale Karte um x , so gilt

$$T_x S = d_{\varphi(x)} \varphi|_{V \cap S}^{-1}(\mathbb{R}^2).$$

3. Ist $\pi : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ Submersion mit $x \in V$ und $V \cap S = \pi^{-1}(\{0\})$, so gilt

$$T_x S = \text{Ker}(d_x \pi).$$

Insbesondere ist $T_x S$ zweidimensionaler Untervektorraum von \mathbb{R}^3 und für eine gegebene lokale Parametrisierung (U, F) von S um x bilden die Vektoren $\frac{\partial F}{\partial x_1}(F^{-1}(x))$, $\frac{\partial F}{\partial x_2}(F^{-1}(x))$ eine Basis von $T_x S$.

Beweis:

Ad 1.: Setze $x_0 := F^{-1}(x)$. Sei $Y \in \mathbb{R}^2$ und betrachte $\bar{c}(t) := x_0 + tY$ für $t \in \mathbb{R}$. Dann ist, für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, die Abbildung $\bar{c}|_{]-\varepsilon, \varepsilon[}$ eine in $t = 0$ ableitbare Abbildung mit $\bar{c}(] - \varepsilon, \varepsilon[) \subset U$. Somit ist

$$c := F \circ \bar{c} :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$$

auch in $t = 0$ ableitbare Abbildung mit $c(0) = F(x_0) = x$ und $c'(0) = d_{c(0)} F(\bar{c}'(0)) = d_{x_0} F(Y) \in T_x S$. Dies zeigt $d_{x_0} F(\mathbb{R}^2) \subset T_x S$. Umgekehrt sei $X \in T_x S$ beliebig. Dann existiert eine in $t = 0$ ableitbare Abbildung $c :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ mit $c(0) = x$ und $c'(0) = X$. O.B.d.A. gelte $c(] - \varepsilon, \varepsilon[) \subset F(U)$ (denn $F(U)$ ist offen in S und c ist stetig in 0). Setze

$$\bar{c} := F^{-1} \circ c :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow U.$$

Da $F : U \rightarrow F(U)$ Diffeomorphismus ist (siehe Beispiel 2.38.2), ist die Abbildung \bar{c} eine in $t = 0$ ableitbare Abbildung. Setze $Y := \bar{c}'(0)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} X = c'(0) &= (F \circ \bar{c})'(0) \\ &= d_{\bar{c}}F(\bar{c}'(0)) \quad \text{mit } \bar{c}(0) = F^{-1} \circ c(0) = x_0 \\ &= d_{x_0}F(Y), \end{aligned}$$

insbesondere gilt $X \in d_{x_0}F(\mathbb{R}^2)$. Dies zeigt $T_x S \subset d_{x_0}F(\mathbb{R}^2)$. Da $d_{F^{-1}(x)}F$ linear und injektiv ist, ist dann $d_{F^{-1}(x)}F(\mathbb{R}^2)$ zweidimensionaler Untervektorraum des \mathbb{R}^3 und eine Basis dieses Vektorraumes ist gegeben durch $d_{F^{-1}(x)}F(e_1) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(F^{-1}(x))$ und $d_{F^{-1}(x)}F(e_2) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(F^{-1}(x))$.

Ad 2.: Sei (V, φ) eine lokale Karte um x . Dann ist $\varphi|_{V \cap S}^{-1} : \underbrace{\varphi(V \cap S)}_{\text{offen in } \mathbb{R}^2} \rightarrow V \cap S$ eine lokale Parametrisierung von S um x , somit folgt die Aussage direkt aus der vorigen.

Ad 3.: Es reicht, die Inklusion $T_x S \subset \text{Ker}(d_x \pi)$ zu beweisen, denn beide sind 2-dimensionale Untervektorräume des \mathbb{R}^3 . Sei $X \in T_x S$ und $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ eine in $t = 0$ ableitbare Abbildung mit $c(0) = x$ und $c'(0) = X$. Bis auf Verkleinerung von ε kann angenommen werden, dass $c(] - \varepsilon, \varepsilon[) \subset V$ gilt (denn c ist stetig in $t = 0$). Dann gilt $\pi \circ c = 0$ auf $] - \varepsilon, \varepsilon[$. Nach Ableiten in $t = 0$ und Anwendung der Kettenregel kommt $d_{c(0)}\pi(c'(0)) = 0$ heraus, d.h., $d_x \pi(X) = 0$. Daraus folgt $X \in \text{Ker}(d_x \pi)$, was zu beweisen war.

□

Bemerkung 2.41 Insbesondere ist, für jede lokale Parametrisierung (U, F) von S um $x \in S$, die Abbildung $d_{F^{-1}(x)}F : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_x S$ ein Isomorphismus.

Beispiele 2.42

1. Sei $S := p_0 + E_0$ eine affine Ebene. Sei $\{u, v\}$ eine Basis von E_0 und $F(y) := p_0 + y_1 u + y_2 v$ für alle $y \in \mathbb{R}^2$ (man hat schon bewiesen, dass (\mathbb{R}^2, F) eine globale Parametrisierung von S ist). Für $x = F(x_0) = p_0 + (x_0)_1 u + (x_0)_2 v \in S$ gilt nach Proposition 2.40

$$\begin{aligned} T_x S &= d_{x_0}F(\mathbb{R}^2) \quad \text{mit } d_{x_0}F(Y) = Y_1 u + Y_2 v \quad \forall Y \in \mathbb{R}^2 \\ &= \{Y_1 u + Y_2 v, (Y_1, Y_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= E_0, \end{aligned}$$

d.h., die Tangentialebene in jedem Punkt an einer affinen Ebene ist deren Richtungsebene.

2. Sei S der Graph einer C^∞ Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ (wobei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und nichtleer ist) und $F(y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ h(y) \end{pmatrix}$ für alle $y \in U$. Man hat schon bewiesen, dass (U, F)

eine globale Parametrisierung von S ist. Sei $x = F(x_0) = \begin{pmatrix} (x_0)_1 \\ (x_0)_2 \\ h(x_0) \end{pmatrix} \in S$, dann gilt nach Proposition 2.40

$$\begin{aligned} T_x S &= d_{x_0} F(\mathbb{R}^2) \quad \text{mit } d_{x_0} F(Y) = Y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x_1}(x_0) \end{pmatrix} + Y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_0) \end{pmatrix} \quad \forall Y \in \mathbb{R}^2 \\ &= \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x_1}(x_0) \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_0) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d.h., die Tangentialebene an S in $F(x_0)$ ist die von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x_1}(x_0) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_0) \end{pmatrix}$ aufgespannte Ebene.

3. Sei $S := S^2$ die euklidische Sphäre und $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$. Für jedes $x \in S$ und $X \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$d_x \pi(X) = 2(x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3) = 2\langle x, X \rangle,$$

und somit gilt nach Proposition 2.40

$$\begin{aligned} T_x S &= \text{Ker}(d_x \pi) \\ &= \{X \in \mathbb{R}^3, \langle x, X \rangle = 0\} \\ &= x^\perp, \end{aligned}$$

d.h., die Tangentialebene an S^2 in $x \in S^2$ ist das orthogonale Komplement zu x im \mathbb{R}^3 .

2.4 Die Tangentialabbildung einer differenzierbaren Abbildung

Proposition 2.43 *Seien S und S' reguläre Flächen und $f : S \rightarrow S'$ bzw. $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in einem $x \in S$. Dann ist die folgende Abbildung wohldefiniert und linear:*

$$\begin{aligned} T_x f : T_x S &\longrightarrow T_{f(x)} S' \text{ bzw. } \mathbb{R}^n \\ X &\longmapsto (f \circ c)'(0), \end{aligned}$$

wobei $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ eine in $t = 0$ ableitbare Abbildung ist mit $c(0) = x$ und $c'(0) = X$. Ferner gilt, für jede lokale Parametrisierung (U, F) von S um x :

$$T_x f(X) = d_{F^{-1}(x)}(f \circ F) \circ (d_{F^{-1}(x)} F)^{-1} \quad (2.2)$$

Beweis: Wir zeigen die Identität (2.2). Setze $x_0 := F^{-1}(x)$ und $X_0 := (d_{x_0}F)^{-1}(X)$. Sei $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ in $t = 0$ ableitbare Abbildung mit $c(0) = x$ und $c'(0) = X$. O.B.d.A. gelte $c(] - \varepsilon, \varepsilon[) \subset U$. Setze dann $\bar{c} := F^{-1} \circ c :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow U$. Die Abbildung \bar{c} ist in $t = 0$ ableitbare Abbildung und es gilt:

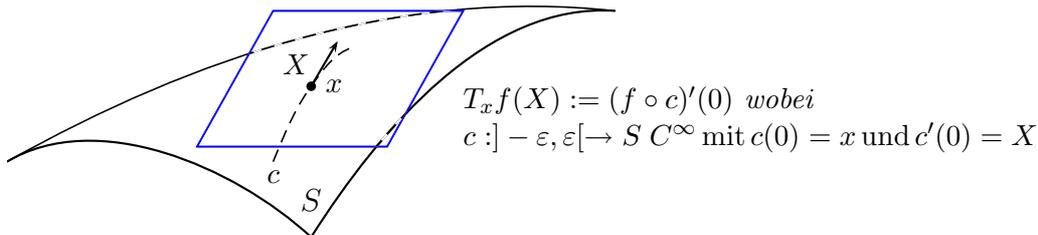
$$\begin{aligned} (f \circ c)'(0) &= (f \circ F \circ F^{-1} \circ c)'(0) \\ &= (f \circ F \circ \bar{c})'(0) \\ &= d_{\bar{c}(0)}(f \circ F)(\bar{c}'(0)) \quad \text{mit } c'(0) = (F \circ \bar{c})'(0) = d_{x_0}F(\bar{c}'(0)) \\ &= d_{x_0}(f \circ F) \circ (d_{x_0}F)^{-1}(X), \end{aligned}$$

was (2.2) beweist. Daraus folgt, dass der Vektor $T_x f(X)$ nur von $c'(0) = X$ abhängt und nicht von der Wahl von c selbst sowie auch nicht von der Wahl von (U, F) . Ferner folgt auch, dass $T_x f : T_x S \rightarrow \mathbb{R}^n$ (bzw. $T_x f : T_x S \rightarrow \mathbb{R}^3$) linear ist. Falls $f(S) \subset S'$ muss auch $T_x f(X) \in T_{f(x)} S'$ gelten, denn für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt $f \circ c = \underbrace{f \circ F}_{\text{diff. in } F^{-1}(x)} \circ \underbrace{F^{-1} \circ c}_{\text{abl. in } t=0}$, somit ist $f \circ c :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S'$ eine in $t = 0$ ableitbare Abbildung mit $(f \circ c)(0) = f(x)$. □

Definition 2.44 Seien S und S' reguläre Flächen und $f : S \rightarrow S'$ bzw. $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in einem $x \in S$. Die in Proposition 2.43 definierte Abbildung

$$T_x f : T_x S \rightarrow T_{f(x)} S' \text{ bzw. } \mathbb{R}^n$$

heißt Tangentialabbildung von f in x .



Dieser Begriff verallgemeinert auf Flächen den klassischen Begriff von Differential.

Proposition 2.45 (Kettenregel) Seien S, S', S'' reguläre Flächen und $f : S \rightarrow S', g : S' \rightarrow S''$ (bzw. $g : S' \rightarrow \mathbb{R}^n$) Abbildungen. Sei $x \in S$.

Ist f differenzierbar in x und g differenzierbar in $f(x)$, so ist $g \circ f$ differenzierbar in x und es gilt

$$T_x(g \circ f) = T_{f(x)}g \circ T_x f.$$

Beweis: Nach Proposition 2.33 ist $g \circ f$ differenzierbar in x . Für die zweite Aussage brauchen wir nur, die Definition zu verwenden: ist $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ in $t = 0$ ableitbare Abbildung mit $c(0) = x$ und $c'(0) = X$, so gilt

$$\begin{aligned} T_x(g \circ f)(X) &= (g \circ f \circ c)'(0) \\ &= (g \circ (f \circ c))'(0) \quad \text{mit } (f \circ c)(0) = f(x) \text{ und } (f \circ c)'(0) = T_x f(X) \\ &= T_{f(x)} g(T_x f(X)). \end{aligned}$$

□

Beispiele 2.46

1. Angenommen, eine reguläre Fläche S sei in einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ enthalten und $\tilde{f} : \Omega \rightarrow S'$ bzw. $\tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei differenzierbar (im klassischen Sinne, d.h., als auf einer offenen Teilmenge vom \mathbb{R}^3 definierte Abbildung) in $x \in S$. Dann ist nach Beispiel 2.30.2 die Abbildung $\tilde{f}|_S : S \rightarrow S'$ bzw. \mathbb{R}^n ebenfalls differenzierbar in x . Außerdem gilt

$$T_x(\tilde{f}|_S) = d_x \tilde{f}|_S$$

(denn es gilt $(\tilde{f} \circ c)'(0) = d_x \tilde{f}(c'(0)) = d_x \tilde{f}(X)$ für alle in $t = 0$ ableitbaren Abbildungen $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ mit $c(0) = x$ und $c'(0) = X$).

2. Insbesondere gilt für $f := \text{Id}_S : S \rightarrow S$

$$T_x \text{Id}_S = \text{Id}_{T_x S}.$$

3. Ist $U \subset \mathbb{R}^2$ nichtleere offene Teilmenge und $f : U \rightarrow S'$ bzw. \mathbb{R}^n differenzierbar in $x \in U$ (egal in welchem Sinne, siehe Bemerkung 2.35), so gilt $T_x f = d_x f$ für alle $x \in S$ (Beweis wie oben).

Bemerkung 2.47 Sind f_1 und f_2 differenzierbare Abbildungen von S nach \mathbb{R}^n und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, so ist $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ auch differenzierbar und es gilt

$$T_x(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 T_x f_1 + \alpha_2 T_x f_2$$

für alle $x \in S$ (*Übungsaufgabe*).

Proposition 2.48 Sei S eine zusammenhängende reguläre Fläche und $f : S \rightarrow S'$ bzw. $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung (wobei S' eine reguläre Fläche ist). Die Abbildung f ist genau dann konstant auf S , wenn $T_x f = 0$ für alle $x \in S$.

Beweis: Ist f konstant, so ist $f \circ c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bzw. $f \circ c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ konstant für alle in $t = 0$ ableitbaren Abbildungen $c : I \rightarrow S$, somit gilt nach Definition der Tangentialabbildung

$T_x f = 0$ für alle $x \in S$. Umgekehrt, gilt $T_x f = 0$ für alle $x \in S$, so gilt für jede lokale Parametrisierung (U, F) von S mit U zusammenhängend

$$0 = T_x f \stackrel{(2.2)}{=} d_{F^{-1}(x)}(f \circ F) \circ (d_{F^{-1}(x)}F)^{-1},$$

d.h. $d_{F^{-1}(x)}(f \circ F) = 0$ für alle $x \in F(U)$. Aus der Analysis 1/2 folgt, dass $f \circ F$ konstant auf U ist, d.h., f ist konstant auf $F(U)$. Somit ist f lokal konstant auf S , und da S zusammenhängend ist, muss dann f konstant auf S sein. \square

2.5 Die erste Fundamentalform

Definition 2.49 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $x \in S$. Sei $T_x S$ die Tangentialebene von S in x . Die erste Fundamentalform von S in x ist definiert durch

$$\begin{aligned} g_x : T_x S \times T_x S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto g_x(X, Y) := \langle X, Y \rangle, \end{aligned}$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische euklidische Skalarprodukt in \mathbb{R}^3 bezeichnet.

Bemerkungen 2.50

1. Nach Definition ist g_x die Einschränkung des kanonischen Skalarprodukts auf $T_x S$; insbesondere ist g_x positiv-definite symmetrische Bilinearform auf $T_x S$.
2. In der Literatur wird die erste Fundamentalform in x gelegentlich mit “ I_x ” (statt g_x) bezeichnet.

Definition 2.51 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und (U, F) eine lokale Parametrisierung von S . Für jedes $y \in U$ ist die 2×2 -Matrix $(g_{ij}(y))_{i,j}$ definiert durch

$$g_{ij}(y) := \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(y), \frac{\partial F}{\partial x_j}(y) \right\rangle,$$

für alle $1 \leq i, j \leq 2$.

Anders ausgedrückt, die Matrix $(g_{ij}(y))_{i,j}$ ist die Matrix der Bilinearform $g_{F(y)}$ in der Basis $\left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1}(y), \frac{\partial F}{\partial x_2}(y) \right\}$ von $T_{F(y)} S$.

Bemerkungen 2.52

1. Für jedes $y \in U$ ist $(g_{ij}(y))_{i,j}$ positiv-definite symmetrische Matrix. Ferner ist, für feste $i, j \in \{1, 2\}$, die Abbildung $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto g_{ij}(y)$, glatt (folgt aus der Definition von $g_{ij}(y)$, da F glatt ist).

2. Beachte, dass die Matrix $(g_{ij}(y))_{i,j}$ - nach Definition - von der lokalen Parametrisierung (U, F) abhängt! Siehe Beispiele 2.53.

Beispiele 2.53

1. Sei $S := p_0 + E_0$ eine affine Ebene und wähle eine Basis $\{u, v\}$ von E_0 . Da $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, $F(y) := p_0 + y_1 u + y_2 v$, globale Parametrisierung von S ist, und wegen $\frac{\partial F}{\partial x_1}(y) = u$ und $\frac{\partial F}{\partial x_2}(y) = v$, gilt

$$(g_{ij}(y))_{i,j} = \begin{pmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, v \rangle \\ \langle u, v \rangle & \langle v, v \rangle \end{pmatrix}.$$

Bemerke einerseits, dass in diesem Beispiel die Matrix $(g_{ij}(y))_{i,j}$ *nicht* von y abhängt; im Allgemeinen ist es nicht der Fall (siehe weitere Beispiele unten). Andererseits sehen wir, dass $(g_{ij}(y))_{i,j}$ von der Wahl der Basis $\{u, v\}$ - daher von der Wahl der Parametrisierung F - abhängt. Es gilt z.B. $(g_{ij}(y))_{i,j} = I_2$ (wobei I_2 die Einheitsmatrix bezeichnet) g.d.w. $\{u, v\}$ o.n.B. von E_0 ist.

- 1'. Sei $S := \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ und

$$\begin{aligned} \bar{F} :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \varphi) &\longmapsto \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(die Abbildung \bar{F} beschreibt " \mathbb{R}^2 minus einer Halbgeraden" in Polarkoordinaten). Bemerke zuerst, dass \bar{F} eine Parametrisierung von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0), x_1 \geq 0\}$ ist: die Abbildung \bar{F} ist glatt, und für jedes $(r, \varphi) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ gilt

$$\text{Mat}_{\{e_1, e_2\}}(d_{(r, \varphi)} \bar{F}) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und da diese Matrix Rang 2 hat, ist $d_{(r, \varphi)} \bar{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ injektiv. Es bliebe noch, nachzuweisen, dass $\bar{F}(]0, +\infty[\times]0, 2\pi[) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0), x_1 \geq 0\}$ und dass $\bar{F} :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0), x_1 \geq 0\}$ Homöomorphismus ist (*Übungsaufgabe*). Es gilt für die Matrix der ersten Fundamentalform bzgl. $(]0, +\infty[\times]0, 2\pi[, \bar{F})$:

$$\begin{aligned} (g_{ij}(r, \varphi))_{i,j} &= \begin{pmatrix} \|\frac{\partial \bar{F}}{\partial r}(r, \varphi)\|^2 & \langle \frac{\partial \bar{F}}{\partial r}(r, \varphi), \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varphi}(r, \varphi) \rangle \\ \langle \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varphi}(r, \varphi), \frac{\partial \bar{F}}{\partial r}(r, \varphi) \rangle & \|\frac{\partial \bar{F}}{\partial \varphi}(r, \varphi)\|^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In diesem Fall hängt die Matrix $(g_{ij}(r, \varphi))_{i,j}$ von r ab.

2. Sei $S := S^2$ die Sphäre und

$$\begin{aligned} F_N := \pi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S^2 \setminus \{e_3\} \\ y &\longmapsto \frac{1}{1 + \|y\|^2} \begin{pmatrix} 2y_1 \\ 2y_2 \\ \|y\|^2 - 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei π_N die stereographische Projektion vom Nordpol bezeichnet, siehe Definition 2.5. Es gilt, für alle $y \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_N}{\partial y_1}(y) &= \frac{2}{(1 + \|y\|^2)^2} \begin{pmatrix} \|y\|^2 + 1 - 2y_1^2 \\ -2y_1y_2 \\ 2y_1 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial F_N}{\partial y_2}(y) &= \frac{2}{(1 + \|y\|^2)^2} \begin{pmatrix} -2y_1y_2 \\ \|y\|^2 + 1 - 2y_2^2 \\ 2y_2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

woraus

$$(g_{ij}(y))_{i,j} = \frac{4}{(1 + \|y\|^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{(1 + \|y\|^2)^2} \mathbf{I}_2$$

folgt. Bzgl. $F_S := \pi_S^{-1}$ kriegen wir durch analoge Rechnungen genau dieselbe Matrix.

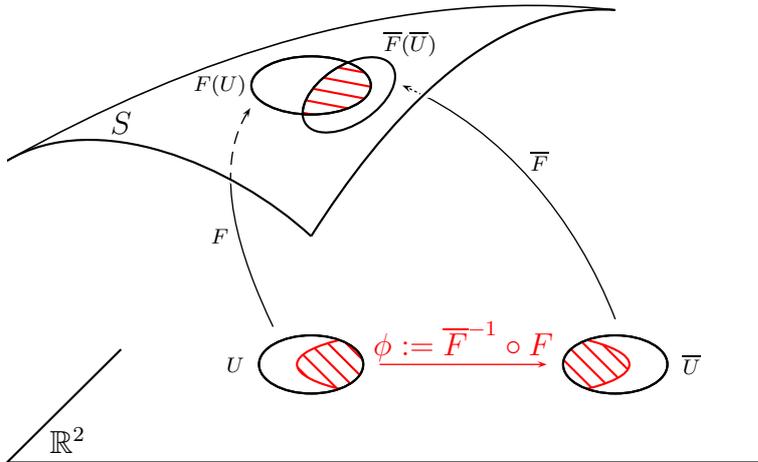
3. Sei $S := \text{Graph}(h)$, wobei $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt ist mit $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Betrachte die globale Parametrisierung (U, F) mit $F(y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ h(y) \end{pmatrix}$ für alle $y \in U$. Wegen

$\frac{\partial F}{\partial y_1}(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y_1}(y) \end{pmatrix}$ und $\frac{\partial F}{\partial y_2}(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial h}{\partial y_2}(y) \end{pmatrix}$ ist die Matrix der ersten Fundamentalform von S bezüglich (U, F) gegeben durch

$$(g_{ij}(y))_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial h}{\partial y_1}(y)^2 & \frac{\partial h}{\partial y_1}(y) \frac{\partial h}{\partial y_2}(y) \\ \frac{\partial h}{\partial y_1}(y) \frac{\partial h}{\partial y_2}(y) & 1 + \frac{\partial h}{\partial y_2}(y)^2 \end{pmatrix}.$$

Lemma 2.54 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $x \in S$. Seien (U, F) und (\bar{U}, \bar{F}) lokale Parametrisierungen von S um x , und $(g_{ij}(y))_{i,j}$ bzw. $(\bar{g}_{ij}(\bar{y}))_{i,j}$ die lokale Darstellung von der ersten Fundamentalform bzgl. (U, F) bzw. (\bar{U}, \bar{F}) wie in Definition 2.51. Setze

$$\phi := \bar{F}^{-1} \circ F : F^{-1}(F(U) \cap \bar{F}(\bar{U})) \longrightarrow \bar{F}^{-1}(F(U) \cap \bar{F}(\bar{U}))$$



(die Abbildung ϕ ist nach Beispiel 2.38.2 ein C^∞ Diffeomorphismus) und $A := \text{Mat}_{\{e_1, e_2\}}(d_{F^{-1}(x)}\phi)$ (die Jacobi-Matrix von ϕ in $F^{-1}(x)$). Dann gilt

$$\left(g_{ij}(F^{-1}(x)) \right)_{i,j} = {}^t A \cdot \left(\bar{g}_{ij}(\bar{F}^{-1}(x)) \right)_{i,j} \cdot A.$$

Beweis: Wegen $\bar{F} \circ \phi = F$ gilt nach der klassischen Kettenregel $d_y F = d_{\phi(y)} \bar{F} \circ d_y \phi$ für alle $y \in F^{-1}(F(U) \cap \bar{F}(\bar{U}))$ und somit

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(F^{-1}(x)) = d_{F^{-1}(x)} \bar{F} \left(\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(F^{-1}(x))}_{i\text{-te Spalte von } A} \right) = \sum_{j=1}^2 A_{ji} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_j}(\bar{F}^{-1}(x)),$$

woraus

$$\begin{aligned} g_{ij}(F^{-1}(x)) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(F^{-1}(x)), \frac{\partial F}{\partial x_j}(F^{-1}(x)) \right\rangle \\ &= \sum_{k,l=1}^2 A_{ki} A_{lj} \left\langle \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_k}(\bar{F}^{-1}(x)), \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_l}(\bar{F}^{-1}(x)) \right\rangle \\ &= \sum_{k,l=1}^2 A_{ki} \cdot \bar{g}_{kl}(\bar{F}^{-1}(x)) \cdot A_{lj} \\ &= ({}^t A \cdot (\bar{g}_{kl}(\bar{F}^{-1}(x)))_{k,l} \cdot A)_{ij} \end{aligned}$$

folgt, für alle $i, j \in \{1, 2\}$. □

2.6 Normalenfelder und Orientierbarkeit

Für Kurven hatten wir immer eine Orientierung zur Verfügung (siehe Abschnitt 1.1.3), die durch den Durchlaufsinne festgelegt war. Für Flächen hat natürlich der Durchlaufsinne keinen Sinn. Wie kann man dann eine Fläche orientieren? Grob gesprochen geht es darum, "Seiten" einer Fläche zu definieren (siehe Definition 2.58). Als Überraschung kommt allerdings heraus, dass es nicht auf jeder Fläche möglich ist (siehe Beispiele 2.57).

Definition 2.55 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche.

i) Ein Normalenfeld auf S ist eine Abbildung $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ s.d.

$$N(x) \perp T_x S$$

gilt für alle $x \in S$ (d.h., $\langle N(x), X \rangle = 0$ für alle $X \in T_x S$).

ii) Ein Einheitsnormalenfeld auf S ist ein Normalenfeld $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\|N(x)\| = 1$ für alle $x \in S$.

Bemerkungen 2.56

1. Ist $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ Normalenfeld auf S , so ist $fN : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ auch Normalenfeld auf S für jede Abbildung $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Hat N keine Nullstelle (d.h. $N(x) \neq 0$ für alle $x \in S$), so muss jedes Normalenfeld auf S von dieser Form sein, denn das orthogonale Komplement $T_x S^\perp$ zu $T_x S$ ist ein eindimensionaler Untervektorraum vom \mathbb{R}^3 .
2. Ist $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ Einheitsnormalenfeld auf S , so ist $-N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ auch Einheitsnormalenfeld auf S .

Normalenfelder kann man auf jeder Fläche definieren, die sogar nirgends verschwinden. Existieren aber *stetige* nirgendsverschwindende Normalenfelder auf jeder Fläche?

Beispiele 2.57

1. Sei $S := p_0 + E_0$ eine affine Ebene. Sei $n \in E_0^\perp$. Dann ist

$$N : S \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto N(x) := n,$$

stetiges Normalenfeld auf S . Gilt ferner $\|n\| = 1$, so ist N Einheitsnormalenfeld.

2. Sei S die Kugel. Dann ist

$$N : S \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto N(x) := x,$$

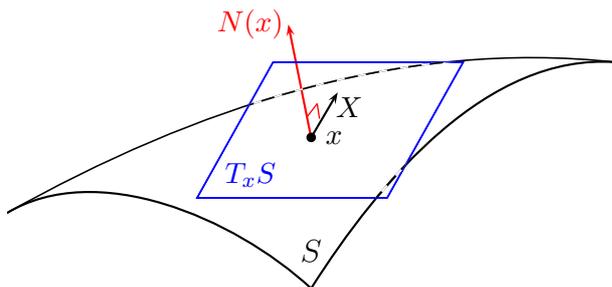
Einheitsnormalenfeld auf S (denn für jedes $x \in S^2$ gilt $\|x\| = 1$ und $T_x S = x^\perp$), welches offenbar stetig auf S ist.

3. Sei S das sogenannte *Möbiusband* (siehe Beispiel 2.87.5). Wir akzeptieren vorläufig, dass S eine reguläre Fläche ist. Dann gibt es *kein* stetiges Einheitsnormalenfeld auf S . Wir geben dieses Ergebnis ohne Beweis an, deuten aber an, dass man sich dadurch selbst davon überzeugen kann, dass man ein konkretes Möbiusband aus einer Streife Papier bastelt, und sieht, dass alle Versuche, ein solches Einheitsnormalenfeld global zu definieren, scheitern (es muss mindestens einen Punkt geben, in dem das Normalenfeld nicht stetig ist). Der “Grund” (dies ist aber kein sauberer Beweis!) dafür ist, dass S nur eine Seite hat. Für schöne Bilder dazu, siehe [1, Abschn. 3.4].

Definition 2.58

- i) Eine reguläre Fläche heißt orientierbar g.d.w. es ein stetiges Einheitsnormalenfeld darauf gibt.
- ii) Eine Orientierung auf einer orientierbaren regulären Fläche besteht aus der Wahl eines stetigen Einheitsnormalenfelds auf der Fläche.
- iii) Eine orientierbare Fläche zusammen mit einer Orientierung nennt man orientierte Fläche.

Interpretation: Angenommen, S sei orientiert. Sei N das stetige Einheitsnormalenfeld, welches die Orientierung von S liefert. Für jeden Punkt $x \in S$ induziert der Vektor $N(x)$ eine Orientierung des Vektorraums $T_x S$ wie folgt: eine Basis $\{u, v\}$ von $T_x S$ wird bzgl. dieser Orientierung genau dann positiv-orientiert, wenn $\{u, v, N(x)\}$ eine positiv-orientierte Basis von \mathbb{R}^3 ist (wobei \mathbb{R}^3 seine kanonische Orientierung trägt). Die Existenz eines *stetigen* Einheitsnormalenfelds N auf ganz S besagt dann, dass diese Orientierung von $T_x S$ “stetig von x abhängt”.



Lemma 2.59 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte reguläre Fläche und N das stetige Einheitsnormalenfeld, welches die Orientierung von S liefert. Ist (U, F) lokale Parametrisierung von S mit U zusammenhängend, so gilt entweder

$$N \circ F(y) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}(y) \times \frac{\partial F}{\partial x_2}(y)}{\left\| \frac{\partial F}{\partial x_1}(y) \times \frac{\partial F}{\partial x_2}(y) \right\|}$$

für alle $y \in U$ oder $N \circ F(y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}(y) \times \frac{\partial F}{\partial x_2}(y)}{\|\frac{\partial F}{\partial x_1}(y) \times \frac{\partial F}{\partial x_2}(y)\|}$ für alle $y \in U$. Insbesondere ist $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine C^∞ Abbildung.

Beweis: Sei $y \in U$. Da $\{\frac{\partial F}{\partial x_1}(y), \frac{\partial F}{\partial x_2}(y)\}$ eine Basis von $T_{F(y)}S$ ist, muss $\frac{\partial F}{\partial x_1}(y) \times \frac{\partial F}{\partial x_2}(y)$ nichtverschwindender Vektor sein, welcher senkrecht auf $T_{F(y)}S$ steht, und daher

$$\tilde{N}(y) := \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}(y) \times \frac{\partial F}{\partial x_2}(y)}{\|\frac{\partial F}{\partial x_1}(y) \times \frac{\partial F}{\partial x_2}(y)\|}$$

steht auch senkrecht auf $T_{F(y)}S$ und hat Norm 1. Wegen $\dim(T_{F(y)}S^\perp) = 1$ gilt

$$N \circ F(y) = \varepsilon(y)\tilde{N}(y)$$

für ein $\varepsilon(y) \in \{-1, 1\}$. Da aber N und $-\tilde{N}$ stetig sind, muss $\varepsilon : U \rightarrow \{-1, 1\}$ auch stetig sein. Da U zusammenhängend ist, muss eigentlich ε konstant sein, und somit gilt entweder $N \circ F(y) = \tilde{N}(y)$ für alle $y \in U$ oder $N \circ F(y) = -\tilde{N}(y)$ für alle $y \in U$. Bemerke letztens, dass \tilde{N} nicht nur stetig auf U sondern auch glatt ist. \square

Bemerkungen 2.60

1. Somit ist jede reguläre Fläche immer *lokal* orientierbar: um jeden Punkt $x \in S$ gibt es eine offene Umgebung Ω in S s.d. Ω orientierbare reguläre Fläche ist.
2. Aus denselben Gründen wie im Beweis von Lemma 2.59 sieht man, dass jede zusammenhängende orientierbare reguläre Fläche *genau zwei* Orientierungen besitzt (denn für zwei stetige Einheitsnormalenfelder N und \bar{N} ist $\{x \in S \mid N(x) = \bar{N}(x)\}$ nicht nur abgeschlossen sondern auch offen in S).

Orientierbarkeit wird also durch die Existenz eines stetigen (oder glatten, das ist nach Lemma 2.59 das gleiche) Einheitsnormalenfelds auf einer gegebenen Fläche geprüft. Gibt es allerdings *innere* Bedingungen (d.h., solche, die nur von der Fläche selbst abhängen, und nicht von dem umgebenden \mathbb{R}^3), die dafür sicherstellen können, dass eine Fläche orientierbar ist oder nicht? Orientierbar oder nicht orientierbar sein, ist keine philosophische Frage, wie es Lemma 2.61 zeigt:

Lemma 2.61 *Eine reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ ist genau dann orientierbar, wenn eine Familie $(V_i, \varphi_i)_i$ von lokalen Karten von S so existiert, dass*

- $\bigcup_{i \in I} (V_i \cap S) = S$ (die $V_i \cap S$'s überdecken S) und die V_i 's sind zusammenhängend,
- für alle $i, j \in I$ mit $V_i \cap V_j \cap S \neq \emptyset$ und für alle $y \in \varphi_i(V_i \cap V_j \cap S)$ gilt

$$\det(d_y(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})) > 0. \quad (2.3)$$

Beweis: Angenommen, S sei orientierbar. Sei $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Einheitsnormalfeld auf S . Sei $x \in S$ und (U, F) eine lokale Parametrisierung von S um x mit U zusammenhängend (bis auf Verkleinerung von U ist dies immer möglich). Nach Lemma 2.59 gilt dann: entweder $\det\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(y), \frac{\partial F}{\partial x_2}(y), N(F(y))\right) > 0$ für alle $y \in U$ oder $\det\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(y), \frac{\partial F}{\partial x_2}(y), N(F(y))\right) < 0$ für alle $y \in U$. Im ersten Fall lassen wir (U, F) unverändert. Im zweiten Fall ersetzen wir (U, F) durch (\bar{U}, \bar{F}) wobei $\bar{U} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ s.d. } (x_2, x_1) \in U\}$ und $\bar{F} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3, \bar{F}(x_1, x_2) := F(x_2, x_1)$. Es ist leicht, zu zeigen, dass (\bar{U}, \bar{F}) eine lokale Parametrisierung von S um x ist mit $\bar{F}(\bar{U}) = F(U)$ und

$$\det\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x_1}(y_2, y_1), \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_2}(y_2, y_1), N(\bar{F}(y_2, y_1))\right) = \det\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(y), \frac{\partial F}{\partial x_1}(y), N(F(y))\right) > 0$$

für alle $y = (y_1, y_2) \in U$.

Um jedes $x \in S$ kann also eine lokale Parametrisierung (U, F) von S so gefunden werden, dass $\det\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(y), \frac{\partial F}{\partial x_2}(y), N(F(y))\right) > 0$ für alle $y \in U$. O.B.d.A. - d.h., bis auf weitere Verkleinerung von U - komme F aus einer lokalen Karte von S (siehe Proposition 2.11): wir dürfen annehmen, dass eine lokale Karte (V, φ) von S um x existiert mit $V \cap S = F(U)$ und $\varphi|_{V \cap S} = F^{-1}$. Somit bekommt man eine Überdeckung von S durch lokale Karten mit

$$\det\left(\frac{\partial \varphi|_{V \cap S}^{-1}}{\partial x_1}(y), \frac{\partial \varphi|_{V \cap S}^{-1}}{\partial x_2}(y), N(F(y))\right) > 0 \quad \forall y \in \varphi(V \cap S). \quad (2.4)$$

Damit die Notationen nicht zu kompliziert werden, lassen wir die " $|_{V \cap S}$'s" weg. Es gilt dann, für zwei lokale Karten (V, φ) und (W, ψ) , die (2.4) erfüllen mit $V \cap W \cap S \neq \emptyset$: $d_y(\psi \circ \varphi^{-1}) = d_{\varphi^{-1}(y)}\psi \circ d_y\varphi^{-1}$ für alle $y \in V \cap S \cap W$, und bzgl. der Basen $\mathcal{B} := \left\{\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_1}(y), \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_2}(y)\right\}$ und $\mathcal{B}' := \left\{\frac{\partial \psi^{-1}}{\partial x_1}(\psi \circ \varphi^{-1}(y)), \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial x_2}(\psi \circ \varphi^{-1}(y))\right\}$ von $T_{\varphi^{-1}(y)}S$ gilt

$$\text{Mat}_{\{e_1, e_2\}}^{\{e_1, e_2\}}(d_y(\psi \circ \varphi^{-1})) = \underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B}'}^{\{e_1, e_2\}}(d_{\varphi^{-1}(y)}\psi)}_{I_2} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_{T_{\varphi^{-1}(y)}S}) \cdot \underbrace{\text{Mat}_{\{e_1, e_2\}}^{\mathcal{B}}(d_y\varphi^{-1})}_{I_2}, \quad (2.5)$$

somit

$$\begin{aligned} \det(d_y(\psi \circ \varphi^{-1})) &= \det(\text{Mat}_{\{e_1, e_2\}}^{\{e_1, e_2\}}(d_y(\psi \circ \varphi^{-1}))) \\ &= \det(\underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_{T_{\varphi^{-1}(y)}S})}_{=: M}). \end{aligned}$$

Aus (2.4) folgt aber $\det\left(\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) > 0$ (die Basen $\{\mathcal{B}, N \circ F(y)\}$ und $\{\mathcal{B}', N \circ \psi \circ \varphi^{-1}(y)\}$ von \mathbb{R}^3 haben dieselbe Orientierung), d.h., $\det(M) > 0$, und somit $\det(d_y(\psi \circ \varphi^{-1})) > 0$ für alle $y \in \varphi(V \cap S \cap W)$.

Umgekehrt setzen wir voraus, dass es eine Familie von lokalen Karten von S wie in der Aussage gibt. Für jede lokale Karte (V, φ) der Familie setze

$$N(x) := \frac{\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_1}(\varphi(x)) \times \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_2}(\varphi(x))}{\left\|\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_1}(\varphi(x)) \times \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_2}(\varphi(x))\right\|}$$

für alle $x \in V \cap S$. Dies definiert ein *globales* glattes Einheitsnormalenfeld auf S , denn: $\mathcal{B} := \left\{ \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_1}(\varphi(x)), \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_2}(\varphi(x)) \right\}$ ist Basis von $T_x S$ (somit ist $N(x)$ wohldefiniert, $N(x) \in T_x S^\perp$ und $\|N(x)\| = 1$) und N hängt *nicht* von der lokalen Karte um x ab, weil für jede weitere Karte (W, ψ) der Familie um ein $x \in S$ die Basen $\{\mathcal{B}, N(x)\}$ und $\{\mathcal{B}' := \left\{ \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial x_1}(\psi(x)), \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial x_2}(\psi(x)) \right\}, N(x)\}$ von \mathbb{R}^3 *dieselbe Orientierung* haben ($\det(\text{Mat}(\text{Id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}) > 0$ nach (2.3) und (2.5)) und somit

$$\frac{\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_1}(\varphi(x)) \times \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_2}(\varphi(x))}{\left\| \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_1}(\varphi(x)) \times \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_2}(\varphi(x)) \right\|} = \frac{\frac{\partial \psi^{-1}}{\partial x_1}(\psi(x)) \times \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial x_2}(\psi(x))}{\left\| \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial x_1}(\psi(x)) \times \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial x_2}(\psi(x)) \right\|}.$$

□

Lemma 2.61 besagt, dass Orientierbarkeit für eine feste reguläre Fläche S dadurch nachgewiesen werden kann, dass man durch jede lokale Karte von S die Orientierung von \mathbb{R}^2 auf eine offene Teilmenge von S “zurückzieht”, und prüft, ob diese lokalen Orientierungen miteinander verträglich sind (das ist die Bedingung (2.3)); wenn ja (und genau dann), dann ist S orientierbar.

Aus Lemma 2.61 folgt, dass die Orientierbarkeit für eine reguläre Fläche tatsächlich vom \mathbb{R}^3 nicht abhängt (obwohl man Flächen immer nur in \mathbb{R}^3 betrachtet hat!), denn lokale Karten sind *innere* Daten der Fläche (siehe Vorlesung Differentialgeometrie 1).

2.7 Die zweite Fundamentalform

2.7.1 Definition

Definition 2.62 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte reguläre Fläche und $x \in S$. Sei N das glatte Einheitsnormalenfeld zu S , welches die Orientierung von S liefert. Die Weingarten-Abbildung von S in x ist definiert durch

$$\begin{aligned} W_x : T_x S &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ X &\longmapsto -T_x N(X), \end{aligned}$$

wobei $T_x N : T_x S \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Tangentialabbildung von N in x ist.

Lemma 2.63 Die Weingarten-Abbildung von S in x ist ein Endomorphismus von $T_x S$, d.h., es gilt $W_x(T_x S) \subset T_x S$.

Beweis: Wegen $\|N(x')\| = 1$ für alle $x' \in S$ gilt $N(S) \subset S^2$, d.h., N nimmt seine Werte in der Sphäre an. Somit gilt $T_x N : T_x S \rightarrow T_{N(x)} S^2$. Es gilt aber $T_{N(x)} S^2 = N(x)^\perp$ (Beispiel 2.42.3) und nach Definition von $N(x)$ gilt $N(x)^\perp = T_x S$, was zu beweisen war. □

Wie rechnet man die Weingarten-Abbildung mit Hilfe einer lokalen Parametrisierung aus?

Lemma 2.64 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte reguläre Fläche und (U, F) eine lokale Parametrisierung von S . Dann gilt, für jedes $y \in U$ und $i, j \in \{1, 2\}$:

$$g_{F(y)}\left(W_{F(y)}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(y), \frac{\partial F}{\partial x_j}(y)\right)\right) = \left\langle N \circ F(y), \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(y) \right\rangle,$$

wobei N das glatte Einheitsnormalenfeld auf S ist, welches die Orientierung von S definiert.

Beweis: Aus den Definitionen von W_x und g_x folgt

$$\begin{aligned} g_{F(y)}\left(W_{F(y)}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(y), \frac{\partial F}{\partial x_j}(y)\right)\right) &= -\left\langle T_{F(y)}N\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(y)\right), \frac{\partial F}{\partial x_j}(y) \right\rangle \\ &= -\left\langle T_y(N \circ F)(e_i), \frac{\partial F}{\partial x_j}(y) \right\rangle \\ &= -\left\langle \frac{\partial(N \circ F)}{\partial x_i}(y), \frac{\partial F}{\partial x_j}(y) \right\rangle \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left\langle N \circ F, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle\right)(y) + \left\langle N \circ F(y), \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)(y) \right\rangle. \end{aligned}$$

In dieser Berechnung wurde die Produktregel (bzgl. des Skalarprodukts) angewendet sowie zweimal benutzt, dass das Differential und die Tangentialabbildung einer auf einer offenen Teilmenge vom \mathbb{R}^2 definierten differenzierbaren Abbildung übereinstimmen (siehe Beispiel 2.46.3). Es gilt aber $\langle N \circ F(y'), \frac{\partial F}{\partial x_j}(y') \rangle = 0$ für alle $y' \in U$ wegen $\frac{\partial F}{\partial x_j}(y') \in T_{F(y')}S$. Daraus folgt die Behauptung. \square

Korollar 2.65 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte reguläre Fläche und $x \in S$. Dann ist W_x bzgl. der ersten Fundamentalform g_x symmetrischer Endomorphismus von T_xS , d.h., es gilt

$$g_x(W_x(X), Y) = g_x(X, W_x(Y))$$

für alle $X, Y \in T_xS$.

Beweis: Wähle eine lokale Parametrisierung (U, F) von S um x . Nach Lemma 2.64 und dem Satz von Schwarz gilt dann

$$\begin{aligned} g_x\left(W_x\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(F^{-1}(x)), \frac{\partial F}{\partial x_j}(F^{-1}(x))\right)\right) &= \left\langle N(x), \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(F^{-1}(x)) \right\rangle \\ &= \left\langle N(x), \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(F^{-1}(x)) \right\rangle \\ &= g_x\left(W_x\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}(F^{-1}(x)), \frac{\partial F}{\partial x_i}(F^{-1}(x))\right)\right). \end{aligned}$$

Da $\left\{\frac{\partial F}{\partial x_i}(F^{-1}(x)), \frac{\partial F}{\partial x_j}(F^{-1}(x))\right\}$ Basis von T_xS und $(X, Y) \mapsto g_x(W_x(X), Y)$ bilinear ist, folgt die Behauptung. \square

Definition 2.66 Sei (U, F) eine lokale Parametrisierung einer orientierten regulären Fläche S . Dann wird für jedes $y \in U$ die 2×2 -Matrix $(h_{ij}(y))_{i,j}$ definiert durch

$$h_{ij}(y) := g_{F(y)}\left(W_{F(y)}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(y)\right), \frac{\partial F}{\partial x_j}(y)\right),$$

für alle $i, j \in \{1, 2\}$, d.h., $(h_{ij}(y))_{i,j}$ ist die Matrix der Bilinearform

$$(X, Y) \mapsto g_{F(y)}(W_{F(y)}(X), Y)$$

in der Basis $\left\{\frac{\partial F}{\partial x_i}(y), \frac{\partial F}{\partial x_j}(y)\right\}$ von $T_{F(y)}S$.

Definition 2.67 Die zweite Fundamentalform einer orientierten regulären Fläche S in einem Punkt $x \in S$ ist die symmetrische bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} II_x : T_x S \times T_x S &\longrightarrow T_x S^\perp = \mathbb{R}N(x) \\ (X, Y) &\longmapsto g_x(W_x(X), Y)N(x), \end{aligned}$$

wobei N das glatte Einheitsnormalenfeld auf S ist, welches die Orientierung von S liefert, und W_x die Weingarten-Abbildung von S in x .

Bemerkung 2.68 Wird die Orientierung von S gewechselt (d.h., wird N durch $-N$ ersetzt), so wird W_x durch $-W_x$ ersetzt, die zweite Fundamentalform II_x bleibt aber dieselbe Abbildung. Somit kann die zweite Fundamentalform auf *nichtorientierbaren* regulären Flächen definiert werden.

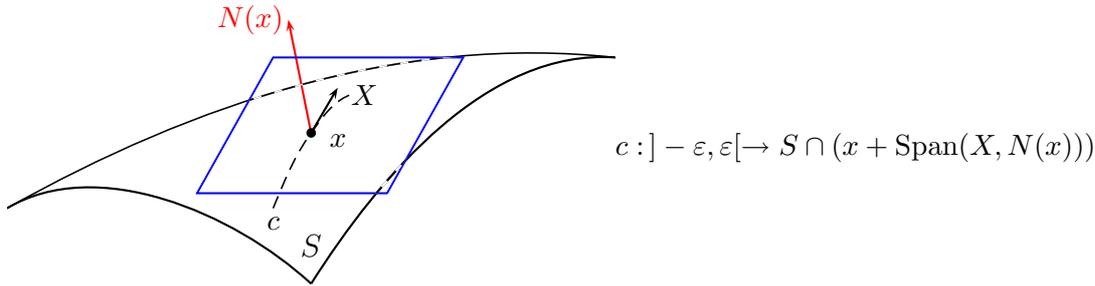
2.7.2 Krümmungen

Definition 2.69 Die Hauptkrümmungen einer orientierten regulären Fläche S in einem Punkt $x \in S$ sind die Eigenwerte der Weingarten-Abbildung W_x .

Bemerkung 2.70 Die Hauptkrümmungen von S in x sind wohldefinierte *reelle* Zahlen, denn W_x ist *symmetrischer* Endomorphismus von $T_x S$, und (siehe Linearalgebra) jeder symmetrischer Endomorphismus eines euklidischen Raums lässt sich in einer o.n.B. diagonalisieren und hat reelle Eigenwerte.

Warum heißen diese Eigenwerte *Krümmungen*?

Lemma 2.71 Sei S eine orientierte reguläre Fläche und $x \in S$ fest. Sei $X \in T_x S$ mit $g_x(X, X) = \|X\|^2 = 1$ und setze $E := x + \text{Span}(X, N(x)) \subset \mathbb{R}^3$. Die Ebene $\text{Span}(X, N(x))$ trage die Orientierung der Basis $\{X, N(x)\}$. Sei, für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow E \cap S$ nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c(0) = x$ und $c'(0) = X$.



Dann gilt

$$g_x(W_x(X), X) = \kappa(0),$$

wobei κ die Krümmung der ebenen Kurve c ist.

Beweis: Zuerst muss folgende Behauptung bewiesen werden.

Behauptung: Eine solche nach Bogenlänge parametrisierte Kurve c existiert.

Beweis der Behauptung: Sei V offene Umgebung von x in \mathbb{R}^3 und $\pi : V \rightarrow \mathbb{R}$ Submersion mit $V \cap S = \pi^{-1}(\{0\})$ (ein solches Paar (V, π) existiert nach Proposition 2.19). Dann ist $\Omega := E \cap V$ eine offene Umgebung von x in E . Setzt man $E_0 := \text{Span}(X, N(x))$, so ist $\Omega_0 := -x + \Omega$ offene Umgebung von 0 im zweidimensionalen Vektorraum E_0 . Die Abbildung $\pi_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \pi(x + y)$, ist offenbar C^∞ und es gilt $d_0\pi_0(N(x)) = d_x\pi(N(x)) \neq 0$ wegen $T_xS \cap E_0 = \text{Ker}(d_x\pi) \cap E_0 = \mathbb{R}X$. Aus dem Satz über Submersionen (Satz 2.18) folgt die Existenz einer offenen Umgebung W_0 von 0 in Ω_0 und eines C^∞ Diffeomorphismus $\varphi : W_0 \rightarrow \varphi(W_0)$ (mit $\varphi(W_0)$ offen in \mathbb{R}^2) s.d. $\pi_0 \circ \varphi^{-1}(y) = y_2$ gilt für alle $y \in \varphi(W_0)$. O.B.d.A. sei $\varphi(W_0)$ der Form $] - \varepsilon, \varepsilon[\times] - \varepsilon, \varepsilon[$ für ein $\varepsilon > 0$. Es gilt dann

$$(x + W_0) \cap S = x + \pi_0^{-1}(\{0\}) = \{x + \varphi^{-1}(y_1, 0) \mid y_1 \in] - \varepsilon, \varepsilon[\}$$

und $] - \varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\tilde{c}} (x + W_0) \cap S, t \mapsto x + \varphi^{-1}(t, 0)$ ist eine regulär parametrisierte Kurve, die in $E \cap S$ verläuft mit $\tilde{c}(0) = x$ und $\tilde{c}'(0) = \lambda X$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ (denn $\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_1}(y_1, 0) \in \text{Ker}(d_{\varphi^{-1}(y_1, 0)}\pi_0) = \text{Ker}(d_{x+\varphi^{-1}(y_1, 0)}\pi)$). Nach eventueller (orientierungserhaltender oder orientierungsumkehrender) Umparametrisierung von \tilde{c} nach Bogenlänge kann außerdem $c'(0) = X$ erreicht werden. \checkmark

Nach Definition von W_x gilt:

$$\begin{aligned} g_x(W_x(X), X) &= -\langle T_{c(0)}N(c'(0)), c'(0) \rangle \\ &= -\langle (N \circ c)'(0), c'(0) \rangle \\ &= -\left(\underbrace{\langle N \circ c, c' \rangle}'(0) + \langle N \circ c(0), c''(0) \rangle \right) \\ &\quad =_0 \langle N(x) \perp T_x S \rangle \\ &\stackrel{\text{Prop. 1.41}}{=} \kappa(0) \langle N \circ c(0), n(0) \rangle, \end{aligned}$$

wobei $n :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \text{Span}(X, N(x))$ das Normalenfeld zu c ist (siehe Definition 1.32). Außerdem gilt $c'(0) = X$ und $\{X, N(x)\}$ ist p.o.n.B. von $\text{Span}(X, N(x))$, insbesondere

gilt $n(0) = N(x)$ und somit

$$g_x(W_x(X), X) = \kappa(0)\langle N(x), N(x) \rangle = \kappa(0).$$

□

Insbesondere gilt, für $X := X_i$ Eigenvektor von W_x zum Eigenwert λ_i mit $\|X_i\| = 1$:

$$\kappa_i(0) = g_x(W_x(X_i), X_i) = \lambda_i g_x(X_i, X_i) = \lambda_i,$$

wobei κ_i die Krümmung einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve $c :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow (x + \text{Span}(\{X_i, N(x)\})) \cap S$ ist mit $c(0) = x$ und $c'(0) = X_i$. Die Hauptkrümmungen sind also wohl Krümmungen ebener Kurven.

Definition 2.72 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ orientierte reguläre Fläche. Ein Punkt $x \in S$ heißt genau dann Nabelpunkt von S , wenn ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so existiert, dass $W_x = \lambda \cdot \text{Id}_{T_x S}$ gilt (d.h., wenn beide Hauptkrümmungen von S in x gleich sind).

Beispiele 2.73

1. Sei $S := p_0 + E_0$ eine affine Ebene. Die reguläre Fläche S ist orientierbar, und für $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, $N(x) := n$ (wobei $n \in E_0^\perp$ mit $\|n\| = 1$) gilt $W_x = -T_x N = 0$ (die Abbildung N ist konstant auf S) für jedes $x \in S$, d.h., jeder Punkt von S ist Nabelpunkt.
2. Sei S der Graph einer C^∞ Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ (wobei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen ist). Auf S kann folgendes C^∞ Einheitsnormalenfeld definiert werden (siehe Lemma 2.59):

$$N(x) := \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}(F^{-1}(x)) \times \frac{\partial F}{\partial x_2}(F^{-1}(x))}{\left\| \frac{\partial F}{\partial x_1}(F^{-1}(x)) \times \frac{\partial F}{\partial x_2}(F^{-1}(x)) \right\|},$$

wobei $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ h(y) \end{pmatrix}$. Nach Berechnung der partiellen Ableitungen von F bis um die zweite Ordnung in $y \in U$ ergibt sich

$$N \circ F(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\text{grad}_y h\|^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x_1}(y) \\ -\frac{\partial h}{\partial x_2}(y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $\text{grad}_y h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1}(y) \\ \frac{\partial h}{\partial x_2}(y) \end{pmatrix}$ und $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(y) \end{pmatrix}$ für alle $i, j \in \{1, 2\}$.

Damit bekommt man, für alle $y \in U$,

$$(h_{ij}(y))_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\text{grad}_y h\|^2}} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(y) \right)_{i,j}.$$

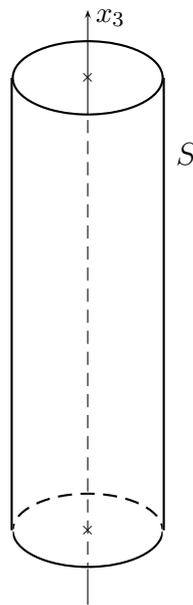
3. Sei $S := S^2$. Dann ist S orientierbare reguläre Fläche, und für das durch $N(x) := x$ auf S definierte glatte Einheitsnormalenfeld N gilt:

$$W_x = -T_x N = -\text{Id}_{T_x S}$$

für alle $x \in S$. Insbesondere ist jeder Punkt der Sphäre Nabelpunkt, und bzgl. jeder lokalen Parametrisierung (U, F) von S gilt

$$(h_{ij}(y))_{i,j} = -(g_{ij}(y))_{i,j}.$$

4. Sei $S := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ s.d. } x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\} = S^1 \times \mathbb{R}$ der Zylinder von Radius 1 um die x_3 -Achse.



Bemerke zuerst, dass $S \subset \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}e_3$ Niveauläche von $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}e_3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi(x) := x_1^2 + x_2^2$ (die eine Submersion $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}e_3 \rightarrow \mathbb{R}$ ist) ist und somit orientierbare reguläre

Fläche. Wegen $T_x S = \text{Ker}(d_x \pi) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}^\perp$ für jedes $x \in S$ kann man als glattes

Einheitsnormalenfeld $N(x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf S definieren.

Es gilt dann, für jedes $X \in T_x S \subset \mathbb{R}^3$: $W_x(X) = -\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Eine p.o.n.B von

$T_x S$ wird aber gegeben durch $\left\{ u(x) := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, v(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, somit gelten

$W_x(u(x)) = -u(x)$ und $W_x(v(x)) = 0$, d.h., es gilt

$$\text{Mat}_{\{u(x), v(x)\}}(W_x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Fläche S hat in jedem Punkt zwei Hauptkrümmungen, 0 und -1 .

Definition 2.74 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ orientierte reguläre Fläche und $x \in S$.

1. Eine Hauptkrümmungsrichtung von S in x ist eine lineare Gerade in $T_x S$, die in einem Eigenraum von W_x enthalten ist.
2. Eine Krümmungslinie von S in x ist eine regulär parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow S$ s.d. $c'(t)$ in einer Hauptkrümmungsrichtung von S in $c(t)$ enthalten ist, für alle $t \in I$.

Beachte, dass immer $c'(t) \in T_{c(t)} S$ gilt, falls $c : I \rightarrow S$ ableitbare Abbildung ist. Bemerke auch, dass beide Begriffe auf nichtorientierbaren Flächen definiert werden können.

Beispiele 2.75

1. Ist S eine affine Ebene oder die Sphäre S^2 , so sind für alle $x \in S$ alle linearen Geraden in $T_x S$ Hauptkrümmungsrichtungen von S in x . Daraus folgt insbesondere, dass alle regulär parametrisierten Kurven auf S Krümmungslinien sind.
2. Ist allgemeiner x Nabelpunkt von S , so sind alle linearen Geraden in $T_x S$ Hauptkrümmungsrichtungen von S in x .
3. Ist $S = S^1 \times \mathbb{R}$ der Zylinder vom Radius 1 um die x_3 -Achse (Beispiel 2.73.3) und $x \in S$ gegeben, so gibt es genau zwei Hauptkrümmungsrichtungen von S in x : die Geraden $\mathbb{R}u(x)$ und $\mathbb{R}v(x)$ (in den Bezeichnungen von Beispiel 2.73.3). Die Krümmungslinien von S in x sind die waagerechten Kreisbögen und die senkrechten Geradenstrecken durch x .

Definition 2.76 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ orientierte reguläre Fläche und $x \in S$.

i) Die Gauss-Krümmung von S in x ist definiert durch

$$K(x) := \det(W_x) \in \mathbb{R}.$$

ii) Die mittlere Krümmung von S in x ist definiert durch

$$H(x) := \frac{1}{2} \operatorname{tr}(W_x) \in \mathbb{R},$$

wobei "tr" die Spur bezeichnet.

iii) Das mittlere Krümmungsfeld von S in x ist definiert durch

$$\vec{H} := H(x)N(x).$$

Bemerkungen 2.77

1. Sind $\lambda_1(x)$ und $\lambda_2(x)$ die Hauptkrümmungen von S in x (bzgl. eines festen Einheitsnormalenfelds N auf S), so gilt

$$\left| \begin{array}{l} K(x) = \lambda_1(x)\lambda_2(x) \\ H(x) = \frac{\lambda_1(x)+\lambda_2(x)}{2} \end{array} \right.$$

2. Wird die Orientierung von S umgekehrt (d.h., wird N durch $-N$ ersetzt), so bleibt K dieselbe (denn W_x wird $-W_x$ und $\det(-W_x) = (-1)^2 \det(W_x) = \det(W_x)$) und so ändert sich H um ein Vorzeichen (denn $\text{tr}(-W_x) = -\text{tr}(W_x)$); das mittlere Krümmungsfeld bleibt allerdings unverändert. Daraus folgt insbesondere, dass K , H^2 und \vec{H} auf nichtorientierbaren regulären Flächen definiert werden können.

Gibt es einen Zusammenhang zwischen der Gauss- und der mittleren Krümmung?

Proposition 2.78 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $x \in S$ gegeben. Dann gilt

$$K(x) \leq H(x)^2,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn x Nabelpunkt von S ist.

Beweis: Sei N in einer Umgebung von x in S definiertes C^∞ Einheitsnormalenfeld auf S . Seien $\lambda_1(x)$ und $\lambda_2(x)$ die Hauptkrümmungen von S in x bzgl. N . Dann gilt:

$$\begin{aligned} H^2(x) - K(x) &= \left(\frac{\lambda_1(x) + \lambda_2(x)}{2} \right)^2 - \lambda_1(x)\lambda_2(x) \\ &= \frac{\lambda_1(x)^2 - 2\lambda_1(x)\lambda_2(x) + \lambda_2(x)^2}{4} \\ &= \left(\frac{\lambda_1(x) - \lambda_2(x)}{2} \right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

was die Ungleichung beweist. Die Gleichheit gilt genau dann, wenn $\lambda_1(x) = \lambda_2(x)$ gilt, d.h., wenn beide Hauptkrümmungen von S in x gleich sind. \square

Wie rechnet man allgemein die Hauptkrümmungen, die mittlere und die Gauss-Krümmung mittels einer lokalen Parametrisierung aus?

Proposition 2.79 Sei S eine orientierte reguläre Fläche und (U, F) eine lokale Parametrisierung von S . Dann gilt, für jedes $y \in U$ und bzgl. der Basis $\left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1}(y), \frac{\partial F}{\partial x_2}(y) \right\}$ von $T_{F(y)}S$:

$$(h_{ij}(y))_{i,j} = (g_{ij}(y))_{i,j} \cdot \text{Mat}(W_{F(y)}).$$

Insbesondere gilt

$$\left| \begin{array}{l} H \circ F(y) = \frac{1}{2} \text{tr} \left((g_{ij}(y))_{i,j}^{-1} \cdot (h_{ij}(y))_{i,j} \right) \\ K \circ F(y) = \det \left((g_{ij}(y))_{i,j}^{-1} \cdot (h_{ij}(y))_{i,j} \right) = \frac{\det((h_{ij}(y))_{i,j})}{\det((g_{ij}(y))_{i,j})} \end{array} \right.$$

und H und K sind C^∞ Abbildungen auf S .

Beweis: Die erste Identität folgt unmittelbar aus folgender Behauptung aus der Linearalgebra.

Behauptung: Ist f Endomorphismus eines n -dimensionalen euklidischen Raumes $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und $\mathcal{B} = (v_j)_{1 \leq j \leq n}$ eine beliebige Basis von V , so gilt für die Matrizen H der Bilinearform $(X, Y) \mapsto \langle f(X), Y \rangle$ bzw. G der Bilinearform $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle$ bzw. M von f in der Basis \mathcal{B}

$${}^t H = G \cdot M.$$

Beweis der Behauptung: Für jede $1 \leq i, j \leq n$ gilt nach Definition

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \langle f(v_i), v_j \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n M_{ki} \langle v_k, v_j \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n M_{ki} G_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n G_{jk} M_{ki} \\ &= (G \cdot M)_{ji}, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. ✓

Man wende die Behauptung an mit $V = T_x S$, $\langle \cdot, \cdot \rangle = g_x$, $f = W_x$ und wähle als Basis $\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1}(F^{-1}(x)), \frac{\partial F}{\partial x_2}(F^{-1}(x)) \right\}$. Die beiden letzten Identitäten folgen direkt aus dieser. Bemerke dann, dass die auf der rechten Seite stehenden Ausdrücke C^∞ von y abhängen. \square

2.7.3 Geometrische Interpretation der Gauss-Krümmung

Wie bei Kurven wollen wir die "lokale Gestalt" einer regulären Fläche von ihrer "Krümmung" ablesen. Das zentrale Ergebnis, welches es uns erlaubt, ist folgender Satz:

Satz 2.80 *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Fläche und $x \in S$ ein Punkt. Dann existiert eine lokale Parametrisierung (U, F) von S um x mit den folgenden Eigenschaften:*

- i) $0 \in U$ und $F(0) = x$,
- ii) $(g_{ij}(0))_{1 \leq i, j \leq 2} = I_2$,
- iii) $\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k}(0) \right)_{1 \leq i, j \leq 2} = 0$ für alle $k \in \{1, 2\}$,
- iv) Für alle $y \in U$ gilt

$$F(y) = x + y_1 \frac{\partial F}{\partial y_1}(y) + y_2 \frac{\partial F}{\partial y_2}(y) + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^2 h_{ij}(0) y_i y_j N(x) + O(\|y\|^3),$$

$$\text{wobei } N(x) := \frac{\frac{\partial F}{\partial y_1}(F^{-1}(x)) \times \frac{\partial F}{\partial y_2}(F^{-1}(x))}{\left\| \frac{\partial F}{\partial y_1}(F^{-1}(x)) \times \frac{\partial F}{\partial y_2}(F^{-1}(x)) \right\|}.$$

Beweis: Wir wählen eine beliebige lokale Parametrisierung (U, F) von S um x und ändern sie schrittweise, bis alle Eigenschaften i) – iv) erfüllt sind.

Sei erstens $y_0 := F^{-1}(x) \in U$ und setze $U_0 := -y_0 + U$. Betrachte die Abbildung $F_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F_0(y) := F(y + y_0)$ für alle $y \in U_0$. Da eine Verschiebung ein C^∞ Diffeomorphismus des \mathbb{R}^2 ist, ist $F_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lokale Parametrisierung von S um x mit $0 = -y_0 + y_0 \in U_0$ und $F_0(0) = F(y_0) = x$, somit ist i) für F_0 erfüllt. Um zusätzliche Notationen zu vermeiden, bezeichnen wir die neue lokale Parametrisierung (U_0, F_0) wieder mit (U, F) .

Um *ii)* zu erreichen, verknüpfen wir F mit einer geeigneten linearen Transformation des \mathbb{R}^2 . Fixiere dafür eine o.n.B. $\{X_1, X_2\}$ von $T_x S$. Da $d_0 F : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_x S$ ein linearer Isomorphismus ist (siehe Proposition 2.40), existieren genau zwei Vektoren Y_1, Y_2 von \mathbb{R}^2 mit $d_0 F(Y_k) = X_k$, $k = 1, 2$. Definiere die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $A(e_k) := Y_k$, $k = 1, 2$. Wegen der linearen Unabhängigkeit der beiden Vektoren Y_1, Y_2 ist A ein linearer Automorphismus von \mathbb{R}^2 . Setze $\bar{U} := A^{-1}(U)$ und $\bar{F} := F \circ A : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, dann ist (\bar{U}, \bar{F}) eine lokale Parametrisierung von S um x mit $0 = A^{-1}(0) \in \bar{U}$, $\bar{F}(0) = F(0) = x$ und nach Anwendung der Kettenregel bekommt man

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y_k}(0) = d_0 F(A(e_k)) = d_0 F(Y_k) = X_k$$

für alle $k = 1, 2$. Da $\{X_1, X_2\}$ eine o.n.B. von $T_x S$ ist, gilt insbesondere für die Koeffizienten der ersten Fundamentalform $\bar{g}_{ij}(0) = \langle \frac{\partial \bar{F}}{\partial y_i}(0), \frac{\partial \bar{F}}{\partial y_j}(0) \rangle = \langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq 2$, somit sind *i)* und *ii)* für (\bar{U}, \bar{F}) erfüllt. Wiederum bezeichnen wir die neue lokale Parametrisierung mit (U, F) statt (\bar{U}, \bar{F}) .

Im letzten Schritt wollen wir *iii)* und *iv)* gleichzeitig durch eine geeignete "quadratische" Variablentransformation erreichen. Wir suchen nämlich nach einem - in der Nähe des Ursprungs definierten - Diffeomorphismus φ so, dass $\tilde{F} := F \circ \varphi$ die Eigenschaften *i)*, *ii)* und *iv)* besitzt. Anschließend zeigen wir, dass *iii)* dann auch automatisch erfüllt ist. Um zuerst *i)* und *ii)* für \tilde{F} zu behalten, fordern wir $\varphi(0) = 0$ sowie $d_0 \varphi = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$. Die Taylor-Entwicklung bis um die 2. Ordnung von \tilde{F} in der Nähe von 0 lautet dann

$$\tilde{F}(y) = \tilde{F}(0) + \sum_{k=1}^2 y_k \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y_k}(0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 y_i y_j \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y_i \partial y_j}(0) + O(\|y\|^3)$$

für alle $y \in \mathbb{R}^2$ nahe genug an 0 (zur Erinnerung steht $O(\|y\|^3)$ für eine - hier vektorwertige - Abbildung in der Nähe des $0 \in \mathbb{R}^2$ mit $\|O(\|y\|^3)\| \leq M\|y\|^3$ für ein $M \in \mathbb{R}$, welches unabhängig von y ist). Wegen der Annahmen an φ und der Eigenschaften *i)* - *ii)* für F gilt $\tilde{F}(0) = F(0) = x$ und $d_0 \tilde{F} = d_0 F \circ d_0 \varphi = d_0 F$, insbesondere gilt $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y_k}(0) = X_k$ für alle $k = 1, 2$. Damit sind schon *i)* und *ii)* für \tilde{F} erfüllt. Nun berechnen wir die zweiten partiellen Ableitungen von \tilde{F} . Dazu bezeichnen wir wie üblich die Koordinatenfunktionen von φ mit $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, wobei φ_k eine reellwertige Funktion ist. Wegen

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y_k}(y) = d_{\varphi(y)} F \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_k}(y) \right) = \sum_{l=1}^2 \frac{\partial \varphi_l}{\partial y_k}(y) \frac{\partial F}{\partial y_l}(\varphi(y))$$

für alle y nahe 0 gilt beim Ableiten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y_i \partial y_j}(0) &= \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\sum_{l=1}^2 \frac{\partial \varphi_l}{\partial y_j}(y) \frac{\partial F}{\partial y_l}(\varphi(y)) \right) \Big|_{y=0} \\ &= \sum_{l=1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial y_i \partial y_j}(0) \frac{\partial F}{\partial y_l}(\varphi(0)) + \frac{\partial \varphi_l}{\partial y_j}(0) \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}(0) \frac{\partial^2 F}{\partial y_k \partial y_l}(\varphi(0)) \\ &= \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y_i \partial y_j}(0) X_k + \sum_{k,l=1}^2 \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}(0) \frac{\partial \varphi_l}{\partial y_j}(0) \frac{\partial^2 F}{\partial y_k \partial y_l}(0) \\ &= \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y_i \partial y_j}(0) X_k + \sum_{k,l=1}^2 \delta_{ik} \delta_{jl} \frac{\partial^2 F}{\partial y_k \partial y_l}(0) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y_i \partial y_j}(0) X_k + \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}(0).$$

Insgesamt bekommt man für die obige Taylor-Entwicklung von \tilde{F} um 0:

$$\tilde{F}(y) = x + \sum_{k=1}^2 y_k X_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 y_i y_j \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}(0) + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y_i \partial y_j}(0) X_k \right) + O(\|y\|^3).$$

Eigenschaft *iv*) für \tilde{F} gilt genau dann, wenn die Orthogonalprojektion jedes Vektors $\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y_i \partial y_j}(0) \in \mathbb{R}^3$ (mit $1 \leq i, j \leq 2$) auf $T_x S$ verschwindet, siehe Lemma 2.64. Die letzte Identität zeigt, dass dies zu $\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y_i \partial y_j}(0) = -\langle \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}(0), X_k \rangle$ für alle $k = 1, 2$ äquivalent ist. Dies führt zur folgenden Definition für φ : man setze $\varphi := (\varphi_1, \varphi_2)$ mit

$$\varphi_k(y) := y_k - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 y_i y_j \langle \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}(0), X_k \rangle$$

für alle $y \in \mathbb{R}^2$. Die Abbildung φ ist offensichtlich eine C^∞ -Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und erfüllt $\varphi(0) = 0$ sowie $d_0 \varphi = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$, insbesondere induziert φ einen C^∞ -Diffeomorphismus $\tilde{U} \rightarrow \varphi(\tilde{U})$, wobei \tilde{U} eine offene Umgebung von 0 im \mathbb{R}^2 ist (Umkehrsatz!). Bis auf Verkleinerung von \tilde{U} kann $\varphi(\tilde{U}) \subset U$ angenommen werden. Nun erfüllt $(\tilde{U}, \tilde{F} := F \circ \varphi)$ auch Eigenschaft *iv*) nach Konstruktion von φ .

Als letztes zeigen wir, dass auch *iii*) erfüllt ist. Für die Koeffizienten der ersten Fundamentalform bzgl. (\tilde{U}, \tilde{F}) gilt, für alle $1 \leq i, j, k \leq 2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial y_k}(0) &= \left\langle \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y_k \partial y_i}(0), \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y_j}(0) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y_i}(0), \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y_k \partial y_j}(0) \right\rangle \\ &= \tilde{h}_{ki}(0) \langle N(x), X_j \rangle + \tilde{h}_{kj}(0) \langle X_i, N(x) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

wegen $\langle X_k, N(x) \rangle = 0$ für alle $k = 1, 2$. Damit ist der Beweis zu Ende. \square

Man beachte, dass die in Satz 2.80 gewonnenen Eigenschaften für (U, F) nur "im Punkt x " gelten. Im Allgemeinen kann zum Beispiel nicht angenommen werden, dass $g_{ij}(y) = \delta_{ij}$ für alle $y \in U$ erfüllt ist (*Übungsaufgabe: warum?*).

Definition 2.81 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ orientierte reguläre Fläche. Ein Punkt $x \in S$ heißt genau dann

- i*) elliptisch, wenn $K(x) > 0$ gilt.
- ii*) hyperbolisch, wenn $K(x) < 0$ gilt.
- iii*) parabolisch, wenn $K(x) = 0$ und $W_x \neq 0$ gelten.
- iv*) Flachpunkt, wenn $W_x = 0$ gilt.

Satz 2.80 kann nun zur Bestimmung der lokalen Gestalt einer orientierten regulären Fläche S angewendet werden. Sei $x \in S$ ein fester Punkt. Nach Satz 2.80 existiert eine lokale Parametrisierung (U, F) von S um x , welche *i*) – *iv*) genügt. Bis auf ein $O(\|y\|^3)$ - was

klein im Vergleich mit allen anderen Summanden ist - kann dann $F(U)$ als Graph der Funktion $x + y_1X_1 + y_2X_2 \mapsto \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 h_{ij}(0)y_iy_j$ über $x + T_xS$ angesehen werden, mit Werten in $\mathbb{R} \cdot N(x)$. Diese Funktion ist aber eine *quadratische Form*, deren Graph einfach zu beschreiben ist:

- *Fall $K(x) > 0$:* In diesem Fall ist x elliptischer Punkt von S . Die Hauptkrümmungen von S in x sind dann entweder beide positiv oder beide negativ, und die entsprechenden Krümmungslinien biegen in dieselbe Richtung. In dem Fall sieht S lokal um x einem Paraboloid aus.
- *Fall $K(x) < 0$:* In diesem Fall ist x hyperbolischer Punkt von S . Die Hauptkrümmungen von S in x haben entgegengesetzte Vorzeichen, d.h., eine der beiden Krümmungslinien biegt in Richtung des Normalenfelds, die andere in die andere Richtung. Die Fläche S sieht lokal um x einem Sattel aus (der Punkt x heißt *Sattelpunkt* von S).
- *Fall $K(x) = 0$ und $W_x \neq 0$:* In diesem Fall ist x parabolischer Punkt von S . Eine der beiden Krümmungslinien hat verschwindende Krümmung an der Stelle x , die andere aber nicht. In dem Fall sieht S lokal um x einem gebogenen Halbzylinder aus.
- *Fall $W_x = 0$ (insbesondere $K(x) = 0$):* In diesem Fall ist x Flachpunkt von S . Beide Krümmungslinien haben verschwindende Krümmung an der Stelle x . Es gibt daher keine allgemeine Aussage über die lokale Gestalt von S um x : verschiedene geometrische Situationen können hier auftreten.

Schöne Bilder dazu können in [1] gefunden werden.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem Satz ab, der die geometrische Bedeutung der Gauss-Krümmung veranschaulicht.

Satz 2.82 *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ kompakte reguläre Fläche. Dann existiert ein Punkt $x \in S$ mit $K(x) > 0$.*

Beweis: Aus dem Satz von Heine-Borel (siehe z.B. [5]) folgt, dass S beschränkt und abgeschlossen im \mathbb{R}^3 ist. Insbesondere existiert ein $R \in]0, +\infty[$ mit $S \subset \overline{B}(0, R) := \{x \in \mathbb{R}^3 \text{ s.d. } \|x\| \leq R\}$. Setze

$$R_0 := \inf_{R \in]0, +\infty[} \{R \text{ s.d. } S \subset \overline{B}(0, R)\}.$$

Bemerke, dass $R_0 \in [0, +\infty[$ wohldefinierte reelle Zahl ist.

Behauptung: Es gilt $S \subset \overline{B}(0, R_0)$ (insbesondere gilt auch $R_0 > 0$).

Beweis der Behauptung: Angenommen, es gelte $S \not\subset \overline{B}(0, R_0)$. Sei $x \in S \setminus \overline{B}(0, R_0)$. Da $\overline{B}(0, R_0)$ abgeschlossen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\overline{B}(x, \varepsilon) \cap \overline{B}(0, R_0) = \emptyset$. Es gilt dann $x \notin \overline{B}(0, R_0 + \varepsilon)$, sonst würde nach der Dreiecksungleichung

$$\|x - \frac{R_0}{\|x\|}x\| = \left| \|x\| - R_0 \right| = \|x\| - R_0 \leq \varepsilon$$

gelten, somit würde das Element $\frac{R_0}{\|x\|}x \in \overline{B}(0, R_0)$ auch in $\overline{B}(x, \varepsilon)$ liegen, d.h., es würde $\frac{R_0}{\|x\|}x \in \overline{B}(0, R_0) \cap \overline{B}(x, \varepsilon)$ gelten, Widerspruch zur Wahl von ε . Die Definition von R_0 wird

damit durch $S \not\subset \overline{B}(0, R_0 + \varepsilon)$ widersprochen. ✓

Behauptung: Es gilt $S \cap S^2(0, R_0) \neq \emptyset$, wobei $S^2(0, R_0) := \{x \in \mathbb{R}^3 \text{ s.d. } \|x\| = R_0\}$.

Beweis der Behauptung: Angenommen, es wäre falsch. Dann wäre der Abstand

$$d(S, S^2(0, R_0)) := \inf\{\|x - y\|, \quad x \in S, y \in S^2(0, R_0)\}$$

größer gleich einem $\varepsilon > 0$ (die Abbildung $S \times S^2(0, R_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \|x - y\|$, ist stetig auf dem kompakten topologischen Raum $S \times S^2(0, R_0)$, sie erreicht insbesondere ein Minimum darauf). Damit würde

$$S \subset \overline{B}(0, R_0 - \varepsilon)$$

gelten (denn für jedes $x \in S$ gilt $\|x - \underbrace{\frac{R_0}{\|x\|}x}_{\in S^2(0, R_0)}\| \geq \varepsilon$ und somit gilt wegen $\|x - \frac{R_0}{\|x\|}x\| = \left| \|x\| - R_0 \right|$ entweder $\underbrace{\|x\| \geq R_0 + \varepsilon}_{\text{ausgeschl. wegen } S \subset \overline{B}(0, R_0)}$ oder $\|x\| \leq R_0 - \varepsilon$), was ein Widerspruch zur Definition von R_0 wäre. ✓

Behauptung: Sei $x \in S \cap S^2(0, R_0)$. Es gilt: $T_x S = T_x S^2(0, R_0) = x^\perp$.

Beweis der Behauptung: Sei $c:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ C^∞ parametrisierte Kurve mit $c(0) = x$. Wegen $S \subset \overline{B}(0, R_0)$ gilt

$$\|c(0)\|^2 = R_0^2 = \max_{t \in]-\varepsilon, \varepsilon[} \|c(t)\|^2.$$

Wegen $t \mapsto \|c(t)\|^2 \in C^\infty$ gilt dann $(\|c\|^2)'(0) = 0$, d.h., $\langle c'(0), x \rangle = 0$, somit gilt $T_x S \subset x^\perp$. Da aber $T_x S$ und $T_x S^2(0, R_0) = x^\perp$ zweidimensional sind, gilt $T_x S = x^\perp$.

Behauptung: Für ein solches $x \in S \cap S^2(0, R_0)$ gilt $K(x) \geq \frac{1}{R_0^2} > 0$.

Beweis der Behauptung: Sei $X \in T_x S$ mit $g_x(X, X) = 1$. Wir zeigen $|g_x(W_x(X), X)| \geq \frac{1}{R_0}$. Die Behauptung folgt direkt daraus, da dann entweder $g_x(W_x(X), X) \geq \frac{1}{R_0}$ für alle solche X 's oder $g_x(W_x(X), X) \leq -\frac{1}{R_0}$ für alle solche X 's (die Funktion $X \mapsto g_x(W_x(X), X)$ ist stetig auf dem Kreis $\{X \in T_x S, \|X\| = 1\}$, und ein Kreis ist zusammenhängend) und in beiden Fällen gilt $\det(W_x) \geq \frac{1}{R_0^2}$.

Es gilt nach Lemma 2.71 $g_x(W_x(X), X) = \kappa(0)$, wobei κ die Krümmung einer nach Bogenlänge parametrisierten (ebenen) Kurve $c:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S \cap \{x + \text{Span}(X, N(x))\}$ mit $c(0) = x$ und $c'(0) = X$. Die C^∞ Abbildung $f:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) := \|c(t)\|^2$ erreicht aber dann ihr Maximum in 0: $f(0) = R_0^2 \geq f(t)$ für alle $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Insbesondere gilt auch

$$f''(0) \leq 0,$$

d.h., $\langle c''(0), c(0) \rangle + \|c'(0)\|^2 \leq 0$, oder noch

$$\kappa(0) \langle n(0), x \rangle + 1 \leq 0.$$

Zusammen mit $n(0) = N(x) = \pm \frac{x}{R_0}$ (denn es gilt $\|x\| = R_0$) ergibt sich

$$1 \leq -\kappa(0) \langle n(0), x \rangle = |\kappa(0) \langle n(0), R_0 n(0) \rangle| = |\kappa(0)| R_0,$$

d.h., $|\kappa(0)| \geq \frac{1}{R_0}$, was zu zeigen war.

Der Satz ist somit bewiesen. ✓
□

Die Aussage dieses Satzes entspricht der Vorstellung, dass ein Punkt auf S mit maximalem Abstand zum Ursprung $0 \in \mathbb{R}^3$ einem elliptischen Punkt aussehen muss, es sei denn man könnte einen weiteren Punkt auf der Fläche mit größerem Abstand zu 0 finden. Bemerke, dass dies für nichtkompakte Flächen natürlich nicht gilt (betrachte z.B. eine affine Ebene).

2.7.4 Minimalflächen

Definition 2.83 Eine reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt genau dann minimal, wenn $\vec{H} = 0$ gilt, wobei \vec{H} das mittlere Krümmungsfeld von S in \mathbb{R}^3 ist.

Beispiele 2.84

1. Sei S eine affine Ebene. Dann verschwindet die zweite Fundamentalform auf S , insbesondere ist S Minimalfläche.
2. Sei S die Kettenfläche (oder noch das Katenoid genannt), die definiert ist durch

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} \cosh(y_1) \cos(y_2) \\ \cosh(y_1) \sin(y_2) \\ y_1 \end{pmatrix}, (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Die Abbildung $F : \mathbb{R} \times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(y) := \begin{pmatrix} \cosh(y_1) \cos(y_2) \\ \cosh(y_1) \sin(y_2) \\ y_1 \end{pmatrix}$, ist lokale Parametrisierung von S (*Übungsaufgabe*); durch das Ersetzen von $]0, 2\pi[$ durch $] - \pi, \pi[$ bekommt man eine weitere lokale Parametrisierung von S und S kann insgesamt durch diese zwei lokalen Parametrisierungen beschrieben werden.

Es gilt, für alle $y \in \mathbb{R} \times]0, 2\pi[$: $\frac{\partial F}{\partial x_1}(y) = \begin{pmatrix} \sinh(y_1) \cos(y_2) \\ \sinh(y_1) \sin(y_2) \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\frac{\partial F}{\partial x_2}(y) = \begin{pmatrix} -\cosh(y_1) \sin(y_2) \\ \cosh(y_1) \cos(y_2) \\ 0 \end{pmatrix}$ und somit

$$N \circ F(y) := \frac{1}{\cosh(y_1)} \begin{pmatrix} -\cos(y_2) \\ -\sin(y_2) \\ \sinh(y_1) \end{pmatrix}$$

definiert ein C^∞ Einheitsnormalenfeld auf $F(\mathbb{R} \times]0, 2\pi[)$. Die Matrizen der ersten bzw. zweiten Fundamentalform von S bezüglich (U, F) sind gegeben durch

$$(g_{ij}(y))_{1 \leq i, j \leq 2} = \cosh(y_1)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (h_{ij}(y))_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daher gilt für die Matrix von $W_{F(y)}$ in der Basis $\{\frac{\partial F}{\partial x_1}(y), \frac{\partial F}{\partial x_2}(y)\}$ von $T_{F(y)}S$:

$$\text{Mat}(W_{F(y)}) = \frac{1}{\cosh(y_1)^2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

insbesondere verschwindet die mittlere Krümmung, d.h., S ist Minimalfläche. Für Bilder von S siehe [1].

3. Sei S die *Wendelfläche* (oder noch das *Helikoid* genannt), die definiert ist durch

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} s \cos(t) \\ s \sin(t) \\ t \end{pmatrix}, (s, t) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Die Abbildung $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(s, t) := \begin{pmatrix} s \cos(t) \\ s \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$, ist globale Parametrisierung von S (*Übungsaufgabe*). Es gilt, für alle $(s, t) \in U$,

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s, t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial t}(s, t) = \begin{pmatrix} -s \sin(t) \\ s \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix},$$

somit ist die Matrix der ersten Fundamentalform von S bezüglich (U, F) gegeben durch

$$(g_{ij}(s, t))_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Ein glattes Einheitsnormalenfeld auf S in $F(s, t)$ (mit $(s, t) \in U$) ist gegeben durch

$$N(F(s, t)) = \frac{\frac{\partial F}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial F}{\partial t}(s, t)}{\|\frac{\partial F}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial F}{\partial t}(s, t)\|},$$

wobei $\frac{\partial F}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial F}{\partial t}(s, t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ s \end{pmatrix}$. Daraus folgt:

$$N(F(s, t)) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ s \end{pmatrix}.$$

Es gilt außerdem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s, t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}(s, t) &= \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(s, t) &= \begin{pmatrix} -s \cos(t) \\ -s \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

somit folgt aus Lemma 2.64, dass die Matrix der zweiten Fundamentalform von S bezüglich (U, F) und N gegeben ist durch

$$(h_{ij}(s, t))_{1 \leq i, j \leq 2} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher gilt für die Matrix von $W_{F(s,t)}$ in der Basis $\{\frac{\partial F}{\partial x_1}(s, t), \frac{\partial F}{\partial x_2}(s, t)\}$ von $T_{F(s,t)}S$:

$$\text{Mat}(W_{F(s,t)}) = -\frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s^2+1} & 0 \end{pmatrix},$$

insbesondere verschwindet die mittlere Krümmung, d.h., S ist Minimalfläche. Für Bilder von S siehe [1].

4. Sei $S := \text{Graph}(h)$, wobei $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt ist mit $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Ein glattes Einheitsnormalenfeld auf S ist gegeben durch

$$N \circ F(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\text{grad}_y h\|^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x_1}(y) \\ -\frac{\partial h}{\partial x_2}(y) \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ h(y) \end{pmatrix}$ globale Parametrisierung von S ist und

$\text{grad}_y h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1}(y) \\ \frac{\partial h}{\partial x_2}(y) \end{pmatrix}$ den Gradienten von h in y bezeichnet. Bezüglich dieses N lautet die Matrix A von $W_{F(y)}$ in der Basis $\{\frac{\partial F}{\partial x_1}(y), \frac{\partial F}{\partial x_2}(y)\}$ von $T_{F(y)}S$:

$$A_{11} = \frac{1}{(1 + \|\text{grad}_y h\|^2)^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{\partial h}{\partial x_1}(y) \frac{\partial h}{\partial x_2}(y) \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2}(y) + (1 + \frac{\partial h}{\partial x_2}(y)^2) \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(y) \right)$$

$$A_{12} = \frac{1}{(1 + \|\text{grad}_y h\|^2)^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{\partial h}{\partial x_1}(y) \frac{\partial h}{\partial x_2}(y) \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}(y) + (1 + \frac{\partial h}{\partial x_2}(y)^2) \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2}(y) \right)$$

$$A_{21} = \frac{1}{(1 + \|\text{grad}_y h\|^2)^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{\partial h}{\partial x_1}(y) \frac{\partial h}{\partial x_2}(y) \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(y) + (1 + \frac{\partial h}{\partial x_1}(y)^2) \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2}(y) \right)$$

$$A_{22} = \frac{1}{(1 + \|\text{grad}_y h\|^2)^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{\partial h}{\partial x_1}(y) \frac{\partial h}{\partial x_2}(y) \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2}(y) + (1 + \frac{\partial h}{\partial x_1}(y)^2) \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}(y) \right).$$

Die mittlere Krümmung von S bzgl. N wird also gegeben durch

$$H \circ F(y) = \frac{1}{(1 + \|\text{grad}_y h\|^2)^{\frac{3}{2}}} \left((1 + \frac{\partial h}{\partial x_1}(y)^2) \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}(y) + (1 + \frac{\partial h}{\partial x_2}(y)^2) \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(y) - 2 \frac{\partial h}{\partial x_1}(y) \frac{\partial h}{\partial x_2}(y) \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2}(y) \right).$$

Die Bedingung, für S Minimalfläche zu sein, ist äquivalent zur folgenden (nichtlinearen) partiellen Differentialgleichung auf U :

$$(1 + \frac{\partial h}{\partial x_1}(y)^2) \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}(y) + (1 + \frac{\partial h}{\partial x_2}(y)^2) \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(y) - 2 \frac{\partial h}{\partial x_1}(y) \frac{\partial h}{\partial x_2}(y) \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2}(y) = 0.$$

Z.B. liefert die Einschränkung h auf U einer affin-linearen Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Minimalfläche (der Graph von h ist dann eine offene Teilmenge einer affinen Ebene).

5. Die euklidische Sphäre ist natürlich keine Minimalfläche (denn je nach Wahl von N gilt $W_x = \pm \text{Id}_{T_x S}$ für alle $x \in S^2$, siehe Beispiel 2.73.3).

Man kann sich allerdings fragen, ob *kompakte* Minimalflächen überhaupt existieren.

Proposition 2.85 *Es existiert keine kompakte reguläre Minimalfläche in \mathbb{R}^3 .*

Beweis: Angenommen, es gäbe eine, nennen wir sie S . Dann würde einerseits nach Proposition 2.78 die Ungleichung $K \leq 0$ auf S gelten, und andererseits würde nach Satz 2.82 mindestens ein Punkt $x \in S$ existieren mit $K(x) > 0$, Widerspruch. \square

2.8 Einige weitere Klassen von Beispielen

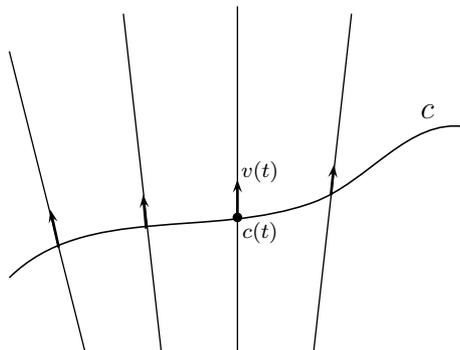
2.8.1 Regelflächen

Die Regelflächen sind im Wesentlichen die Flächen, die von Geraden erzeugt werden.

Betrachte eine regulär parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ (wobei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall ist) und eine weitere glatte Abbildung $v : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Setze

$$\begin{aligned} F : I \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ y &= (y_1, y_2) \longmapsto c(y_1) + y_2 v(y_1). \end{aligned}$$

Das Bild von F kann so beschrieben werden: in jedem Punkt $c(x_1)$ betrachte man die affine Gerade in \mathbb{R}^3 , die durch $c(x_1)$ läuft und $v(x_1)$ als Richtungsvektor besitzt. Das Bild von F ist dann die Vereinigung dieser Geraden.



Ist dies eine reguläre Fläche? Die Abbildung F ist zwar C^∞ , i.A. aber wegen $\frac{\partial F}{\partial y_1}(y) = c'(y_1) + y_2 v'(y_1)$ und $\frac{\partial F}{\partial y_2}(y) = v(y_1)$ keine Immersion. Setzt man aber zusätzlich voraus, dass in jedem $y_1 \in I$ die Vektoren $c'(y_1)$ und $v(y_1)$ *linear unabhängig* sind, so sind auch $\frac{\partial F}{\partial x_1}(y_1, 0)$ und $\frac{\partial F}{\partial x_2}(y_1, 0)$ linear unabhängig; aus Satz 2.10 folgt, dass für jedes $y_1 \in I$ offene Umgebungen I_{y_1} bzw. J_{y_1} von y_1 in I bzw. von 0 in \mathbb{R} so existieren, dass $F(I_{y_1} \times J_{y_1})$ eine reguläre Fläche und $F : I_{y_1} \times J_{y_1} \rightarrow F(I_{y_1} \times J_{y_1})$ Homöomorphismus ist.

Definition 2.86 Eine reguläre Fläche, die sich lokal beschreiben lässt durch reguläre Parametrisierungen der Form $F : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(y) = c(y_1) + y_2 v(y_1)$ wobei $c, v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^∞ sind mit $c'(y_1) \neq 0$ und $v(y_1) \neq 0$ für alle $y = (y_1, y_2) \in I \times J$, heißt Regelfläche.

Beispiele 2.87

1. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regulär parametrisierte ebene Kurve so, dass entweder $c : I \rightarrow c(I)$ Homöomorphismus oder $[c]$ einfach geschlossen ist (die Kurve darf keinen Selbst-

durchschnitt besitzen) und setze $v(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für alle $t \in I$. Setze $S := F(I \times \mathbb{R})$,

wobei $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(y) := c(y_1) + y_2 v(y_1)$. Dann ist S eine Regelfläche, die der verallgemeinerte Zylinder über c heißt. Beachte, dass F keine globale Parametrisierung von S ist falls $[c]$ einfach geschlossen ist.

2. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ wie oben und $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbb{R}^2 \times \{0\}\}$ fest. Setze $v(t) := p - c(t)$ für alle $t \in I$ und $S := F(I \times]-\infty, 1[)$, wobei $F : I \times]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(y) := c(y_1) + y_2 v(y_1) = (1 - y_2)c(y_1) + y_2 p$. Dann ist S eine Regelfläche, die der verallgemeinerte Kegel über c mit Kegelspitze p heißt.

3. Das Rotationshyperboloid (oder das einschalige Hyperboloid)

$$S := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}$$

ist eine Regelfläche. Bemerke zuerst, dass S Niveaufäche der Submersion $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi(x) := x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, ist, somit eine reguläre Fläche. Setze $c(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v(t) := \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$, dann gilt $c(t) + sv(t) \in S$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

Ferner ist jeder Punkt auf S dieser Form. Für schöne Bilder dazu, siehe [1].

4. Das hyperbolische Paraboloid (auch Sattelfläche genannt)

$$S := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1^2 - x_2^2\}$$

ist eine Regelfläche. Als Graph der Abbildung $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) := x_1^2 - x_2^2$ ist S eine reguläre Fläche. Außerdem gilt $c(t) + sv(t) \in S$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$, wobei

$c(t) := \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4t \end{pmatrix}$ und jeder Punkt auf S ist dieser Form. Für

schöne Bilder dazu, siehe [1].

5. Das Möbiusband $S := F(\mathbb{R} \times]-1, 1[)$, wobei

$$F(y) := \begin{pmatrix} \cos(y_1) + y_2 \cos(y_1) \cos(\frac{y_1}{2}) \\ \sin(y_1) + y_2 \sin(y_1) \cos(\frac{y_1}{2}) \\ y_2 \sin(\frac{y_1}{2}) \end{pmatrix}$$

für alle $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[$, ist eine Regelfläche. Zuerst ist sie eine reguläre Fläche (Übungsaufgabe), ferner gilt offenbar $F(y) = c(y_1) + y_2 v(y_1)$ mit $c(y_1) :=$

$\begin{pmatrix} \cos(y_1) \\ \sin(y_1) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v(y_1) := \begin{pmatrix} \cos(\frac{y_1}{2}) \cos(y_1) \\ \cos(\frac{y_1}{2}) \sin(y_1) \\ \sin(\frac{y_1}{2}) \end{pmatrix}$, für alle $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[$.

Proposition 2.88 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ Regelfläche. Dann gilt für die Gauss-Krümmung von S

$$K \leq 0.$$

Beweis: Wähle eine lokale Parametrisierung (U, F) von S der Form $F(y) = c(y_1) + y_2 v(y_1)$. Sei $y = (y_1, y_2) \in U$ fest. Nach Proposition 2.79 gilt $K \circ F(y) = \frac{\det((h_{ij}(y))_{i,j})}{\det((g_{ij}(y))_{i,j})}$, wobei $(g_{ij}(y))_{i,j}$ bzw. $(h_{ij}(y))_{i,j}$ für die Darstellung der ersten bzw. der zweiten Fundamentalform bzgl. (U, F) steht. Da $(g_{ij}(y))_{i,j}$ symmetrisch und positiv-definit ist, gilt $\det((g_{ij}(y))_{i,j}) > 0$. Wegen $\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(y) = 0$ gilt nach Lemma 2.64 $h_{22}(y) = 0$ und somit auch

$$\begin{aligned} \det((h_{ij}(y))_{i,j}) &= h_{11}(y) \underbrace{h_{22}(y)}_0 - h_{21}(y)h_{12}(y) \\ &\stackrel{(h_{ij}=h_{ji})}{=} -h_{12}(y)^2 \leq 0, \end{aligned}$$

woraus $K \circ F(y) \leq 0$ folgt. □

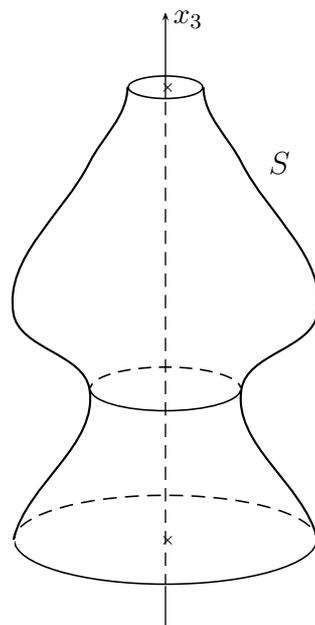
Aus Proposition 2.88 folgt, dass jede reguläre Fläche S , die mindestens einen Punkt $x \in S$ besitzt mit $K(x) > 0$, keine Regelfläche sein kann. Insbesondere ist jede *kompakte* reguläre Fläche *keine* Regelfläche (wende Satz 2.82 an).

2.8.2 Drehflächen

Definition 2.89 Eine Drehfläche ist eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ der Form $S = F(I \times \mathbb{R})$ mit

$$F(y) = \begin{pmatrix} r(y_1) \cos(y_2) \\ r(y_1) \sin(y_2) \\ y_1 \end{pmatrix},$$

wobei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall und $r : I \rightarrow]0, +\infty[$ C^∞ ist.



Eine Drehfläche, wie der Name es andeutet, entsteht durch Drehung einer Kurve um die x_3 -Achse im \mathbb{R}^3 .

Bemerkung 2.90 Eine Drehfläche ist immer eine reguläre Fläche, denn $F_0 := F|_{]0, 2\pi[}$ und $F_{-\pi} := F|_{]-\pi, \pi[}$ sind lokale Parametrisierungen von S , die S überdecken (*Übungsaufgabe*).

Proposition 2.91 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Drehfläche und $(I \times]0, 2\pi[, F)$ lokale Parametrisierung von S (Bemerkung 2.90). Dann ist für alle $y \in I \times]0, 2\pi[$ und bzgl. des Normalenfelds

$$N \circ F(y) := \frac{1}{\sqrt{1 + r'(y_1)^2}} \begin{pmatrix} -\cos(y_2) \\ -\sin(y_2) \\ r'(y_1) \end{pmatrix}$$

die Matrix von $W_{F(y)}$ in der Basis $\{\frac{\partial F}{\partial x_1}(y), \frac{\partial F}{\partial x_2}(y)\}$ gegeben durch

$$\text{Mat}(W_{F(y)}) = \frac{1}{(1 + r'(y_1)^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -r''(y_1) & 0 \\ 0 & \frac{1+r'(y_1)^2}{r(y_1)} \end{pmatrix}.$$

Beweis: Aus $\frac{\partial F}{\partial y_1}(y) = \begin{pmatrix} r'(y_1) \cos(y_2) \\ r'(y_1) \sin(y_2) \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\frac{\partial F}{\partial y_2}(y) = \begin{pmatrix} -r(y_1) \sin(y_2) \\ r(y_1) \cos(y_2) \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt die

Formel für N . Beim Ableiten von $N \circ F$ kommt

$$\frac{\partial(N \circ F)}{\partial x_1}(y) = \frac{r''(y_1)}{(1 + r'(y_1)^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial F}{\partial x_1}(y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial(N \circ F)}{\partial x_2}(y) = -\frac{1}{r(y_1)\sqrt{1 + r'(y_1)^2}} \frac{\partial F}{\partial x_2}(y)$$

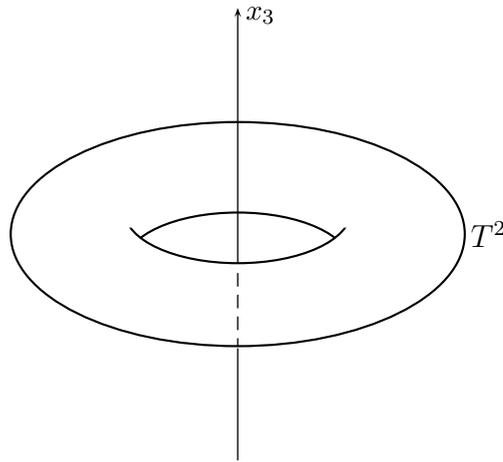
heraus, was zu beweisen war. □

Beispiele 2.92

1. Sei S die Kettenfläche, die im Beispiel 2.84.2 definiert wurde. Dann ist S nach Definition eine Drehfläche mit $r(y_1) := \cosh(y_1)$ für alle $y_1 \in \mathbb{R}$.
2. Sei S das Rotationshyperboloid (Beispiel 2.87.3). Dann ist S eine Drehfläche mit $r(y_1) := \sqrt{1 + y_1^2}$ für alle $y_1 \in \mathbb{R}$.
3. Sei $S := T^2 = F(\mathbb{R}^2)$ ein sogenannter *Drehtorus*, wobei

$$F(y) := \begin{pmatrix} \cos(y_1)(R + r \cos(y_2)) \\ \sin(y_1)(R + r \cos(y_2)) \\ r \sin(y_2) \end{pmatrix}$$

und $0 < r < R$ feste Parameter sind. Die Fläche S entsteht durch die Drehung um die x_3 -Achse des in der x_1x_3 -Ebene liegenden Kreises mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und Radius r . Dieses Beispiel passt eigentlich zur Definition 2.89 *nicht*, denn ein Kreis ist nicht der Form $\{(t, r(t)), t \in I\}$ mit C^∞ Abbildung r (die Fläche S ist eine sogenannte *Röhrenfläche*). Wir geben allerdings dieses Beispiel an, weil es ziemlich wichtig ist.



Es ist leicht, zu überprüfen, dass die Einschränkungen von F über endlich viele Produkte der Form $]\varphi_1, \varphi_1 + 2\pi[\times]\varphi_2, \varphi_2 + 2\pi[$ (mit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$) lokale Parametrisierungen von S liefern, die S ganz überdecken. Somit ist S reguläre Fläche.

Es gilt ferner:

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}(y) = (R + r \cos(y_2)) \begin{pmatrix} -\sin(y_1) \\ \cos(y_1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y_2}(y) = r \begin{pmatrix} -\cos(y_1) \sin(y_2) \\ -\sin(y_1) \sin(y_2) \\ \cos(y_2) \end{pmatrix},$$

und somit wird ein C^∞ lokales (eigentlich globales) Einheitsnormalenfeld auf S gegeben durch $N \circ F(y) = \begin{pmatrix} \cos(y_1) \cos(y_2) \\ \sin(y_1) \cos(y_2) \\ \sin(y_2) \end{pmatrix}$. Die Matrix von $W_{F(y)}$ in der Basis $\{\frac{\partial F}{\partial x_1}(y), \frac{\partial F}{\partial x_2}(y)\}$ lautet somit

$$\text{Mat}(W_{F(y)}) = \begin{pmatrix} \frac{-\cos(y_2)}{R+r \cos(y_2)} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

für alle $y \in \mathbb{R}^2$. Insbesondere bekommt man für die mittlere und die Gauss-Krümmung:

$$H \circ F(y) = -\frac{R + 2r \cos(y_2)}{2r(R + r \cos(y_2))}$$

$$K \circ F(y) = \frac{\cos(y_2)}{r(R + r \cos(y_2))}$$

für alle $y \in \mathbb{R}^2$ (*Übungsaufgabe: bestimmen Sie die Bereiche von S wo $K > 0$ bzw. $K < 0$, $K = 0$ und zeichnen Sie sie.*).

Bemerkung 2.93 Aus Proposition 2.91 folgt, dass eine Drehfläche genau dann Minimalfläche ist, wenn r folgende Differentialgleichung löst:

$$r''r = 1 + r'^2.$$

Die Abbildung $r(t) := \cosh(t)$ ist eine Lösung: die Kettenfläche ist wohl Minimalfläche. Sie ist im Wesentlichen die einzige minimale Drehfläche: für feste $r_0, r_1 \in \mathbb{R}$ mit $r_0 > 0$ ist die Lösung der obigen Differentialgleichung mit $r(0) = r_0$ und $r'(0) = r_1$ gegeben durch

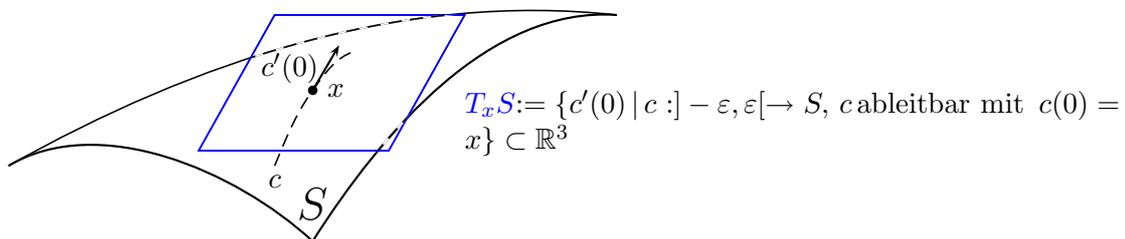
$$r(t) := a \cosh\left(\frac{t}{a} + c\right)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei $a := \frac{r_0}{\sqrt{1+r_1^2}}$ und $c := \operatorname{arsinh}(r_1)$.

Äußere Geometrie von Flächen in \mathbb{R}^3 - Zusammenfassung

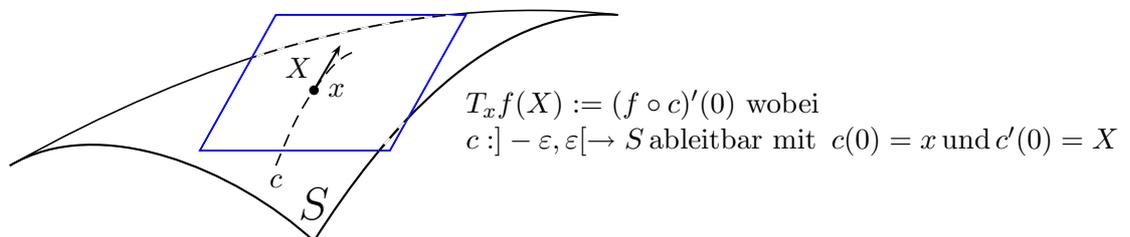
Fläche := [LOKAL] Bild von Parametrisierung (U, F) ($d_y F$ injektiv $\forall y$ und $F : U \rightarrow F(U)$ Homöomorphismus).

1. Tangentialebene



2. Abbildungen auf Flächen:

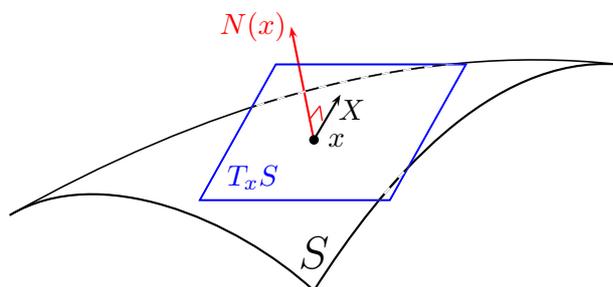
- f differenzierbar auf $S \xLeftrightarrow{\text{Def.}} f \circ F$ differenzierbar auf U
 $\forall (U, F)$.
- Tangentialabbildung von $f : S \rightarrow S'$ bzw. $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$



3. Erste Fundamentalform in $x \in S := \langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_x S \times T_x S}$

4. Zweite Fundamentalform in $x \in S$:

- Orientierbarkeit von $S \iff \exists N \in C^\infty$ Einheitsnormalenfeld auf S ($N(y) \perp T_y S$ und $\|N(y)\| = 1 \forall y \in S$)



- Weingarten-Abbildung $W_x := -T_x N \in \text{End}(T_x S)$
- Zweite Fundamentalform $II_x(\cdot, \cdot) := \langle W_x(\cdot), \cdot \rangle N(x)$

5. Krümmungen in $x \in S$:

- Hauptkrümmungen := Eigenwerte $\lambda_1(x)$ und $\lambda_2(x)$ von W_x
- Gauss-Krümmung $K(x) := \det(W_x) = \lambda_1(x)\lambda_2(x)$
- Mittlere Krümmung $H(x) := \frac{1}{2}\text{tr}(W_x) = \frac{\lambda_1(x) + \lambda_2(x)}{2}$
Mittleres Krümmungsfeld $\vec{H}(x) := H(x) \cdot N(x)$
($\vec{H} \equiv 0 \xLeftrightarrow{\text{Def.}} S$ minimal)

6. Weitere Beispiele (Regel- und Drehflächen)

Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
N. Ginoux

WS 2008/9

Geometrie (LGy)

7. Übungsblatt

24. Aufgabe

Sei die Teilmenge Z von \mathbb{R}^3 durch $Z := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ gegeben.

1. Skizzieren Sie Z .
2. Zeigen Sie, dass Z eine reguläre Fläche ist und bestimmen Sie zwei lokale Parametrisierungen, die Z vollständig beschreiben.

Lösung:

1. Z ist der Zylinder von Radius 1 um die x_3 -Achse.
2. Setze $U :=]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$, $U' :=]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\times \mathbb{R}$, $V := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \neq 1\}$ und $V' := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \neq -1\}$. Die Teilmengen U und U' sind offen und nichtleer in \mathbb{R}^2 , und die Teilmengen V und V' sind offen und nichtleer in \mathbb{R}^3 . Definiere

$$F : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(x_1) \\ \sin(x_1) \\ x_2 \end{pmatrix}$$

und

$$G : U' \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(x_1) \\ \sin(x_1) \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen, dass (U, F, V) und (U', G, V') Parametrisierungen sind, die Z vollständig beschreiben.

- Sei $x \in Z$ fest. Dann gilt $x_1 \neq 1$ oder $x_2 \neq -1$ (sonst $x_1^2 + x_2^2 = 2$, Widerspruch), d.h. $x \in V$ oder $x \in V'$. Somit gilt $Z \subset V \cup V'$.
- Die Abbildungen F und G sind offenbar C^∞ und es gilt, für alle $y \in U$ und $X \in \mathbb{R}^2$:

$$d_y F(X) = X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1}(y) + X_2 \frac{\partial F}{\partial x_2}(y)$$

$$= \begin{pmatrix} -X_1 \sin(y_1) \\ X_1 \cos(y_1) \\ X_2 \end{pmatrix},$$

so dass die Gleichung $d_y F(X) = 0$, dazu äquivalent ist, dass $X_2 = 0$ (dritte Koordinate) und $X_1 \sin(y_1) = X_1 \cos(y_1) = 0$; diese letzten Gleichungen sind zu $X_1 = 0$ äquivalent (denn $(\sin(y_1), \cos(y_1)) \neq (0, 0)$ für alle $y_1 \in \mathbb{R}$). Daraus folgt, dass $d_y F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ injektiv ist für alle $y \in U$. Analog ist $d_y G$ injektiv für alle $y \in U'$ (der Ausdruck von G ist gleich dem von F).

- Für alle $x_1 \in]0, 2\pi[$ gilt $\cos(x_1) < 1$, insbesondere $F(U) \subset V$. Analog gilt $\sin(x_2) > -1$ für alle $x_2 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, somit $G(U') \subset V'$. Außerdem gelten wegen $\cos^2 + \sin^2 = 1$ die Inklusionen $F(U) \subset Z$ und $G(U') \subset Z$. Betrachte nun die Abbildungen

$$H : V \cap Z \longrightarrow U \\ x \longmapsto \begin{pmatrix} \arg(x_1 + ix_2) \\ x_3 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$L : V' \cap Z \longrightarrow U' \\ x \longmapsto \begin{pmatrix} \arg(-x_2 + ix_1) - \frac{\pi}{2} \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Sie sind offenbar stetig mit $H \circ F = \text{id}_U$ und $F \circ H = \text{id}_{Z \cap V}$ (bzw. $L \circ G = \text{id}_{U'}$ und $G \circ L = \text{id}_{Z \cap V'}$). Somit sind $F : U \rightarrow Z \cap V$ und $G : U' \rightarrow Z \cap V'$ Homöomorphismen. QED

25. Aufgabe

Sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) := (x_1 + x_2 + x_3 - 1)^2$ gegeben.

1. Bestimmen Sie die regulären Punkte und die regulären Werte von f .
2. Bestimmen Sie die Werte w von f , für die die Niveaumenge $f^{-1}(\{w\})$ eine reguläre Fläche ist.

Lösung:

1. Die Abbildung f ist offenbar C^∞ und es gilt, für alle $x \in \mathbb{R}^3$ und $X \in \mathbb{R}^3$:

$$d_x f(X) = 2(x_1 + x_2 + x_3 - 1)(X_1 + X_2 + X_3).$$

Nach Definition ist x genau dann singulärer Punkt von f , wenn $d_x f = 0$ gilt, d.h. wenn $x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$ (denn die Linearform $X \mapsto X_1 + X_2 + X_3$ ist nicht die Nullabbildung). Daraus folgt, dass die Menge der regulären Punkte von f die Teilmenge $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 - 1 \neq 0\}$ ist. Der einzige singuläre Wert von f ist dann 0 (es gilt $x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$ genau dann, wenn $f(x) = 0$ gilt). Da offenbar $f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ gilt, ist dann die Menge der regulären Werte von f gleich $]0, +\infty[$.

2. Ist w ein regulärer Wert von f , so ist nach einem Korollar aus der Vorlesung die Niveaumenge $f^{-1}(\{w\})$ eine reguläre Fläche in \mathbb{R}^3 . Für $w = 0$ gilt aber $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0\}$, insbesondere ist $f^{-1}(\{0\})$ eine affine Ebene; da eine affine Ebene eine reguläre Fläche ist (Beispiel aus der Vorlesung), ist dann $f^{-1}(\{w\})$ reguläre Fläche für alle Werte w von f , also für alle $w \in [0, +\infty[$.

26. Aufgabe

Für feste gegebene $a, b, c > 0$ sei die Teilmenge S von \mathbb{R}^3 durch $S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1\}$ definiert.

1. Skizzieren Sie S .
2. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$F :]0, \pi[\times]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} a \sin(x_1) \cos(x_2) \\ b \sin(x_1) \sin(x_2) \\ c \cos(x_1) \end{pmatrix}$$

eine Immersion ist, und dass F ein Homöomorphismus auf sein Bild ist.
(Hinweis: die Abbildung $\arg : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R}, z \geq 0\} \longrightarrow]0, 2\pi[, z \mapsto \arg(z)$ ist stetig).

Lösung:

1. S ist das Ellipsoid, dessen Durchschnitt mit der x_1x_2 -Ebene die Ellipse mit Mittelpunkt 0 und Achsenlängen a und b ist, dessen Durchschnitt mit der x_1x_3 -Ebene die Ellipse mit Mittelpunkt 0 und Achsenlängen a und c ist und dessen Durchschnitt mit der x_2x_3 -Ebene die Ellipse mit Mittelpunkt 0 und Achsenlängen b und c ist.
2. Die Abbildung F ist offenbar C^∞ und es gilt, für alle $y \in]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ und $X \in \mathbb{R}^2$,

$$d_y F(X) = X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1}(y) + X_2 \frac{\partial F}{\partial x_2}(y)$$

$$= \begin{pmatrix} a(X_1 \cos(y_1) \cos(y_2) - X_2 \sin(y_1) \sin(y_2)) \\ b(X_1 \cos(y_1) \sin(y_2) + X_2 \sin(y_1) \cos(y_2)) \\ -cX_1 \sin(y_1) \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass $d_y F(X) = 0$ genau dann gilt, wenn $X_1 = 0$ (dritte Koordinate und wegen $\sin(y_1) > 0$ für alle $y_1 \in]0, \pi[$) und $X_2 = 0$ (denn $(\cos(y_2), \sin(y_2)) \neq (0, 0)$ für alle y_2), d.h. wenn $X = 0$ gilt. Somit ist F eine Immersion, insbesondere ist stetig. Setze nun $U :=]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ und $V := \mathbb{R}^3 \setminus \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0 \text{ und } x_1 \geq 0\}$. Sei ferner die Abbildung G definiert durch

$$G : V \cap S \longrightarrow U$$

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} \arccos(\frac{x_3}{c}) \\ \arg(\frac{x_1}{a} + i\frac{x_2}{b}) \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung G ist offenbar stetig und es gelten $F(U) \subset S \cap V$, $G \circ F = \text{id}_U$ sowie $F \circ G|_{S \cap V} = \text{id}_{S \cap V}$ (nachrechnen). Somit gilt $F(U) = S \cap V$ mit $S \cap V$ offen in S und $F : U \longrightarrow S \cap V$ ist ein Homöomorphismus.

Bemerkung: Mit ein wenig mehr Arbeit kann man zeigen, dass S eine reguläre Fläche ist. Wir haben bereits eine lokale Parametrisierung von S gefunden: (U, F, V) . Nicht aber alle Punkte von S liegen in V : die Halbellipse $S \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0 \text{ und } x_1 \geq 0\}$ ist nicht in V enthalten. Um S vollständig zu beschreiben, brauchen wir nur, eine analoge

Parametrisierung zu definieren, in dem statt der oben definierten Halbellipse die Halbellipse $S \cap (\mathbb{R}^3 \setminus \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0 \text{ und } x_1 \leq 0\})$ abgezogen wird. Dazu definieren wir die Abbildung

$$H : U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x \longmapsto \begin{pmatrix} -a \cos(x_2) \sin(x_1) \\ b \cos(x_1) \\ -c \cos(x_2) \sin(x_1) \end{pmatrix}.$$

Analog wie für F zeigt man, dass $H : U \longrightarrow S \cap V'$ ein Homöomorphismus ist wobei $V' := \mathbb{R}^3 \setminus \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0 \text{ und } x_1 \leq 0\}$ und dass H eine Immersion ist. Es gilt außerdem $S \subset V \cup V'$ (Bild malen!), somit ist S reguläre Fläche, die von (U, F, V) und (U, H, V') vollständig beschrieben wird.

27. Aufgabe

Für feste gegebene $r, R > 0$ mit $r < R$ sei die Teilmenge T von \mathbb{R}^3 durch $T := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R)^2 + x_3^2 = r^2\}$ definiert.

1. Skizzieren sie T .
2. Zeigen Sie, dass T eine reguläre Fläche ist.
3. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$F :]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x \longmapsto \begin{pmatrix} (R + r \cos(x_1)) \cos(x_2) \\ (R + r \cos(x_1)) \sin(x_2) \\ r \sin(x_1) \end{pmatrix}$$

eine lokale Parametrisierung von T liefert.

Lösung:

1. T ist ein sogenannter *Drehtorus*: T entsteht durch Drehung um die x_3 -Achse des in der x_1x_3 -Ebene liegenden Kreises von Radius r und Mittelpunkt $\begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Der Mittelpunkt des gedrehten Kreises hat insbesondere stets Abstand R zum Ursprung $0 \in \mathbb{R}^3$.
2. Wir zeigen, dass r^2 ein regulärer Wert der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R)^2 + x_3^2$ ist. Daraus wird folgen, dass $T = f^{-1}(\{r^2\})$ eine reguläre Fläche ist (Korollar aus der Vorlesung). Die Funktion f ist C^∞ auf $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}e_3$ und es gilt, für alle $x \in \Omega$ und $X \in \mathbb{R}^3$:

$$d_x f(X) = 2(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R) \frac{x_1 X_1 + x_2 X_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + 2x_3 X_3.$$

Somit gilt $d_x f = 0$ genau dann, wenn $\frac{x_1(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{x_2(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = x_3 = 0$, was noch zu $x_1^2 + x_2^2 = R^2$ und $x_3 = 0$ äquivalent ist. Die Menge der kritischen Punkte von f ist also der Kreis von Mittelpunkt 0 und Radius R in der x_1x_2 -Ebene, und der einzige kritische Wert von f ist 0 . Somit ist r^2 ein regulärer Wert von f .

3. Sei $U :=]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$. Zuerst beweisen wir, dass $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Immersion ist. Die Abbildung F ist offenbar C^∞ mit

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(y) = \begin{pmatrix} -r \sin(x_1) \cos(x_2) \\ -r \sin(x_1) \sin(x_2) \\ r \cos(x_1) \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(y) = \begin{pmatrix} -(R + r \cos(x_1)) \sin(x_2) \\ (R + r \cos(x_1)) \cos(x_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $y \in U$. Diese Vektoren sind linear unabhängig für alle $y \in U$: gilt $\alpha_1 \frac{\partial F}{\partial x_1}(y) + \alpha_2 \frac{\partial F}{\partial x_2}(y) = 0$, so gilt $\alpha_2 = 0$ (denn $R + r \cos(x_1) > 0$ für alle x_1), woraus $\alpha_1 = 0$ folgt. Somit ist F eine Immersion.

Zweitens zeigen wir, dass F ein Homöomorphismus auf sein Bild ist. Durch Einsetzen bekommen wir die Inklusion $F(U) \subset T$. Sei nun $V := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \neq 0 \text{ und } (x_1 < 0 \text{ oder } x_2 \neq 0)\}$ und G die durch

$$G : V \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \longmapsto \begin{pmatrix} \arg(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R + ix_3) \\ \arg(x_1 + ix_2) \end{pmatrix}$$

definierte Abbildung. Dann ist V eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^3 mit $F(U) \subset V$, die Abbildung G ist stetig mit $G(V) \subset U$. Ferner gilt $G \circ F = \text{id}_U$ sowie $F \circ G|_{T \cap V} = \text{id}_{T \cap V}$. Daraus folgt, dass $F : U \longrightarrow T \cap V$ ein Homöomorphismus ist und dass (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von T ist.

Geometrie (LGy)

8. Übungsblatt

28. Aufgabe

1. Seien $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein unendlich oft differenzierbarer Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass $\Phi(S)$ eine reguläre Fläche ist.
2. Leiten Sie daraus her, dass für alle $a, b, c > 0$ die Teilmenge

$$S := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \right\}$$

von \mathbb{R}^3 eine reguläre Fläche ist.

Lösung:

1. Sei $x \in \Phi(S)$ und $y := \Phi^{-1}(x) \in S$. Sei (V, φ) eine lokale Karte von S um y . Dann ist $(\Phi(V), \varphi \circ \Phi^{-1})$ eine lokale Karte von $\Phi(S)$ um x , denn: $x \in \Phi(V)$, insbesondere $\Phi(V) \cap \Phi(S) \neq \emptyset$, die Teilmenge $\Phi(V)$ ist offen in \mathbb{R}^3 ($\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist Homöomorphismus), die Abbildung $\varphi \circ \Phi^{-1} : \Phi(V) \rightarrow \varphi(V)$ ist als Verknüpfung zweier C^∞ Diffeomorphismen auch ein C^∞ Diffeomorphismus, und es gilt

$$\begin{aligned} \varphi \circ \Phi^{-1}(\Phi(V) \cap \Phi(S)) &= \varphi \circ \Phi^{-1}(\Phi(V \cap S)) \\ &= \varphi(V \cap S) \\ &= \varphi(V) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \\ &= \varphi \circ \Phi^{-1}(\Phi(V)) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}), \end{aligned}$$

QED. Alternativ kann die Aussage mit lokalen Parametrisierungen bewiesen werden: man zeige, dass $(U, \Phi \circ F, \Phi(V))$ eine lokale Parametrisierung von $\Phi(S)$ ist, wenn (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S ist.

2. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} ax_1 \\ bx_2 \\ cx_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist linear und bijektiv, insbesondere ein C^∞ Diffeomorphismus von \mathbb{R}^3 . Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \Phi(S^2) &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi^{-1}(x) \in S^2\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \right\} \\ &= S. \end{aligned}$$

Aus dem 1. Teil der Aufgabe folgt, dass S eine reguläre Fläche ist.

29. Aufgabe

Entscheiden Sie, ob die folgende Teilmenge S von \mathbb{R}^3 eine reguläre Fläche ist oder nicht und begründen Sie es kurz.

1. $S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$.
2. $S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0 \text{ und } x_1 \geq 0\}$.
3. $S := F(\mathbb{R}^2)$, wobei $F(s, t) := (s \cos(t), s \sin(t), t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.
4. $S := F(\mathbb{R}^2)$, wobei $F(s, t) := (\cosh(s) \cos(t), \cosh(s) \sin(t), \sinh(s))$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.
5. $S := F(U)$, wobei $F(s, t) := (s, t, h(s, t))$, $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ -Abbildung und $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und nichtleer.
6. (Bonus!) $S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \text{ und } x_1 \geq 0\}$.

Lösung:

1. S ist eine reguläre Fläche, denn $S = f^{-1}(\{1\})$ wobei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$; die Abbildung f ist C^∞ , hat 0 als einzigen singulären Wert und $1 = f(e_2) \in f(\mathbb{R}^3)$. Die Fläche S heißt *einschaliges Hyperboloid*.

2. Die Teilmenge S von \mathbb{R}^3 , die eine abgeschlossene Halbebene ist, ist *keine* reguläre Fläche, denn: angenommen, S wäre reguläre Fläche, so gäbe es eine lokale Karte (V, φ) um den Punkt $x := 0 \in S$. O.B.d.A. sei V ein offener Ball. Dann hätte $\varphi(V \setminus S) = \varphi(V) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})^c$ zwei Zusammenhangskomponenten, $V \setminus S$ allerdings nur eine (Bild malen), Widerspruch ($\varphi : V \rightarrow \varphi(V)$ ist ein Homöomorphismus). Allgemeiner ist jede "Fläche mit Rand" (die Definition müsste präziser gemacht werden) keine reguläre Fläche. Ein anderer Beweis war möglich, der auf folgende Behauptung beruht:

Behauptung: Eine nichtleere Teilmenge S' einer regulären Fläche S ist genau dann eine reguläre Fläche, wenn S' offen in S ist.

Beweis der Behauptung: Nichtleere offene Teilmengen regulärer Flächen sind selber reguläre Flächen, siehe Vorlesung. Ist umgekehrt S' reguläre Fläche, so gibt es um jeden Punkt $x \in S'$ eine lokale Karte (V', φ') von S' ; da S reguläre Fläche ist, existiert es eine lokale Karte (V, φ) von S um x . Die Abbildung $\varphi \circ \varphi'^{-1} : \varphi'(V \cap V' \cap S') \rightarrow \varphi(V \cap V' \cap S')$ ist C^∞ und ihre Differentialabbildung ist in jedem Punkt ein Automorphismus von \mathbb{R}^2 . Mit dem Umkehrsatz folgt, dass $\varphi(V \cap V' \cap S')$ offen in \mathbb{R}^2 ist, somit ist $V \cap V' \cap S'$ offen in S . Da $V \cap V' \cap S'$ eine Umgebung von x in S' ist, folgt insgesamt, dass S' offen in S ist. ✓

3. S ist eine reguläre Fläche, denn F ist C^∞ , ist eine Immersion auf \mathbb{R}^2 , und $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow F(\mathbb{R}^2)$ ist ein Homöomorphismus (Umkehrabbildung gegeben durch $(x_1, x_2, x_3) \in S \mapsto (e^{-ix_3}(x_1 + ix_2), x_3)$). Die Fläche S heißt *Wendelfläche*.
4. S ist eine reguläre Fläche, denn F ist C^∞ , ist eine Immersion auf \mathbb{R}^2 , $F|_{\mathbb{R} \times]0, 2\pi[} : \mathbb{R} \times]0, 2\pi[\rightarrow F(\mathbb{R} \times]0, 2\pi[) = S \setminus \{(\cosh(s), 0, \sinh(s) \mid s \in \mathbb{R} \}$ ist ein Homöomorphismus (Umkehrabbildung gegeben durch $(x_1, x_2, x_3) \in F(\mathbb{R} \times]0, 2\pi[) \mapsto (\operatorname{arsinh}(x_3), \arg(x_1 + ix_2)) \in \mathbb{R} \times]0, 2\pi[)$ und die Abbildung $G := F|_{\mathbb{R} \times]-\pi, \pi[} : \mathbb{R} \times]-\pi, \pi[\rightarrow S$ liefert auf analoge Weise eine zweite lokale Parametrisierung von S so, dass S vollständig durch

$F_{]0, 2\pi[}$ und G beschrieben wird (Bild malen). Die Fläche S ist ein einschaliges Hyperboloid, denn $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}$ (nachweisen).

- S ist als Bild einer globalen regulären Parametrisierung eine reguläre Fläche, denn F ist eine C^∞ Immersion und ein Homöomorphismus auf sein Bild (Umkehrabbildung ist gegeben durch $x \in F(U) \mapsto (x_1, x_2)$).
- Die Teilmenge S von \mathbb{R}^3 , die ein abgeschlossener Kegel ist, ist *keine* reguläre Fläche, denn: angenommen, S wäre reguläre Fläche, so gäbe es eine lokale Karte (V, φ) um den Punkt $x := 0 \in S$. Sei $x_0 := \varphi(x) \in \varphi(V)$ und betrachte eine beliebige regulär parametrisierte Kurve $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \varphi(V) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$ mit $\gamma(0) = x_0$ (eine solche Kurve existiert, wähle z.B. ein Geradensegment durch x_0 und parametrisiere es eventuell um). Setze $c := \varphi^{-1} \circ \gamma :]-1, 1[\rightarrow V \cap S$. Dann müsste $c = (c_1, c_2, c_3)$ regulär parametrisiert sein mit $c(0) = 0$. Wegen $c_1(0) = \min_{t \in]-1, 1[} (c_1(t))$ müsste aber $c_1'(0) = 0$ gelten. Andererseits liefert die Bedingung $c(t) \in S$ für alle t nach zweimaligem Ableiten

$$-c_1'(0)^2 + c_2'(0)^2 + c_3'(0)^2 = 0,$$

was $c_1'(0) = c_2'(0) = c_3'(0) = 0$ implizieren würde, Widerspruch zur Regularität von c .

Hat allgemeiner eine Fläche eine "Spitze" oder eine "Kante" (z.B. alle Polyederflächen), so ist sie keine reguläre Fläche.

30. Aufgabe

Man bezeichne mit $H^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1 \text{ und } x_1 > 0\}$ die hyperbolische Ebene. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi : H^2 \rightarrow S$ ein wohldefinierter C^∞ Diffeomorphismus ist für:

- $S := \{0\} \times \mathbb{R}^2$ und $\Phi(x) := (0, x_2, x_3)$, wobei $x = (x_1, x_2, x_3)$.
- $S := \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 = 0 \text{ und } y_2^2 + y_3^2 < 1\}$ und $\Phi(x) := \frac{1}{1+x_1}(0, x_2, x_3)$.

Lösung:

- Die Abbildung Φ , die offenbar wohldefiniert ist, ist die Einschränkung auf H^2 der C^∞ Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (0, x_2, x_3)$, somit ist nach der Vorlesung C^∞ . Die Abbildung $\Psi : \{0\} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $y \mapsto (\sqrt{1 + \|y\|^2}, y_1, y_2)$ ist auch offenbar C^∞ und erfüllt $\Psi(\{0\} \times \mathbb{R}^2) \subset H^2$ (insbesondere muss $\Psi : \{0\} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow H^2$ nach der Vorlesung C^∞ sein), $\Psi \circ \Phi = \text{id}_{H^2}$ und $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{\{0\} \times \mathbb{R}^2}$ (nachrechnen), somit ist Φ ein C^∞ Diffeomorphismus.

Geometrische Interpretation: Φ ist die Projektion auf die x_2x_3 -Ebene.

- Sei $x \in H^2$ fest. Wegen $x_1 \geq 1$ ist der Quotient $\frac{1}{1+x_1}$ wohldefiniert. Ferner gilt

$$\begin{aligned} \|\Phi(x)\|^2 < 1 &\iff x_2^2 + x_3^2 < (1 + x_1)^2 \\ &\iff x_1^2 - 1 < (1 + x_1)^2 \\ &\iff x_1 - 1 < x_1 + 1, \end{aligned}$$

was für alle $x \in H^2$ erfüllt ist, somit gilt $\Phi(H^2) \subset S$. Die Abbildung Φ ist somit wohldefiniert. Außerdem ist Φ die Einschränkung der C^∞ Abbildung $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 >$

$-1\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{1+x_1}(0, x_2, x_3)$, somit ist nach der Vorlesung C^∞ . Die Abbildung $\Psi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, $y \mapsto \frac{1}{1-\|y\|^2}(1 + \|y\|^2, 2y_2, 2y_3)$ ist auch offenbar C^∞ und erfüllt $\Psi(S) \subset H^2$ (insbesondere muss $\Psi : S \rightarrow H^2$ nach der Vorlesung C^∞ sein), $\Psi \circ \Phi = \text{id}_{H^2}$ und $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{\{0\} \times \mathbb{R}^2}$ (nachrechnen), somit ist Φ ein C^∞ Diffeomorphismus.

Geometrische Interpretation: Φ kann folgendermaßen definiert werden. Für ein $x \in H^2$ betrachte die affine Gerade, die durch x und $-e_1 = (-1, 0, 0)$ geht. Diese Gerade schneidet die Einheitscheibe $S \subset \{0\} \times \mathbb{R}^2$ in genau einem Punkt, der $\Phi(x)$ ist.

31. Aufgabe

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann C^∞ ist, wenn es für jedes $x \in S$ eine offene Umgebung V von x in \mathbb{R}^3 sowie eine C^∞ -Abbildung $\tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$\tilde{f}|_{V \cap S} = f|_{V \cap S}.$$

(Hinweis: Setzen Sie f lokal mithilfe von lokalen Karten fort.)

Lösung: Angenommen, es gibt für jedes $x \in S$ eine solche Umgebung V und eine solche Abbildung $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann ist $f|_{V \cap S}$ die Einschränkung auf der regulären Fläche $V \cap S$ der C^∞ -Abbildung \tilde{f} , insbesondere ist selber C^∞ auf $V \cap S$ (nach Vorlesung). Dies gilt um jeden Punkt von S , somit ist $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^∞ .

Sei umgekehrt $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^∞ . Für $x \in S$ fest sei (V, φ) eine lokale Karte von S um x , d.h. V ist eine offene Umgebung von x in \mathbb{R}^3 und $\varphi : V \rightarrow \varphi(V)$ ist ein C^∞ Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge $\varphi(V)$ von \mathbb{R}^3 mit $\varphi(V \cap S) = \varphi(V) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$. O.B.d.A. sei $\varphi(V) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| < r\}$ für ein $r > 0$ (sonst verschiebe oder verkleinere $\varphi(V)$). Definiere $\tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\tilde{f}(y) := f \circ \varphi^{-1}(\varphi_1(y), \varphi_2(y), 0)$$

wobei $\varphi(y) = (\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y))$ für alle $y \in V$ (man kann \tilde{f} als konstante Fortsetzung von $f|_{V \cap S}$ "in der x_3 -Richtung" auffassen). Die Abbildung \tilde{f} ist wohldefiniert wegen $(z_1, z_2, 0) \in \varphi(V)$ für alle $z = (z_1, z_2, z_3) \in \varphi(V)$, sie ist offenbar C^∞ und für alle $y \in V \cap S = \varphi^{-1}(\varphi(V) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}))$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y) &= f \circ \varphi^{-1}(\varphi_1(y), \varphi_2(y), 0) \\ &= f \circ \varphi^{-1}(\varphi(y)) \\ &= f(y), \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
N. Ginoux

WS 2008/9

Geometrie (LGy)

9. Übungsblatt

32. Aufgabe

Für eine gegebene nichtleere offene Teilmenge U von \mathbb{R}^2 und eine gegebene C^∞ Abbildung $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ sei S die durch $S := \text{Graph}(h)$ definierte reguläre Fläche.

1. Zeigen Sie, dass S diffeomorph zu $U \times \{0\}$ ist.

2. Zeigen Sie, dass die Tangentialebene an S in einem Punkt $p = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ h(y_1, y_2) \end{pmatrix}$ gegeben ist durch

$$T_p S = \left\{ V \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{\partial h}{\partial x_1}(y_1, y_2) \cdot V_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2}(y_1, y_2) \cdot V_2 - V_3 = 0 \right\}$$

und bestimmen Sie eine Basis von $T_p S$.

3. Zeigen Sie, dass $T_p S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ genau dann gilt, wenn (y_1, y_2) ein kritischer Punkt von h ist.

Lösung:

1. Es wurde bereits in der Vorlesung bewiesen, dass S eine globale Parametrisierung

besitzt: definiert man $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch $F(y_1, y_2) := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ h(y_1, y_2) \end{pmatrix}$ für alle

$y = (y_1, y_2) \in U$, so ist $(U, F, U \times \mathbb{R})$ eine globale Parametrisierung von S . Nach der Vorlesung ist jede (lokale oder globale) Parametrisierung stets ein C^∞ Diffeomorphismus auf sein Bild. Daraus folgt, dass $F : U \rightarrow S = F(U)$ ein C^∞ Diffeomorphismus ist. Da U und $U \times \{0\}$ offenbar diffeomorph sind (siehe Bemerkung in der Vorlesung), müssen dann S und $U \times \{0\}$ diffeomorph sein.

2. Nach der Vorlesung bilden von die Vektoren $\frac{\partial F}{\partial x_1}(y)$ und $\frac{\partial F}{\partial x_2}(y)$ eine Basis von $T_p S$ (denn $(U, F, U \times \mathbb{R})$ ist globale Parametrisierung von S). Wegen

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x_1}(y) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial h}{\partial x_2}(y) \end{pmatrix}$$

wird eine Basis von $T_p S$ durch $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x_1}(y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial h}{\partial x_2}(y) \end{pmatrix} \right\}$ gegeben. Desweiteren

liegt ein Vektor $V \in \mathbb{R}^3$ genau dann in $T_p S$, wenn V eine lineare Kombination dieser beiden Basisvektoren ist, was unmittelbar zur gesuchten Gleichung führt (Linearealgebra 1).

3. Nach der 2. Frage und $\mathbb{R}^2 \times \{0\} = \{V \in \mathbb{R}^3 \mid V_3 = 0\}$ gilt $T_p S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ genau dann, wenn

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(y_1, y_2) = \frac{\partial h}{\partial x_2}(y_1, y_2) = 0,$$

d.h. wenn $d_y h = 0$, d.h. wenn y ein kritischer Punkt von h ist. Tatsächlich ist die Tangentialebene an $\text{Graph}(h)$ waagrecht, falls z.B. h ein Minimum oder ein Maximum in y erreicht, vgl. 35. Aufgabe.

33. Aufgabe

Sei S durch $S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0\}$ definiert.

1. Zeigen Sie, dass S eine reguläre Fläche ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis der Tangentialebene an S in einem Punkt $p \in S$.

Lösung:

1. Es gilt $S = \text{Graph}(h)$ wobei $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert ist durch $h(y) := y_1^2 + y_2^2$. Nach der Vorlesung ist der Graph einer beliebigen (auf einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^2 definierten) C^∞ reellwertigen Funktion stets eine reguläre Fläche. Alternativ kann man zeigen, dass 0 ein regulärer Wert der Abbildung $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi(x) := x_1^2 + x_2^2 - x_3$, ist. Die Fläche S kann auch mit lokalen Parametrisierungen beschrieben werden (in der Übung).
2. Aus der 32. Aufgabe folgt, dass eine Basis von $T_p S$ gegeben ist durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y_2 \end{pmatrix} \right\},$$

wobei $p = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix}$. Die Fläche S heißt *Paraboloid*.

34. Aufgabe

Für eine gegebene reguläre Fläche S und einen festen gegebenen Punkt $p_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ sei $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ die durch $f(p) := \|p - p_0\|$ definierte Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass f C^∞ auf S ist.
2. Zeigen Sie, dass die Tangentialabbildung von f in einem Punkt $p \in S$ gegeben ist durch

$$T_p f(X) = \left\langle \frac{p - p_0}{\|p - p_0\|}, X \right\rangle$$

für alle $X \in T_p S$. Wie ist die Bedingung $T_p f = 0$ geometrisch zu interpretieren?

Lösung: Bemerke zuerst, dass $f(p)$ der euklidische Abstand zwischen p und p_0 ist.

1. Die Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \setminus \{p_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) := \|x - p_0\|$, ist C^∞ (denn die euklidische Norm ist eine C^∞ Abbildung $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ und $p_0 \notin S$). Wegen $f = \tilde{f}|_S$ muss dann f auch C^∞ sein.
2. Nach der Vorlesung gilt dann, für alle $p \in S$ und alle $X \in T_p S$,

$$T_p f(X) = d_p \tilde{f}(X).$$

Schreibt man $\tilde{f} = \sqrt{\hat{f}}$ mit $\hat{f}(x) := \|x - p_0\|^2$, so gilt nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} d_p \tilde{f}(X) &= \frac{1}{2\sqrt{\hat{f}(p)}} \cdot d_p \hat{f}(X) \\ &= \frac{2\langle p - p_0, X \rangle}{2\sqrt{\hat{f}(p)}} \\ &= \left\langle \frac{p - p_0}{\|p - p_0\|}, X \right\rangle, \end{aligned}$$

was die Gleichung beweist.

Es gilt $T_p f = 0$ genau dann, wenn für alle $X \in T_p S$ die Gleichung $\langle p - p_0, X \rangle = 0$ erfüllt ist, d.h. wenn der Vektor $p - p_0$ (der nach Voraussetzung wohl nicht verschwindet) senkrecht auf $T_p S$ steht. Ist z.B. p ein Punkt maximalen oder minimalen Abstands zu p_0 , so trifft die Verbindungsgerade zwischen p und p_0 die Fläche S senkrecht. Beachte, dass dies nicht der Fall sein muss!

35. Aufgabe

Für eine gegebene reguläre Fläche S sei $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass falls f in einem Punkt $p \in S$ ein Maximum oder ein Minimum erreicht, so gilt $T_p f = 0$.
2. Zeigen Sie, dass die Tangentialabbildung von f in mindestens zwei Punkten von S verschwindet, falls S kompakt ist.

Lösung:

1. Angenommen, es gelte $f(p) = \underset{x \in S}{\text{Min}} (f(x))$. Sei $X \in T_p S$. Nach Definition von $T_p S$ existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine differenzierbare Kurve $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = X$. Die Abbildung $f \circ c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ ist dann als Verknüpfung differenzierbarer Abbildungen selber differenzierbar und erfüllt

$$f(p) = (f \circ c)(0) = \underset{t \in]-\varepsilon, \varepsilon[}{\text{Min}} ((f \circ c)(t)).$$

Nach Analysis 1 folgt dann $(f \circ c)'(0) = 0$, was mit der Kettenregel zu $T_{c(0)} f(c'(0)) = 0$ äquivalent ist, was wiederum zu $T_p f(X) = 0$ äquivalent ist. Dies beweist die Gleichheit $T_p f = 0$. Hat f ein Maximum in p , so hat $-f$ ein Minimum in p ; aus dem 1. Fall folgt, dass $T_p(-f) = 0$, d.h. $T_p f = 0$.

2. Jede differenzierbare Funktion auf einer regulären Fläche ist stetig (Vorlesung), somit ist f stetig auf S . Ist aber S zusätzlich *kompakt*, so besitzt jede *stetige* reellwertige Funktion (mindestens) ein Minimum und ein Maximum. Entweder sind das Minimum und das Maximum von f gleich, ggf. ist die Funktion f konstant, oder nicht gleich, ggf. werden sie in zwei verschiedenen Punkten angenommen. In beiden Fällen gibt es mindestens zwei verschiedene Punkte p_m und p_M aus S mit $f(p_m) = \underset{x \in S}{\text{Min}} (f(x))$ bzw. $f(p_M) = \underset{x \in S}{\text{Max}} (f(x))$. Aus der 1. Frage folgt dann $T_{p_m} f = 0$ sowie $T_{p_M} f = 0$, QED.

Bemerkungen:

1. Somit wird ein klassisches Ergebnis aus der Analysis auf regulären Flächen übertragen.
2. Die Aussage in 1. gilt unter der schwächeren Voraussetzung, dass f ein *lokales* Minimum oder Maximum in p erreicht.

Geometrie (LGy)

10. Übungsblatt

36. Aufgabe

Für einen regulären Wert d einer C^∞ Abbildung $\pi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ (wobei Ω nichtleere offene Teilmenge von \mathbb{R}^3 ist) sei S die durch $S := \pi^{-1}(\{d\})$ definierte reguläre Fläche.

1. Zeigen Sie, dass ein Einheitsnormalenfeld auf S in $x \in S$ gegeben ist durch $N(x) = \frac{\text{grad}_x(\pi)}{\|\text{grad}_x(\pi)\|}$, wobei $\text{grad}_x(\pi) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \pi}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial \pi}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial \pi}{\partial x_3}(x) \end{pmatrix}$ das Gradientenfeld von π an der Stelle x bezeichnet.
2. Leiten Sie daraus her, dass S orientierbar ist.

Lösung:

1. Bemerke erstens, dass für alle $X \in T_x S$ gilt

$$d_x \pi(X) = \sum_{j=1}^3 X_j \frac{\partial \pi}{\partial x_j}(x) = \langle \text{grad}_x(\pi), X \rangle,$$

insbesondere gilt wegen $d_x \pi \neq 0$ auch $\text{grad}_x(\pi) \neq 0$ für alle $x \in S$ und daher ist $N(x)$ wohldefiniert. Aus einer Proposition aus der Vorlesung folgt $T_x S = \text{Ker}(d_x \pi)$. Nach der Bemerkung oben gilt dann $T_x S = \text{grad}_x(\pi)^\perp$, somit ist $N(x) \in T_x S^\perp$ Normalenfeld auf S . Da $N(x)$ per Definition Norm 1 hat, ist $N(x)$ ein Einheitsnormalenfeld auf S in $x \in S$.

2. Die Abbildung $\text{grad}(\pi) : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \text{grad}_x(\pi)$, ist C^∞ (denn die Koordinatenfunktionen von $\text{grad}(\pi)$ sind Einschränkungen der partiellen Ableitungen von π , die selber C^∞ sind) und verschwindet nirgends, somit ist $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ auch C^∞ . Somit existiert es ein stetiges Einheitsnormalenfeld auf S ; per Definition ist dann S orientierbar.

Bemerkung: Aus dieser Aufgabe können wir folgern, dass nichtorientierbare reguläre Flächen *nie* Urbilder regulärer Werte glatter reeller (und auf offenen Teilmengen von \mathbb{R}^3 definierter) Funktionen sind.

37. Aufgabe

Für eine nichtleere offene Teilmenge U von \mathbb{R}^2 und eine C^∞ Abbildung $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sei die durch $S := \text{Graph}(h)$ definierte reguläre Fläche. Setze $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $F(y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ h(y) \end{pmatrix}$.

1. Berechnen Sie eine darstellende Matrix der ersten Fundamentalform von S bezüglich der Parametrisierung (U, F) .
2. Berechnen Sie ein C^∞ Einheitsnormalenfeld N auf S .
3. Berechnen Sie eine darstellende Matrix der zweiten Fundamentalform von S bezüglich der Parametrisierung (U, F) und N .

Lösung:

1. Es gilt, für alle $y \in U$,

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x_1}(y) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial h}{\partial x_2}(y) \end{pmatrix},$$

somit gelten

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}(y), \frac{\partial F}{\partial x_1}(y) \right\rangle &= 1 + \frac{\partial h}{\partial x_1}(y)^2 \\ \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}(y), \frac{\partial F}{\partial x_2}(y) \right\rangle &= \frac{\partial h}{\partial x_1}(y) \frac{\partial h}{\partial x_2}(y) \\ \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_2}(y), \frac{\partial F}{\partial x_2}(y) \right\rangle &= 1 + \frac{\partial h}{\partial x_2}(y)^2. \end{aligned}$$

Die Matrix der ersten Fundamentalform von S bezüglich (U, F) ist dann gegeben durch

$$(g_{ij}(y))_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial h}{\partial x_1}(y)^2 & \frac{\partial h}{\partial x_1}(y) \frac{\partial h}{\partial x_2}(y) \\ \frac{\partial h}{\partial x_1}(y) \frac{\partial h}{\partial x_2}(y) & 1 + \frac{\partial h}{\partial x_2}(y)^2 \end{pmatrix}.$$

2. Ein glattes Einheitsnormalenfeld auf S in $F(y)$ (mit $y \in U$) ist gegeben durch

$$N(F(y)) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}(y) \times \frac{\partial F}{\partial x_2}(y)}{\left\| \frac{\partial F}{\partial x_1}(y) \times \frac{\partial F}{\partial x_2}(y) \right\|},$$

wobei $\frac{\partial F}{\partial x_1}(y) \times \frac{\partial F}{\partial x_2}(y) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x_1}(y) \\ -\frac{\partial h}{\partial x_2}(y) \\ 1 \end{pmatrix}$. Daraus folgt:

$$N(F(y)) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial h}{\partial x_1}(y)^2 + \frac{\partial h}{\partial x_2}(y)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x_1}(y) \\ -\frac{\partial h}{\partial x_2}(y) \\ 1 \end{pmatrix},$$

was noch unter der Form $N(F(y)) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\text{grad}_y(h)\|^2}} \begin{pmatrix} -\text{grad}_y(h) \\ 1 \end{pmatrix}$ geschrieben werden kann. Beachte, dass N globaldefiniert auf S ist.

3. Nach einem Lemma aus der Vorlesung gilt, für alle $1 \leq i, j \leq 2$ und $y \in U$,

$$\begin{aligned} h_{ij}(y) &\stackrel{(\text{Def.})}{=} g_{F(y)} \left(W_{F(y)} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(y), \frac{\partial F}{\partial x_j}(y) \right) \right) \\ &= \left\langle N \circ F(y), \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(y) \right\rangle. \end{aligned}$$

Es gilt aber

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(y) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(y) \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(y) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2}(y) \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(y) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}(y) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

somit ist die Matrix der zweiten Fundamentalform von S bezüglich (U, F) und N gegeben durch

$$(h_{ij}(y))_{1 \leq i, j \leq 2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\text{grad}_y(h)\|^2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(y) & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2}(y) \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2}(y) & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}(y) \end{pmatrix}.$$

38. Aufgabe

Berechnen Sie ein C^∞ Einheitsnormalenfeld N auf S sowie eine darstellende Matrix der ersten und der zweiten Fundamentalform von S bezüglich (U, F) (und N) für:

$$1. S := F(\mathbb{R}^2) \text{ und } F(s, t) := \begin{pmatrix} s \cos(t) \\ s \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \text{ für alle } s, t \in \mathbb{R}.$$

$$2. S := F(\mathbb{R}^2) \text{ und } F(s, t) := \begin{pmatrix} \cosh(s) \cos(t) \\ \cosh(s) \sin(t) \\ \sinh(s) \end{pmatrix} \text{ für alle } (s, t) \in \mathbb{R} \times]0, 2\pi[.$$

Lösung:

1. Es gilt, für alle $(s, t) \in U$,

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s, t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial F}{\partial t}(s, t) = \begin{pmatrix} -s \sin(t) \\ s \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix},$$

somit gelten

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial F}{\partial s}(s, t), \frac{\partial F}{\partial s}(s, t) \right\rangle &= 1 \\ \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}(s, t), \frac{\partial F}{\partial t}(s, t) \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}(s, t), \frac{\partial F}{\partial t}(s, t) \right\rangle &= s^2 + 1.\end{aligned}$$

Die Matrix der ersten Fundamentalform von S bezüglich (U, F) ist dann gegeben durch

$$(g_{ij}(s, t))_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Ein glattes Einheitsnormalenfeld auf S in $F(s, t)$ (mit $(s, t) \in U$) ist gegeben durch

$$N(F(s, t)) = \frac{\frac{\partial F}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial F}{\partial t}(s, t)}{\left\| \frac{\partial F}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial F}{\partial t}(s, t) \right\|},$$

wobei $\frac{\partial F}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial F}{\partial t}(s, t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ s \end{pmatrix}$. Daraus folgt:

$$N(F(s, t)) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ s \end{pmatrix}.$$

Es gilt außerdem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s, t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}(s, t) &= \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(s, t) &= \begin{pmatrix} -s \cos(t) \\ -s \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

somit folgt aus einem Lemma aus der Vorlesung, dass die Matrix der zweiten Fundamentalform von S bezüglich (U, F) und N gegeben ist durch

$$(h_{ij}(s, t))_{1 \leq i, j \leq 2} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Es gilt, für alle $(s, t) \in U$,

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s, t) = \begin{pmatrix} \sinh(s) \cos(t) \\ \sinh(s) \sin(t) \\ \cosh(s) \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial F}{\partial t}(s, t) = \begin{pmatrix} -\cosh(s) \sin(t) \\ \cosh(s) \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

somit gelten

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}(s, t), \frac{\partial F}{\partial s}(s, t) \right\rangle &= 2 \cosh(s)^2 - 1 \\ \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}(s, t), \frac{\partial F}{\partial t}(s, t) \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}(s, t), \frac{\partial F}{\partial t}(s, t) \right\rangle &= \cosh(s)^2. \end{aligned}$$

Die Matrix der ersten Fundamentalform von S bezüglich (U, F) ist dann gegeben durch

$$(g_{ij}(s, t))_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} 2 \cosh(s)^2 - 1 & 0 \\ 0 & \cosh(s)^2 \end{pmatrix}.$$

Ein glattes Einheitsnormalenfeld auf S in $F(s, t)$ (mit $(s, t) \in U$) ist gegeben durch

$$N(F(s, t)) = \frac{\frac{\partial F}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial F}{\partial t}(s, t)}{\left\| \frac{\partial F}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial F}{\partial t}(s, t) \right\|},$$

wobei $\frac{\partial F}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial F}{\partial t}(s, t) = \begin{pmatrix} -\cosh(s)^2 \cos(t) \\ -\cosh(s)^2 \sin(t) \\ \cosh(s) \sinh(s) \end{pmatrix}$. Daraus folgt:

$$N(F(s, t)) = \frac{1}{\sqrt{2 \cosh(s)^2 - 1}} \begin{pmatrix} -\cosh(s) \cos(t) \\ -\cosh(s) \sin(t) \\ \sinh(s) \end{pmatrix}.$$

Es gilt außerdem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s, t) &= \begin{pmatrix} \cosh(s) \cos(t) \\ \cosh(s) \sin(t) \\ \sinh(s) \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}(s, t) &= \begin{pmatrix} -\sinh(s) \sin(t) \\ \sinh(s) \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(s, t) &= \begin{pmatrix} -\cosh(s) \cos(t) \\ -\cosh(s) \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

somit folgt aus einem Lemma aus der Vorlesung, dass die Matrix der zweiten Fundamentalform von S bezüglich (U, F) und N gegeben ist durch

$$(h_{ij}(s, t))_{1 \leq i, j \leq 2} = \frac{1}{\sqrt{2 \cosh(s)^2 - 1}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \cosh(s)^2 \end{pmatrix}.$$

39. Aufgabe

Sei $\kappa \in \mathbb{R}$, $\kappa \neq 0$. Zeigen Sie, dass eine zusammenhängende orientierte reguläre Fläche S in einer Sphäre von Radius $\frac{1}{|\kappa|}$ enthalten ist, falls sie konstante Hauptkrümmungen gleich κ hat.

(Hinweis: zeigen Sie, dass die Abbildung $x \mapsto x + \frac{N(x)}{\kappa}$ konstant auf S ist, wobei N das C^∞ Einheitsnormalenfeld auf S ist, das die Orientierung von S liefert)

Lösung: Angenommen, S habe konstante Hauptkrümmungen gleich κ . Sei N das C^∞ Einheitsnormalenfeld auf S , welches die Orientierung von S definiert. Setze

$$\begin{aligned} f : S &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto x + \frac{N(x)}{\kappa}. \end{aligned}$$

Die Abbildungen Id_S und N sind C^∞ , somit ist f C^∞ . Die Tangentialabbildung von f ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T_x f(X) &= T_x \text{Id}_S(X) + \frac{1}{\kappa} T_x N(X) \\ &= X - \frac{1}{\kappa} W_x(X), \end{aligned}$$

für alle $x \in S$ und $X \in T_x S$, wobei W_x der Weingarten-Endormorphismus von S bezüglich N an der Stelle x ist. Nach Voraussetzung hat aber W_x nur einen Eigenwert, der gleich κ ist für alle $x \in S$. Insbesondere gilt

$$T_x f(X) = X - \frac{1}{\kappa}(\kappa X) = 0$$

für alle $X \in T_x S$ und alle $x \in S$. Daraus folgt $T_x f = 0$ für alle $x \in S$. Nach einer Proposition aus der Vorlesung (anwendbar da S zusammenhängend ist) muss dann f konstant auf S sein, d.h. es existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = x_0$ für alle $x \in S$. Dies bedeutet aber $x - x_0 = -\frac{N(x)}{\kappa}$ für alle $x \in S$. Wegen $\|N(x)\| = 1$ muss dann

$$\|x - x_0\| = \left\| -\frac{N(x)}{\kappa} \right\| = \frac{1}{|\kappa|}$$

gelten, d.h., x liegt in der Kugel von Radius $\frac{1}{|\kappa|}$ um den Punkt x_0 . QED.

Bemerkung: Hier wurde verwendet, dass $T_x(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 T_x f_1 + \alpha_2 T_x f_2$ für alle differenzierbaren Abbildungen $f_1, f_2 : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ und alle $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
N. Ginoux

WS 2008/9

Geometrie (LGy)

11. Übungsblatt

40. Aufgabe

Sei $S := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \text{ und } x_1 > 0\}$. Zeigen Sie, dass S eine orientierbare reguläre Fläche ist und bestimmen Sie deren Gauss-Krümmung und deren Krümmungslinien.

(Hinweis: Sie können die lokalen Parametrisierungen $F :]0, \infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \\ r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ und $G :]0, \infty[\times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$, $G(r, \varphi) := F(r, \varphi)$, verwenden.)

Lösung: Setze $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 > 0\}$. Es gilt $S = \pi^{-1}(\{0\})$, wobei $\pi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi(x) := -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, Submersion ist, somit ist S reguläre Fläche (nach dem nun berühmten Korollar aus der Vorlesung) und orientierbar (nach der 36. Aufgabe). Nach der 36. Aufgabe ist ein C^∞ Einheitsnormalenfeld auf S gegeben durch $N(x) = \frac{\text{grad}_x(\pi)}{\|\text{grad}_x(\pi)\|}$ für alle $x \in S$.

Wegen $\text{grad}_x(\pi) = 2 \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ gilt $N(x) = \frac{1}{\|x\|} \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit $\|x\| = x_1\sqrt{2}$ wegen $x_2^2 + x_3^2 = x_1^2$ für alle $x \in S$. Die Abbildung N ist die Einschränkung auf S der C^∞ Abbildung $\tilde{N} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|} \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, somit gilt für alle $X \in T_x S$

$$\begin{aligned} W_x(X) &\stackrel{(\text{Def.})}{=} -T_x N(X) \\ &= -d_x \tilde{N}(X) \\ &= -\left\{ -\frac{1}{\|x\|^2} \left\langle \frac{x}{\|x\|}, X \right\rangle \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{\|x\|} \begin{pmatrix} -X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \right\} \\ &= -\frac{1}{\|x\|} \left\{ \begin{pmatrix} -X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{\|x\|} \left\langle \frac{x}{\|x\|}, X \right\rangle \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Nach der 36. Aufgabe gilt $T_x S = \text{grad}_x(\pi)^\perp$, somit gilt

$$T_x S = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 = 0\}.$$

Eine Basis von $T_x S$ wird dann gegeben durch $\left\{ x, \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix} \right\}$ (nachrechnen). Es gilt

$W_x(x) = 0$ sowie $W_x\left(\begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{\|x\|} \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix}$, insbesondere sind die Hauptkrüm-

mungen von S in x gleich 0 und $-\frac{1}{\|x\|} = -\frac{1}{x_1\sqrt{2}}$ und die Hauptkrümmungsrichtungen von S in x sind $\mathbb{R}x$ und $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix}$. Daraus folgt auch, dass die Gauss-Krümmung von S identisch verschwindet. Die Krümmungslinien von S sind die waagerechten Kreise (bzw. Kreisbögen) und die von 0 ausgehenden Halbgeraden (bzw. Geradenstrecken) auf S . Alternativ kann S (das ein spitzenloser Kegel ist) als Graph der Abbildung $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(y) := \|y\|$, aufgefasst werden. Die Formeln für die Fundamentalformen können dann angewendet werden. Eine andere Möglichkeit besteht darin, S lokal mit F und G zu parametrisieren und die entsprechenden Formeln zu benutzen.

Bemerkung: Somit bekommen wir (nach Ebenen und Zylindern) ein weiteres Beispiel von Fläche verschwindender Gauss-Krümmung.

41. Aufgabe

Zeigen Sie, dass $S := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1x_2 - x_3 = 0\}$ eine orientierbare reguläre Fläche ist und berechnen Sie deren mittlere und Gauss-Krümmung nach Wahl einer Orientierung.

Lösung: Es gilt $S = \text{Graph}(h)$, wobei $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert ist durch $h(y) := y_1y_2$ für alle $y \in \mathbb{R}^2$. Die Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ h(y) \end{pmatrix}$, ist eine globale Parametrisierung von S . Wegen $\frac{\partial h}{\partial y_1}(y) = y_2$ und $\frac{\partial h}{\partial y_2}(y) = y_1$ gilt

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y_2}(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

somit gilt für die Matrix der ersten Fundamentalform von S bezüglich (\mathbb{R}^2, F)

$$(g_{ij}(y))_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} 1 + y_2^2 & y_1y_2 \\ y_1y_2 & 1 + y_1^2 \end{pmatrix},$$

deren Inverses gegeben ist durch

$$(g_{ij}(y))_{1 \leq i, j \leq 2}^{-1} = \frac{1}{1 + \|y\|^2} \begin{pmatrix} 1 + y_1^2 & -y_1y_2 \\ -y_1y_2 & 1 + y_2^2 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\|\text{grad}_y(h)\|^2 = \|y\|^2$ ist nach der 37. Aufgabe ein C^∞ Einheitsnormalenfeld auf S gegeben durch

$$N \circ F(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|y\|^2}} \begin{pmatrix} -y_2 \\ -y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für alle $y \in \mathbb{R}^2$, insbesondere S ist orientierbar. Sei von hier aus die Orientierung von S durch N festgelegt. Wegen $\frac{\partial^2 h}{\partial y_1^2}(y) = \frac{\partial^2 h}{\partial y_2^2}(y) = 0$ und $\frac{\partial^2 h}{\partial y_1 \partial y_2}(y) = 1$ gilt wiederum nach der 37. Aufgabe für die Matrix der zweiten Fundamentalform von S bezüglich (\mathbb{R}^2, F) und N

$$(h_{ij}(y))_{1 \leq i, j \leq 2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|y\|^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der Vorlesung folgt, dass die Matrix der Weingarten-Abbildung von S bezüglich (\mathbb{R}^2, F) und N gegeben ist durch

$$(g_{ij}(y))_{1 \leq i, j \leq 2}^{-1} \cdot (h_{ij}(y))_{1 \leq i, j \leq 2} = \frac{1}{(1 + \|y\|^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -y_1 y_2 & 1 + y_1^2 \\ 1 + y_2^2 & -y_1 y_2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt für die Gauss-Krümmung K und die mittlere Krümmung H von S

$$\begin{aligned} K \circ F(y) &= -\frac{1}{(1 + \|y\|^2)^2} \\ H \circ F(y) &= -\frac{y_1 y_2}{(1 + \|y\|^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Fläche S ist eine Sattelfläche (oder noch ein hyperbolisches Paraboloid). Denn: setze $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Psi(u, v, w) := (\frac{1}{\sqrt{2}}(u + v), \frac{1}{\sqrt{2}}(u - v), w)$, dann ist Ψ Isometrie von \mathbb{R}^3 mit $S = \Psi(\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 - v^2 = 2w\})$.

42. Aufgabe

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ orientierte reguläre Fläche mit mittlerer Krümmung H und Gauss-Krümmung K . Sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ euklidische Bewegung.

1. Zeigen Sie, dass $\Phi(S)$ orientierbare reguläre Fläche ist.
2. Zeigen Sie, dass nach geeigneter Wahl der Orientierung auf $\Phi(S)$ für die mittlere Krümmung \tilde{H} und die Gauss-Krümmung \tilde{K} von $\Phi(S)$ gilt:

$$\tilde{H} = H \circ \Phi^{-1} \quad \text{und} \quad \tilde{K} = K \circ \Phi^{-1}.$$

Lösung:

1. Da Φ ein C^∞ Diffeomorphismus von \mathbb{R}^3 ist, muss $\Phi(S)$ reguläre Fläche sein (siehe 28. Aufgabe). Schreibe nun $\Phi(x) = A(x) + a$ mit $A \in O_3$ und $a \in \mathbb{R}^3$. Setze $\tilde{S} := \Phi(S)$. Behauptung: Ist N stetiges Einheitsnormalenfeld auf S , so ist $A \circ N \circ \Phi^{-1}$ stetiges Einheitsnormalenfeld auf \tilde{S} .

Beweis der Behauptung: Setze $\tilde{N} := A \circ N \circ \Phi^{-1}$. Dann ist \tilde{N} stetig (wegen A und Φ stetig) und hat Norm 1 (wegen $A \in O_3$). Sei $x \in S$ fest. Da Φ ein C^∞ Diffeomorphismus ist, muss $T_x \Phi : T_x S \rightarrow T_{\Phi(x)} \tilde{S}$ linearer Isomorphismus sein. Wegen $T_x \Phi = A|_{T_x S}$ gilt dann $T_{\Phi(x)} \tilde{S} = A(T_x S)$. Da A orthogonale Abbildung ist, gilt wegen $N(x) \perp T_x S$ auch $A(N(x)) \perp A(T_x S)$. Somit ist \tilde{N} stetiges Einheitsnormalenfeld auf \tilde{S} . ✓

Da es ein stetiges Einheitsnormalenfeld auf S existiert, muss \tilde{S} orientierbar sein. Bemerke, dass \tilde{N} nach Vorlesung automatisch C^∞ auf \tilde{S} ist.

2. Sei die Orientierung von \tilde{S} durch \tilde{N} festgelegt und $x \in S$ fest. Nach Definition und Anwendung der Kettenregel ist die Weingarten-Abbildung von \tilde{S} in $\Phi(x) \in \tilde{S}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{\Phi(x)} &= -T_{\Phi(x)} \tilde{N} \\ &= -T_{\Phi(x)} (A \circ N \circ \Phi^{-1}) \\ &= -T_x (A \circ N) \circ T_{\Phi(x)} (\Phi^{-1}). \end{aligned}$$

Wir wissen schon, dass $T_{\Phi(x)}(\Phi^{-1}) = A_{|T_{\Phi(x)}S}^{-1}$ gilt. Sei nun $X \in T_x S$ und $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ ableitbare Kurve mit $c(0) = x$ und $c'(0) = X$. Dann gilt nach Definition der Tangentialabbildung und wegen der Linearität von A

$$\begin{aligned} T_x(A \circ N)(X) &= (A \circ N \circ c)'(0) \\ &= A((N \circ c)'(0)) \\ &= A(T_x N(X)) \\ &= -A(W_x(X)), \end{aligned}$$

somit gilt $\tilde{W}_{\Phi(x)} = A \circ W_x \circ A_{|T_{\Phi(x)}S}^{-1}$. Daraus folgt für die mittlere und die Gauss-Krümmung $\tilde{H}(\Phi(x)) = \frac{1}{2}\text{tr}(W_x) = H(x)$ bzw. $\tilde{K}(\Phi(x)) = \det(W_x) = K(x)$, was zu beweisen war.

43. Aufgabe

1. Zeigen Sie, dass jede zusammenhängende orientierbare reguläre Fläche mit identisch verschwindender zweiter Fundamentalform in einer affinen Ebene enthalten ist. (Hinweis: Man akzeptiere ohne Beweis, dass es zwischen je zwei Punkten von S eine regulär parametrisierte Kurve auf S gibt.)
2. Gilt die Aussage unter der schwächeren Voraussetzung, dass die Gauss-Krümmung identisch verschwindet?

Lösung:

1. Sei S reguläre Fläche mit $II = 0$ auf S . Sei N C^∞ Einheitsnormalenfeld auf S . Nach Voraussetzung gilt $T_p N = 0$ für alle $p \in S$, somit ist nach Vorlesung die Abbildung N konstant auf S . Wir bezeichnen diese Konstante weiterhin mit N . Sei $x \in S$ fest. Für $y \in S$ sei $c : [0, 1] \rightarrow S$ regulär parametrisierte Kurve mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$. Dann gilt nach der Produktregel

$$\begin{aligned} \langle N, c \rangle'(t) &= \langle N, c'(t) \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

somit ist die Abbildung $t \mapsto \langle N, c(t) \rangle$ konstant gleich $\langle N, x \rangle$ auf $[0, 1]$. Insbesondere liegt y in der affinen Ebene E , die durch x geht und N als Normalenvektor besitzt. Da dies für alle $y \in S$ gilt, muss dann $S \subset E$ gelten.

2. Die Aussage gilt natürlich nicht, falls lediglich die Gauss-Krümmung identisch verschwindet. Als Gegenbeispiele können für S der Zylinder $Z := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ oder die Fläche S aus der 40. Aufgabe angegeben werden.

Bemerkungen:

1. Die Aussage gilt allerdings ohne die Orientierbarkeitsvoraussetzung an S . Ist nämlich S zusammenhängende reguläre Fläche mit verschwindender zweiter Fundamentalform, so kann auf analoge Weise gezeigt werden, dass auf jeder zusammenhängenden

Umgebung eines vorgegebenen Punktes $x \in S$, woraus ein stetiges Einheitsnormalenfeld auf S existiert, dieses Vektorfeld konstant sein muss. Für ein $n_0 \in \mathbb{R}^3$ mit $n_0 \perp T_x S$ und $\|n_0\| = 1$ definiere man dann die Relation

$$y \sim z \quad : \iff \quad \exists \text{ zusammenhängende Umgebung } W \text{ von } y \text{ und } z \\ \text{und ein stetiges Einheitsnormalenfeld auf } W \text{ s.d. } N(y) = n_0.$$

Die obige Überlegung impliziert, dass \sim eine Äquivalenzrelation auf S ist. Da es lokal immer ein stetiges Einheitsnormalenfeld gibt (siehe z.B. Vorlesung für eine explizite Formel für ein solches Normalenfeld, die von einer lokalen Parametrisierung (U, F) von S abhängt; verkleinere evtl. U s.d. U zusammenhängend wird und setze $W := F(U)$), muss jede Äquivalenzklasse offen sein, somit auch abgeschlossen. Daraus folgt, dass die Äquivalenzklasse von x ganz S gleicht, insbesondere S ist orientierbar.

2. Ist allgemeiner jeder Punkt einer zusammenhängenden regulären Fläche S Nabelpunkt (d.h., die Fläche hat in jedem Punkt nur eine Hauptkrümmung), so ist S entweder in einer affinen Ebene oder in einer (euklidischen) Sphäre enthalten.

Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
N. Ginoux

WS 2008/9

Geometrie (LGy)

12. Übungsblatt

44. Aufgabe

Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve nirgendsverschwindender Krümmung κ und mit Frenet-Dreibein (c', n, b) . Man nehme an, dass entweder $c : I \rightarrow c(I)$ Homöomorphismus oder $[c]$ einfach geschlossen ist. Sei S definiert durch $S := F(I \times \mathbb{R})$, wobei

$$\begin{aligned} F : I \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, \theta) &\longmapsto c(t) + r(\cos(\theta)n(t) + \sin(\theta)b(t)) \end{aligned}$$

und $0 < r < \inf_I (\frac{1}{\kappa})$ eine Konstante ist. Man nehme an, dass $r > 0$ so klein gewählt werden kann, dass S eine orientierbare reguläre Fläche und $(U := I' \times]0, 2\pi[, F|_U)$ eine lokale Parametrisierung von S ist, wobei $I' = I$ im ersten Fall und $I' =]0, L[c][$ im zweiten. Die Fläche S heißt Röhrenfläche von Radius r um die Kurve c .

1. Zeigen Sie, dass die Matrix der Weingarten-Abbildung von S bezüglich $(U, F|_U)$ und eines der beiden stetigen Einheitsnormalenfelder N gegeben ist durch

$$\text{Mat}(W_{F(t,\theta)}) = \begin{pmatrix} -\frac{\kappa(t)\cos(\theta)}{1-r\kappa(t)\cos(\theta)} & 0 \\ \frac{\tau(t)}{r(1-r\kappa(t)\cos(\theta))} & \frac{1}{r} \end{pmatrix},$$

für alle $(t, \theta) \in U$, wobei τ die Windung von c bezeichnet.

2. Leiten Sie die mittlere und die Gauss-Krümmung von S bezüglich $(U, F|_U)$ (und N) her.
3. Zeigen Sie, dass S weder minimal noch positiver Gauss-Krümmung sein kann.

Lösung:

1. Wir bestimmen erstens die Matrix der ersten Fundamentalform von S bezüglich $(U, F|_U)$. Sei $(t, \theta) \in U$. Nach den Frenet-Gleichungen für c gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t, \theta) &= c'(t) + r(\cos(\theta)n'(t) + \sin(\theta)b'(t)) \\ &= c'(t) + r\cos(\theta)(-\kappa(t)c'(t) + \tau(t)b(t)) - r\sin(\theta)\tau(t)n(t) \\ &= (1 - r\kappa(t)\cos(\theta))c'(t) - r\sin(\theta)\tau(t)n(t) + r\cos(\theta)\tau(t)b(t). \end{aligned}$$

Wegen $\frac{\partial F}{\partial \theta}(t, \theta) = r(-\sin(\theta)n(t) + \cos(\theta)b(t))$ gilt

$$(g_{ij}(t, \theta))_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} (1 - r\kappa(t)\cos(\theta))^2 + r^2\tau(t)^2 & r^2\tau(t) \\ r^2\tau(t) & r^2 \end{pmatrix}.$$

Da (c', n, b) ein Frenet-Dreibein für c ist, gelten $c' \times n = b$, $n \times b = c'$ und $b \times c' = n$, somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t, \theta) \times \frac{\partial F}{\partial \theta}(t, \theta) &= -r \sin(\theta)(1 - r\kappa(t) \cos(\theta))b(t) - r \cos(\theta)(1 - r\kappa(t) \cos(\theta))n(t) \\ &\quad - r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)\tau(t)c'(t) + r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)\tau(t)c'(t) \\ &= -r(1 - r\kappa(t) \cos(\theta))(\cos(\theta)n(t) + \sin(\theta)b(t)). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt $r\kappa(t) < 1$ für alle t und somit $r\kappa(t) \cos(\theta) < 1$ für alle $(t, \theta) \in U$. Daraus folgt

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial t}(t, \theta) \times \frac{\partial F}{\partial \theta}(t, \theta) \right\| = r(1 - r\kappa(t) \cos(\theta)).$$

Ein C^∞ Einheitsnormalenfeld N auf $F(U) \subset S$ ist damit gegeben durch

$$N(F(t, \theta)) = -(\cos(\theta)n(t) + \sin(\theta)b(t)).$$

Nach nochmaliger Anwendung der Frenet-Gleichungen für c gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t, \theta) &= (1 - r\kappa(t) \cos(\theta))c''(t) - r\kappa'(t) \cos(\theta)c'(t) \\ &\quad - r \sin(\theta)\tau'(t)n(t) - r \sin(\theta)\tau(t)n'(t) \\ &\quad + r \cos(\theta)\tau'(t)b(t) + r \cos(\theta)\tau(t)b'(t) \\ &= \kappa(t)(1 - r\kappa(t) \cos(\theta))n(t) - r\kappa'(t) \cos(\theta)c'(t) \\ &\quad - r \sin(\theta)\tau(t)(-\kappa(t)c'(t) + \tau(t)b(t)) - r \cos(\theta)\tau(t)^2 n(t) \\ &\quad - r \sin(\theta)\tau'(t)n(t) + r \cos(\theta)\tau'(t)b(t) \\ &= r(\sin(\theta)\kappa(t)\tau(t) - \cos(\theta)\kappa'(t))c'(t) \\ &\quad + (\kappa(t)(1 - r\kappa(t) \cos(\theta)) - r \cos(\theta)\tau(t)^2 - r \sin(\theta)\tau'(t))n(t) \\ &\quad + r(\cos(\theta)\tau'(t) - \sin(\theta)\tau^2(t))b(t) \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \theta}(t, \theta) &= r(\kappa(t) \sin(\theta)c'(t) - \cos(\theta)\tau(t)n(t) - \sin(\theta)\tau(t)b(t)) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(t, \theta) &= -r(\cos(\theta)n(t) + \sin(\theta)b(t)). \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Matrix der zweiten Fundamentalform von S bezüglich $(U, F|_U)$ und N

$$\begin{aligned} h_{11}(t, \theta) &= -\cos(\theta)(\kappa(t)(1 - r\kappa(t) \cos(\theta)) - r \cos(\theta)\tau(t)^2 - r \sin(\theta)\tau'(t)) \\ &\quad - r \sin(\theta)(\cos(\theta)\tau'(t) - \sin(\theta)\tau(t)^2) \\ &= r\tau(t)^2 - \kappa(t) \cos(\theta)(1 - r\kappa(t) \cos(\theta)) \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} h_{12}(t, \theta) &= r\tau(t) \\ h_{22}(t, \theta) &= r \end{aligned}$$

für alle $(t, \theta) \in U$. Aus

$$(g_{ij}(t, \theta))_{i,j}^{-1} = \frac{1}{r^2(1 - r\kappa(t) \cos(\theta))^2} \begin{pmatrix} r^2 & -r^2\tau(t) \\ -r^2\tau(t) & (1 - r\kappa(t) \cos(\theta))^2 + r^2\tau(t)^2 \end{pmatrix}$$

und der Formel $\text{Mat}(W_{F(t,\theta)}) = (g_{ij}(t, \theta))_{i,j}^{-1} \cdot (h_{ij}(t, \theta))_{i,j}$ folgt die gesuchte Identität.

2. Die Matrix $\text{Mat}(W_{F(t,\theta)})$ ist eine untere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $\frac{-\kappa(t)\cos(\theta)}{1-r\kappa(t)\cos(\theta)}$ und $\frac{1}{r}$. Da diese Zahlen verschieden voneinander sind (für alle $(t, \theta) \in U$), stellen sie die Eigenwerte von $\text{Mat}(W_{F(t,\theta)})$ dar, d.h., sie sind die Hauptkrümmungen von S in $F(t, \theta)$. Daraus folgt für die mittlere Krümmung H von S

$$\begin{aligned} H \circ F(t, \theta) &= \frac{1}{2r(1 - r\kappa(t)\cos(\theta))} (1 - r\kappa(t)\cos(\theta) - r\kappa(t)\cos(\theta)) \\ &= \frac{1 - 2r\kappa(t)\cos(\theta)}{2r(1 - r\kappa(t)\cos(\theta))} \end{aligned}$$

und für die Gauss-Krümmung K von S

$$K \circ F(t, \theta) = -\frac{\kappa(t)\cos(\theta)}{r(1 - r\kappa(t)\cos(\theta))}$$

für alle $(t, \theta) \in U$.

3. Ist die Fläche S minimal, so gilt insbesondere $H \circ F = 0$ auf U , d.h. $\kappa(t)\cos(\theta) = \frac{1}{2r}$ für alle $(t, \theta) \in U$. Da die rechte Seite dieser Gleichung konstant ist, muss insbesondere die Funktion \cos konstant auf $]0, 2\pi[$ sein, Widerspruch. Daraus folgt, dass S nicht minimal sein kann. Hat S positive Gauss-Krümmung, so gilt analog $\kappa(t)\cos(\theta) < 0$ für alle $(t, \theta) \in U$, d.h. $\cos(\theta) < 0$ für alle $\theta \in]0, 2\pi[$, Widerspruch. Daraus folgt, dass S nicht überall positive Gauss-Krümmung haben kann.

45. Aufgabe

Für feste gegebene $r, R > 0$ mit $r < R$ sei die reguläre Fläche T von \mathbb{R}^3 definiert durch $T := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R)^2 + x_3^2 = r^2\}$.

1. Bestimmen Sie die Gauss-Krümmung K und das mittlere Krümmungsfeld \vec{H} von T bezüglich (U, F) für $U :=]0, 2\pi R[\times]0, 2\pi[$ und

$$\begin{aligned} F : U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ y &\longmapsto \begin{pmatrix} (R - r \cos(y_2)) \cos(\frac{y_1}{R}) \\ (R - r \cos(y_2)) \sin(\frac{y_1}{R}) \\ r \sin(y_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Hinweis: Sie können die Ergebnisse der 44. Aufgabe mit geeigneter Wahl der Kurve c verwenden.)

2. Bestimmen Sie die Bereiche von T , wo $K > 0$, $K < 0$ und $K = 0$ und zeichnen Sie sie an.

Lösung:

1. Setze, für alle $t \in \mathbb{R}$, $c(t) := \begin{pmatrix} R \cos(\frac{t}{R}) \\ R \sin(\frac{t}{R}) \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist c nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Krümmung $\kappa = \frac{1}{R}$, Normalenfeld $n(t) = -\begin{pmatrix} \cos(\frac{t}{R}) \\ \sin(\frac{t}{R}) \\ 0 \end{pmatrix}$ und

Binormalenfeld $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die lokale Parametrisierung F von T ist der Form

$$F(y) = c(y_1) + r(\cos(y_2)n(y_1) + \sin(y_2)b(y_1))$$

für alle $y \in U$: die Fläche T ist die Röhrenfläche von Radius r um die Kurve c . Nach der 44. Aufgabe ist ein C^∞ Einheitsnormalenfeld auf $F(U)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} N \circ F(y) &= -(\cos(y_2)n(y_1) + \sin(y_2)b(y_1)) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(y_2) \cos\left(\frac{y_1}{R}\right) \\ \cos(y_2) \sin\left(\frac{y_1}{R}\right) \\ -\sin(y_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und die mittlere bzw. Gauss-Krümmung von S bezüglich $(U, F|_U)$ und N sind gegeben durch

$$\begin{aligned} H \circ F(y) &= \frac{1 - 2r\kappa(y_1) \cos(y_2)}{2r(1 - r\kappa(y_1) \cos(y_2))} \\ &= \frac{R - 2r \cos(y_2)}{2r(R - r \cos(y_2))} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} K \circ F(y) &= -\frac{\kappa(y_1) \cos(y_2)}{r(1 - r\kappa(y_1) \cos(y_2))} \\ &= \frac{-\cos(y_2)}{r(R - r \cos(y_2))} \end{aligned} \tag{2.6}$$

für alle $y \in U$. Daraus folgt für das mittlere Krümmungsfeld von S bezüglich $(U, F|_U)$:

$$\begin{aligned} \vec{H} \circ F(y) &= (H \circ F(y))N \circ F(y) \\ &= \frac{R - 2r \cos(y_2)}{2r(R - r \cos(y_2))} \begin{pmatrix} \cos(y_2) \cos\left(\frac{y_1}{R}\right) \\ \cos(y_2) \sin\left(\frac{y_1}{R}\right) \\ -\sin(y_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Der Nenner in der rechten Seite von (2.6) ist stets positiv nach der Wahl von r , somit ist das Vorzeichen von $K(F(y))$ gegeben durch das von $-\cos(y_2)$, d.h., $K(F(y)) > 0$ für alle $y \in U$ mit $y_2 \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, $K(F(y)) = 0$ für $y \in U$ mit $y_2 = \frac{\pi}{2}$ oder $y_2 = \frac{3\pi}{2}$, $K(F(y)) < 0$ für $y \in U$ mit $y_2 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ oder $y_2 \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$.

Bild in der Übung.

Kapitel 3

Klausuraufgaben

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind (keine Begründung erforderlich):

Ist c eine regulär parametrisierte Kurve im \mathbb{R}^n , so existiert eine Umparametrisierung nach Bogenlänge von c .	WAHR
Ist c eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve, so ist ihre Krümmung positiv.	FALSCH
Ist c nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve, so stehen $c'(t)$ und $c''(t)$ bei jedem t senkrecht aufeinander.	WAHR
Sei eine C^∞ Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (wobei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall ist) gegeben. Dann existiert eine eindeutige nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Krümmung f .	FALSCH
Ist $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine C^∞ Immersion, so ist $F(\mathbb{R}^2)$ eine reguläre Fläche.	FALSCH
Es existiert keine kompakte reguläre Fläche verschwindender Gauss-Krümmung.	WAHR
Die Kettenfläche ist eine minimale Drehfläche.	WAHR
Haben zwei reguläre Flächen die dieselbe Gauss-Krümmung, so sind sie diffeomorph.	FALSCH
Das Parallelenaxiom ist im sphärischen Modell erfüllt.	WAHR
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein hyperbolisches Dreieck mit Winkelgrößen $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ und 2ε .	FALSCH

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei c gegeben durch $c(t) := \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) + \ln(\tan(\frac{t}{2})) \end{pmatrix}$ für alle $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

1. Zeigen Sie, dass c eine regulär parametrisierte ebene Kurve definiert.
 2. Berechnen Sie die Länge der Kurve c zwischen $t = \frac{\pi}{4}$ und $t = \frac{\pi}{2}$.
 3. Berechnen Sie die Krümmung von c .
-

1. Für alle $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ ist wegen $\frac{t}{2} \in]0, \frac{\pi}{4}[$ die Zahl $\tan(\frac{t}{2})$ wohldefiniert und sie liegt in $]0, 1[$, somit ist auch $c(t)$ wohldefinierte parametrisierte Kurve im \mathbb{R}^2 . Da beide Koordinatenfunktionen von c C^∞ sind, ist c C^∞ . Desweiteren gilt für alle $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ nach der Kettenregel und $\tan' = 1 + \tan^2$:

$$c'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) + \frac{1}{\tan(\frac{t}{2})} \left(\frac{1 + \tan(\frac{t}{2})^2}{2} \right) \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} -\sin(t) + \frac{1}{2 \tan(\frac{t}{2})} \left(\frac{1 + \tan(\frac{t}{2})^2}{2} \right) &= -\sin(t) + \frac{1}{2 \tan(\frac{t}{2}) \cos(\frac{t}{2})^2} \\ &= -\sin(t) + \frac{1}{2 \sin(\frac{t}{2}) \cos(\frac{t}{2})} \\ &= -\sin(t) + \frac{1}{\sin(t)} \\ &= \frac{\cos(t)^2}{\sin(t)} \\ &= \cos(t) \cot(t), \end{aligned}$$

so dass $c'(t) = \cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ \cot(t) \end{pmatrix}$. Wegen $\cos(t) \neq 0$ für alle $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ gilt auch $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, somit ist c regulär parametrisierte ebene Kurve.

2. Berechne zuerst $\|c'(t)\|$ für alle $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Es gilt

$$\begin{aligned} \|c'(t)\| &= \left\| \cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ \cot(t) \end{pmatrix} \right\| \\ &= \cos(t) \sqrt{1 + \cot(t)^2} \quad (\cos(t) > 0 \forall t \in]0, \frac{\pi}{2}[) \\ &= \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \quad (\sin(t) > 0 \forall t \in]0, \frac{\pi}{2}[) \\ &= \cot(t). \end{aligned}$$

Nach Definition gilt

$$L[c|_{[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]}] = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \|c'(t)\| dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot(t) dt \\
&= [\ln(\sin(t))]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2} \ln(2).
\end{aligned}$$

3. Für alle $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ gilt $c''(t) = -\sin(t) \begin{pmatrix} 1 \\ \cot(t) \end{pmatrix} + \cos(t) \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sin(t)^2} \end{pmatrix}$. Daraus folgt für die Krümmung κ von c

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3} \\
&= \frac{\cos(t)^2}{\cot(t)^3} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cot(t) & -\frac{1}{\sin(t)^2} \end{pmatrix} \\
&= -\tan(t),
\end{aligned}$$

für alle $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x_1, x_2, x_3) := x_1 x_2 x_3^2$ gegeben.

1. Bestimmen Sie die regulären Punkte und die regulären Werte von f .
 2. Bestimmen Sie die Werte w von f , für die die Niveaumenge $f^{-1}(\{w\})$ eine reguläre Fläche ist.
-

1. Die Abbildung f ist C^∞ und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^3$:

$$d_x f = \begin{pmatrix} x_2 x_3^2 & x_1 x_3^2 & 2x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix},$$

insbesondere gilt $d_x f = 0$ g.d.w. $x_1 x_3 = x_2 x_3 = x_1 x_2 x_3 = 0$ gilt. Dies ist aber dazu äquivalent, dass $x_1 = x_2 = 0$ oder $x_3 = 0$ gilt. Der Punkt x ist somit genau dann kritisch für f , wenn x auf der x_3 -Achse ($x_1 = x_2 = 0$) oder in der $x_1 x_2$ -Ebene ($x_3 = 0$) liegt. Die Menge der regulären Punkte von f ist dann dessen Komplement, d.h., sie ist $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \neq 0 \text{ und } (x_1 \neq 0 \text{ oder } x_2 \neq 0)\}$. Der einzige kritische Wert für f ist 0. Wegen $f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}$ muss dann $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Menge der regulären Werte von f sein.

2. Für alle regulären Werte w von f ist nach einem Korollar aus der Vorlesung $f^{-1}(\{w\})$ eine reguläre Fläche. Somit ist $f^{-1}(\{w\})$ eine reguläre Fläche für alle $w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $w = 0$ gilt $f^{-1}(\{w\}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 0 \text{ oder } x_3 = 0\}$, d.h., $f^{-1}(\{0\})$ ist die Vereinigung der $x_1 x_2$ -, $x_1 x_3$ - und $x_2 x_3$ -Ebenen. Sie ist insbesondere keine reguläre Fläche.

Daraus folgt, dass die Menge der Werte w von f , für die die Niveaumenge $f^{-1}(\{w\})$ eine reguläre Fläche ist, die Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(s, t) := \begin{pmatrix} s \cos(t) \\ s \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $S := F(\mathbb{R}^2)$ eine minimale Regelfläche ist.

Die Abbildung ist der Form $F(s, t) = c(t) + sv(t)$ mit $c(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ und $v(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Abbildungen c und v sind offenbar C^∞ von \mathbb{R} nach \mathbb{R}^3 . Es bleibt, zu zeigen, dass $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine C^∞ Immersion und ein Homöomorphismus auf S ist und dass das mittlere Krümmungsfeld von S identisch verschwindet.

Für alle $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\frac{\partial F}{\partial s}(s, t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\frac{\partial F}{\partial t}(s, t) = \begin{pmatrix} -s \sin(t) \\ s \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$, insbeson-

dere ist F eine Immersion (die Vektoren $\frac{\partial F}{\partial s}(s, t)$, $\frac{\partial F}{\partial t}(s, t)$ sind linear unabhängig für alle $(s, t) \in \mathbb{R}^2$). Die Abbildung $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, $\pi(x_1, x_2, x_3) := ((x_1 + ix_2)e^{-ix_3}, x_3)$, ist offenbar stetig und erfüllt $\pi \circ F = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ sowie $F \circ \pi|_S = \text{Id}_S$, somit ist $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ ein Homöomorphismus. Daraus folgt schon, dass S eine reguläre Regelfläche ist.

Für die Berechnung des mittleren Krümmungsfeldes von S wähle man das C^∞ Einheitsnormalenfeld

$$\begin{aligned} N \circ F(s, t) &:= \frac{\frac{\partial F}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial F}{\partial t}(s, t)}{\left\| \frac{\partial F}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial F}{\partial t}(s, t) \right\|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ s \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ s \end{pmatrix} \right\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ s \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Berechnung der Matrix der Weingarten-Abbildung braucht man die der ersten Fundamentalform und die der zweiten Fundamentalform bzgl. N . Die Matrix der ersten Fundamentalform von S bzgl. (\mathbb{R}^2, F) ist gegeben durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 + 1 \end{pmatrix}$, somit ist deren In-

verses durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2+1} \end{pmatrix}$ gegeben. Wegen $\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}(s, t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$

und $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(s, t) = \begin{pmatrix} -s \cos(t) \\ -s \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt für die Matrix der zweiten Fundamentalform von S

bzgl. (\mathbb{R}^2, F) und N : $(h_{ij}(s, t))_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Daraus folgt für die Matrix der

Weingarten-Abbildung von S bzgl. (\mathbb{R}^2, F) und N :

$$\begin{aligned}\text{Mat}(W_{F(s,t)}) &= (g_{ij}(s,t))_{i,j}^{-1} \cdot (h_{ij}(s,t))_{i,j} \\ &= \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{s^2+1} & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Spur dieser Matrix verschwindet für alle $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, somit verschwindet die mittlere Krümmung von S bzgl. N , d.h., S ist Minimalfläche.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Die Inzidenz- und Anordnungsaxiome seien für \mathcal{P} , \mathcal{G} , \mathcal{I} und \mathcal{A} erfüllt. Sei L eine feste gegebene Gerade. Für zwei Punkte p, q nicht auf L definiere man

$$p \sim q : \iff L \cap \overline{pq} = \emptyset.$$

1. Zeigen sie, dass \sim eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Punkte definiert, die nicht auf L liegen.
2. Zeigen Sie, dass es bezüglich dieser Äquivalenzrelation genau zwei Äquivalenzklassen gibt.

Außer den Inzidenz- und Anordnungsaxiomen darf man nur folgendes Ergebnis aus der Vorlesung verwenden: gegeben ein Punkt s auf einer Geraden L' , dann definiert die Relation " $s_1 \mathfrak{R} s_2 : \iff s \notin \overline{s_1 s_2}$ " eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Punkte, die auf L' liegen aber ungleich s sind, und es gibt genau zwei Äquivalenzklassen ("Seiten") bezüglich \mathfrak{R} .)

1. Seien $p, q, r \in \mathcal{P}$. Wegen $\overline{pp} = \emptyset$ (nach A_1) gilt $L \cap \overline{pp} = \emptyset$ und somit $p \sim p$: die Relation ist reflexiv. Gilt $L \cap \overline{pq} = \emptyset$, so gilt wegen $\overline{qp} = \overline{pq}$ (nach A_2) auch $L \cap \overline{qp} = \emptyset$: die Relation ist symmetrisch. Gelten $L \cap \overline{pq} = \emptyset$ sowie $L \cap \overline{qr} = \emptyset$, so müssen zwei Fälle unterschieden werden:
 - a. Die Punkte p, q, r sind auf einer Geraden L' : schneidet L' die Gerade L nicht, so gilt offenbar $L \cap \overline{pr} = \emptyset$. Schneidet L' die Gerade L , so ist es in genau einem Punkt (nach I_2), den wir mit s bezeichnen. Die Voraussetzungen $L \cap \overline{pq} = \emptyset$ und $L \cap \overline{qr} = \emptyset$ sind dann dazu äquivalent, dass p und q auf derselben Seite von s auf der Geraden L' liegen bzw., dass q und r auf derselben Seite von s auf der Geraden L' liegen. Da diese Relation (die im Hinweis mit \mathfrak{R} bezeichnet ist) eine Äquivalenzrelation ist (Vorlesung), müssen dann p und r auf derselben Seite von s auf L' liegen; insbesondere gilt $s \notin \overline{pr}$, d.h., auch $L \cap \overline{pr} = \emptyset$.
 - b. Die Punkte p, q, r sind nicht auf einer Geraden: Da L keinen der drei Punkte p, q, r enthält, kann sie die Strecke \overline{pr} nicht schneiden, sonst würde sie nach A_5 entweder \overline{pq} oder \overline{qr} schneiden, Widerspruch. Damit gilt auch $L \cap \overline{pr} = \emptyset$.

In beiden Fällen gilt $p \sim r$: die Relation ist transitiv. Insgesamt definiert sie eine Äquivalenzrelation.

2. Sei $p \in \mathcal{P}$ nicht auf L (nach I_4 existiert ein solcher Punkt). Sei s ein Punkt auf L (nach I_3 existiert ein solcher Punkt). Sei $q \in \mathcal{P}$ so, dass $s \in \overline{pq}$ (ein solcher Punkt existiert nach A_3). Nach Konstruktion gilt $L \cap \overline{pq} = \{s\}$, insbesondere definieren p und q verschiedene Äquivalenzklassen bzgl. \sim . Wir zeigen nun, dass es nur diese beiden gibt. Sei $r \in \mathcal{P}$ mit $p \not\sim r$. Wir unterscheiden nochmal in zwei Fälle:
 - a. Die Punkte p, r, q sind auf einer Geraden L' : Dann gilt $s \in \overline{pr}$, d.h., r liegt nicht auf derselben Seite von s wie p auf L' . Da q nicht auf derselben Seite von s wie p auf L' liegt, muss dann r auf derselben Seite von s wie q auf L' liegen (es gibt nach der Vorlesung nur zwei Seiten von einem Punkt auf einer Geraden). Insbesondere gilt $L \cap \overline{qr} = \emptyset$, d.h., $q \sim r$.

- b. Die Punkte p, r, q sind nicht auf einer Geraden: die Gerade L , die keinen der Punkte p, q, r enthält, schneidet \overline{pq} und \overline{pr} , somit kann sie nach A_5 die Strecke \overline{qr} nicht schneiden, Insbesondere gilt $q \sim r$.

In beiden Fällen gilt $q \sim r$, d.h., q und r liegen in derselben Äquivalenzklasse. QED.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Gegeben sind die Punkte $P_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $P_2 := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ der Sphäre S^2 . Der Punkt P_3

sei der Bildpunkt von P_2 bei einer Drehung um die x_3 -Achse mit dem Winkel $\varphi \in [0, 2\pi[$.

1. Für welche Werte von φ bilden die Punkte P_1, P_2, P_3 ein sphärisches Dreieck in S^2 ?
2. Bestimmen Sie für $\varphi = \frac{\pi}{3}$ die Seitenlängen und die Innenwinkelgrößen des sphärischen Dreiecks $P_1P_2P_3$.
3. Zeigen Sie, dass falls die Punkte P_1, P_2, P_3 ein gleichseitiges sphärisches Dreieck bilden, so bilden sie auch ein gleichseitiges euklidisches Dreieck im \mathbb{R}^3 .

1. Der Punkt P_3 kann explizit berechnet werden: es gilt nach Definition

$$\begin{aligned} P_3 &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) + \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Punkte P_1, P_2, P_3 bilden genau dann ein sphärisches Dreieck, wenn $\det(P_1, P_2, P_3) \neq 0$ gilt, d.h., wenn $\sin(\varphi) \neq 0$. Dies ist aber äquivalent zu $\varphi \in [0, 2\pi[\setminus\pi\mathbb{Z}] =]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$.

2. Es gilt $d_S(P_1, P_2) = \arccos(\langle P_1, P_2 \rangle) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$. Da Drehungen sphärische Isometrien sind und P_1 in der Fixpunktmenge der betrachteten Drehung ist, gilt $d_S(P_1, P_3) = d_S(P_1, P_2) = \frac{\pi}{2}$ (dies gilt für alle $\varphi \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$). Per Konstruktion gilt $\langle P_2, P_3 \rangle = \cos(\varphi)$, somit gilt für $\varphi = \frac{\pi}{3}$: $d_S(P_2, P_3) = \frac{\pi}{3}$. Die Innenwinkelgrößen von $P_1P_2P_3$ können direkt, mit dem sphärischen Seitenkosinussatz oder aus einem Bild (!) ausgerechnet werden: $\angle(P_1, P_2, P_3) = \angle(P_2, P_3, P_1) = \frac{\pi}{2}$, $\angle(P_3, P_1, P_2) = \frac{\pi}{3}$.
3. Es ist hauptsächlich zu bemerken, dass $d_S(P, Q) = d_S(P_1, Q_1)$ genau gilt, wenn $\langle P, Q \rangle = \langle P_1, Q_1 \rangle$ gilt. Wegen $d_S(P_1, P_2) = d_S(P_1, P_3)$ gilt dann $\langle P_1, P_2 \rangle = \langle P_1, P_3 \rangle$. Gilt zusätzlich $d_S(P_1, P_2) = d_S(P_2, P_3)$, so gilt $\langle P_1, P_2 \rangle = \langle P_2, P_3 \rangle$. Daraus folgt für die Seitenlängen des euklidischen Dreiecks $P_1P_2P_3$:

$$\begin{aligned} \|P_1 - P_2\|^2 &= \|P_1\|^2 + \|P_2\|^2 - 2\langle P_1, P_2 \rangle \\ &= 2 - 2\langle P_1, P_2 \rangle \\ &= 2 - 2\langle P_2, P_3 \rangle \\ &= \|P_2\|^2 + \|P_3\|^2 - 2\langle P_2, P_3 \rangle \\ &= \|P_2 - P_3\|^2, \end{aligned}$$

d.h., $\|P_1 - P_2\| = \|P_2 - P_3\|$. Analog gilt $\|P_1 - P_2\| = \|P_1 - P_3\|$, somit ist $P_1P_2P_3$ gleichseitiges euklidisches Dreieck.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind (keine Begründung erforderlich):

Ist c eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve im \mathbb{R}^n , so gibt es keine weitere Umparametrisierung nach Bogenlänge von c .	FALSCH
Gegeben sei $L > 0$. Dann sind die Kreisscheiben von Radius $\frac{L}{2\pi}$ die kleinstmöglichen Gebiete, die von einer einfach geschlossenen ebenen Kurve der Länge L berandet sind.	FALSCH
Es existiert eine ebene geschlossene Kurve, deren Totalkrümmung 3π gleicht.	FALSCH
Sei eine C^∞ Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben mit $f > 0$ auf I (wobei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall ist). Dann existiert eine regulär parametrisierte Raumkurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit Krümmung und Windung gleich f .	WAHR
Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ Abbildung und $d \in f(\mathbb{R}^3)$. Ist $f^{-1}(\{d\})$ keine reguläre Fläche, so ist d kritischer Wert von f .	WAHR
Hat eine reguläre Fläche negative Gauss-Krümmung, so ist sie nicht kompakt.	WAHR
Es existiert eine Drehfläche positiver Gauss-Krümmung.	WAHR
Sei p ein Punkt aus einer regulären Fläche S . Dann verschwindet das mittlere Krümmungsfeld von S in p genau dann, wenn die beiden Hauptkrümmungen von S in p entgegengesetzte Vorzeichen haben.	FALSCH
Das Parallelenaxiom ist nur im kartesischen Modell erfüllt.	FALSCH
Es existiert ein sphärisches Dreieck mit Seitenlängen $\frac{\pi}{2}$, π und $\frac{\pi}{2}$.	FALSCH

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Für ein festes $a > 1$ sei $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $c(t) := \begin{pmatrix} a \cos(t) + \sin(t) \\ a(\cos(t) + \sin(t)) \end{pmatrix}$ gegeben.

1. Zeigen Sie, dass c eine periodische regulär parametrisierte ebene Kurve definiert und dass $[c]$ einfach geschlossen ist.
(Hinweis: schreibe c in der Form $c(t) = \cos(t)v_1 + \sin(t)v_2$ mit geeigneten Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$.)
 2. Zeigen Sie, dass für die Länge von $[c]$ gilt: $L[c]^2 \geq 4\pi^2 a(a-1)$.
 3. Bestimmen Sie die Umlaufzahl von $[c]$.
-

1. Die Abbildung c ist offenbar C^∞ , mit Werten im \mathbb{R}^2 , und es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$: $c(t) = \cos(t) \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} + \sin(t) \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ und somit $c'(t) = -\sin(t) \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} + \cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$. Wegen $a > 1$ sind die Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ linear unabhängig, somit gilt $c'(t) = 0$ g.d.w. $\cos(t) = \sin(t) = 0$, was natürlich nie passiert. Daraus folgt $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h., c ist regulär parametrisiert. Desweiteren ist c genau 2π -periodisch: gilt $c(t) = c(t')$ für $t, t' \in [0, 2\pi[$, so gilt wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ $\cos(t) = \cos(t')$ und $\sin(t) = \sin(t')$, woraus $t = t'$ folgt. Damit hat man auch bewiesen, dass $[c]$ einfach geschlossen ist.
2. Da c einfach geschlossen ist, kann die isoperimetrische Ungleichung angewendet werden: sei Ω das von c umschlossene Gebiet im \mathbb{R}^2 , dann gilt $L[c]^2 \geq 4\pi A[\Omega]$, wobei $A[\Omega]$ der Flächeninhalt von Ω ist. Dieser Flächeninhalt lässt sich aber hier explizit ausrechnen: es gilt

$$\begin{aligned} A[\Omega] &= \frac{1}{2} \left| \int_0^{2\pi} \det(c(t), c'(t)) dt \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \int_0^{2\pi} (\cos(t)^2 + \sin(t)^2) \det \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & a \end{pmatrix} dt \right| \\ &= \pi a(a-1). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

3. Da $[c]$ einfach geschlossen ist, muss nach dem Umlaufsatz entweder $n_{[c]} = 1$ oder $n_{[c]} = -1$ gelten. Das Vorzeichen von $n_{[c]}$ kann durch das der Krümmung mit der Formel $2\pi n_{[c]} = \int_0^{2\pi} \kappa(t) dt$ bestimmt werden. Wegen $\det(c'(t), c''(t)) = a(a-1) > 0$ gilt $\kappa > 0$ auf \mathbb{R} , somit gilt auch $n_{[c]} > 0$. Damit folgt $n_{[c]} = 1$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Für eine orientierte reguläre Fläche S und einen Punkt p auf S sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c(0) = p$ und $c(t) \in S$ für alle $t \in I$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist. Man nehme an, dass S positive Gauss-Krümmung habe.

1. Zeigen Sie mit Hilfe der Produktregel, dass folgende Identität für alle $t \in I$ gilt: $\langle N \circ c(t), c''(t) \rangle = \langle W_{c(t)}(c'(t)), c'(t) \rangle$, wobei N das stetige Einheitsnormalenfeld ist, welches die Orientierung von S liefert und W die Weingarten-Abbildung von S bezüglich N ist.

(Hinweis: leiten Sie die Funktion $t \mapsto \langle (N \circ c)(t), c'(t) \rangle$ ab.)

2. Zeigen Sie, dass für alle $X \in T_p S$ gilt

$$|\langle W_p(X), X \rangle| \geq \min(|\kappa_1|, |\kappa_2|) \cdot \|X\|^2,$$

wobei κ_1 und κ_2 die Hauptkrümmungen von S in p und bezüglich N sind.

3. Leiten Sie mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung her, dass für die Krümmung κ von c gilt $\kappa(0) \geq \min(|\kappa_1|, |\kappa_2|)$.

1. Für alle $t \in I$ gilt $\langle N \circ c(t), c'(t) \rangle = 0$ (denn $c'(t) \in T_{c(t)}S$ und $N \circ c(t) \perp T_{c(t)}S$). Das Ableiten dieser Identität nach t liefert nach der Produktregel:

$$\begin{aligned} 0 &= (\langle N \circ c, c' \rangle)'(t) \\ &= \langle (N \circ c)'(t), c'(t) \rangle + \langle N \circ c(t), c''(t) \rangle. \end{aligned}$$

Nach Definition der Tangentialabbildung gilt $(N \circ c)'(t) = T_{c(t)}N(c'(t))$ und nach Definition der Weingarten-Abbildung gilt $T_{c(t)}N(c'(t)) = -W_{c(t)}(c'(t))$, was zu beweisen war.

2. Sei $\{X_1, X_2\}$ eine Orthonormalbasis von $T_p S$, in der W_p diagonal ist, d.h., $W_p(X_i) = \kappa_i X_i$ für alle $i = 1, 2$ (die Eigenwerte κ_i sind dann die Hauptkrümmungen von S in p und bzgl. N). Sei $X \in T_p S$. Zerlege X in der Basis $\{X_1, X_2\}$: es existieren eindeutige $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ mit $X = a_1 X_1 + a_2 X_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\langle W_p(X), X \rangle| &= |\langle a_1 W_p(X_1) + a_2 W_p(X_2), a_1 X_1 + a_2 X_2 \rangle| \\ &= |\langle a_1 \kappa_1 X_1 + a_2 \kappa_2 X_2, a_1 X_1 + a_2 X_2 \rangle| \\ &= |\kappa_1 a_1^2 + \kappa_2 a_2^2|. \end{aligned}$$

Wegen der Voraussetzung $K > 0$ auf S müssen die Hauptkrümmungen beide positiv oder beide negativ sein. O.B.d.A. seien $\kappa_1, \kappa_2 > 0$, dann gilt offenbar $\kappa_i a_i^2 \geq \min(\kappa_1, \kappa_2) a_i^2$ für alle $i = 1, 2$. Damit folgt

$$\begin{aligned} |\kappa_1 a_1^2 + \kappa_2 a_2^2| &\geq \min(\kappa_1, \kappa_2) |a_1^2 + a_2^2| \\ &= \min(|\kappa_1|, |\kappa_2|) \|X\|^2 \end{aligned}$$

und die Behauptung.

3. Nach 1. und 2. gilt $|\langle N \circ c(0), c''(0) \rangle| \geq \min(|\kappa_1|, |\kappa_2|) \|c'(0)\|^2$. Da c nach Bogenlänge parametrisiert ist, muss $\|c'(0)\| = 1$ gelten. Außerdem gilt nach der Definition der Krümmung für nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurven $c''(t) = \kappa(t)n(t)$ für alle $t \in I$. Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und wegen $\kappa \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} |\langle N \circ c(0), c''(0) \rangle| &\leq \|N \circ c(0)\| \cdot \|c''(0)\| \\ &= |\kappa(0)| \\ &= \kappa(0), \end{aligned}$$

was unmittelbar zum Ergebnis führt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Sei die lokale Parametrisierung (U, F) von $S := S^2$ gegeben durch $F(y) := \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \|y\|^2} \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

für alle $y \in U$, wobei $U := \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y\| < 1\}$.

1. Zeigen Sie, dass die erste Fundamentalform von S bezüglich (U, F) gegeben ist durch

$$(g_{ij})_{i,j} = \frac{1}{1 - \|y\|^2} \begin{pmatrix} 1 - y_2^2 & y_1 y_2 \\ y_1 y_2 & 1 - y_1^2 \end{pmatrix}.$$

2. Zeigen Sie, dass für die zweite Fundamentalform von S bezüglich (U, F) und eines der beiden stetigen Einheitsnormalenfelder N gilt:

$$(h_{ij})_{i,j} = -\frac{1}{1 - \|y\|^2} \begin{pmatrix} 1 - y_2^2 & y_1 y_2 \\ y_1 y_2 & 1 - y_1^2 \end{pmatrix}.$$

Leiten Sie daraus her, dass die Weingarten-Abbildung von S bezüglich (U, F) und desselben N gegeben ist durch

$$\text{Mat}(W_{F(y)}) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Bestimmen Sie das mittlere Krümmungsfeld von S .

1. Es gilt $\frac{\partial F}{\partial y_1}(y) = \begin{pmatrix} -\frac{y_1}{\sqrt{1 - \|y\|^2}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\frac{\partial F}{\partial y_2}(y) = \begin{pmatrix} -\frac{y_2}{\sqrt{1 - \|y\|^2}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, somit ist die Matrix der ersten Fundamentalform von S bzgl. (U, F) gegeben durch

$$(g_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{y_1^2}{1 - \|y\|^2} & \frac{y_1 y_2}{1 - \|y\|^2} \\ \frac{y_1 y_2}{1 - \|y\|^2} & 1 + \frac{y_2^2}{1 - \|y\|^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \|y\|^2} \begin{pmatrix} 1 - y_2^2 & y_1 y_2 \\ y_1 y_2 & 1 - y_1^2 \end{pmatrix}.$$

2. Als C^∞ Einheitsnormalenfeld auf $F(U)$ wähle man $N \circ F(y) = \frac{\frac{\partial F}{\partial y_1}(y) \times \frac{\partial F}{\partial y_2}(y)}{\|\frac{\partial F}{\partial y_1}(y) \times \frac{\partial F}{\partial y_2}(y)\|} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \|y\|^2} \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Wegen $\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}(y) = \begin{pmatrix} -\frac{1 - y_2^2}{(1 - \|y\|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2}(y) = \begin{pmatrix} -\frac{y_1 y_2}{(1 - \|y\|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

und $\frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2}(y) = \begin{pmatrix} -\frac{1 - y_1^2}{(1 - \|y\|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt für die Matrix der zweiten Fundamentalform von S bzgl. (U, F) und N :

$$(h_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} -\frac{1 - y_2^2}{1 - \|y\|^2} & -\frac{y_1 y_2}{1 - \|y\|^2} \\ -\frac{y_1 y_2}{1 - \|y\|^2} & -\frac{1 - y_1^2}{1 - \|y\|^2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{1 - \|y\|^2} \begin{pmatrix} 1 - y_2^2 & y_1 y_2 \\ y_1 y_2 & 1 - y_1^2 \end{pmatrix}.$$

Da das Inverse zu $(g_{ij})_{i,j}$ gegeben ist durch $\begin{pmatrix} 1 - y_1^2 & -y_1 y_2 \\ -y_1 y_2 & 1 - y_2^2 \end{pmatrix}$, ist die Matrix der Weingarten-Abbildung von S bzgl. (U, F) und N gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{Mat}(W_{F(y)}) &= (g_{ij})_{i,j}^{-1} \cdot (h_{ij})_{i,j} \\ &= -\frac{1}{1 - \|y\|^2} \begin{pmatrix} 1 - y_1^2 & -y_1 y_2 \\ -y_1 y_2 & 1 - y_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - y_2^2 & y_1 y_2 \\ y_1 y_2 & 1 - y_1^2 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{1 - \|y\|^2} \begin{pmatrix} 1 - \|y\|^2 & 0 \\ 0 & 1 - \|y\|^2 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Die mittlere Krümmung von S bzgl. N ist in der lokalen Parametrisierung (U, F) gegeben durch $H \circ F(y) = -1$ und somit ist das mittlere Krümmungsfeld von S bzgl. (U, F) gegeben durch

$$\vec{H} \circ F(y) = (H \circ F(y)) \cdot N \circ F(y) = - \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \|y\|^2} \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Die Inzidenz-, Anordnungs- und Kongruenzaxiome seien für \mathcal{P} , \mathcal{G} , \mathcal{I} , \mathcal{A} , SK und WK erfüllt. Seien p, q, r Punkte auf einer Geraden L mit $p \neq q$ und $p \neq r$. Man nehme an, dass q und r auf derselben Seite von p auf L liegen mit $\overline{pq} \equiv \overline{pr}$.

1. Nach I_4 gibt es einen Punkt s nicht auf L . Zeigen Sie mit Hilfe von K_6 , dass $\angle(p, s, q) \equiv \angle(p, s, r)$ gilt.
2. Zeigen Sie mit Hilfe von K_5 , dass $\angle(p, s, q) = \angle(p, s, r)$ und leiten Sie daraus her, dass $q = r$ gilt.

1. Da die Kongruenzrelation auf Strecken eine Äquivalenzrelation ist (Folgerung aus K_1 und K_2 , siehe Satz in der Vorlesung), gilt $\overline{ps} \equiv \overline{ps}$. Da p, r auf L und auf derselben Seite von p liegen, muss weiter $\angle(s, p, q) = \angle(s, p, r)$ und somit $\angle(s, p, q) \equiv \angle(s, p, r)$ (nach K_4) gelten. Da nach Voraussetzung zusätzlich $\overline{pq} \equiv \overline{pr}$ erfüllt ist, folgt aus K_6 , dass $\angle(p, s, q) \equiv \angle(p, s, r)$ gilt.
2. Nach der Eindeutigkeit in der Winkelabtragung (Axiom K_5) und weil q, r auf derselben Seite von $L(p, s)$ liegen (denn $p \notin \overline{qr}$) muss wegen $\angle(p, s, q) \equiv \angle(p, s, r)$ auch $\angle(p, s, q) = \angle(p, s, r)$ gelten. Daraus folgt, dass s, q, r auf einer Geraden liegen. Wären $q \neq r$, so würde s auf $L(q, r) = L$ liegen, Widerspruch zur Konstruktion von s . Somit gilt $q = r$.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Im kartesischen Modell der ebenen euklidischen Geometrie sei die Abbildung $M_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$M_{a,b}(x) := \begin{pmatrix} 0 & a \\ -1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

gegeben, für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, wobei $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind.

1. Bestimmen Sie alle Paare reeller Zahlen (a, b) , für die $M_{a,b}$ eine euklidische Bewegung ist.
 2. Geben Sie für eines der von Ihnen in 1. angegebenen Paare (a, b) eine Darstellung der Form (3.1) für $M_{a,b} \circ M_{a,b}$ an.
 3. Geben Sie für eines der von Ihnen in 1. angegebenen Paare (a, b) eine Darstellung der Form (3.1) für $M_{a,b}^{-1}$ an.
-

1. Es sollen ${}^tA \cdot A = I_2$ gelten mit $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}$, d.h., $\begin{pmatrix} 1 & -b \\ -b & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dies ist zu $b = 0$ und $a^2 = 1$ äquivalent, d.h., $a = -1$ oder $a = 1$. Die einzigen reellen Paare (a, b) , für die $M_{a,b}$ eine euklidische Bewegung ist, sind also $(-1, 0)$ und $(1, 0)$.

2. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} M_{1,0} \circ M_{1,0}(x) &= A^2 \cdot x + A \cdot p + p \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} p_1 + p_2 \\ p_2 - p_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} M_{1,0}^{-1}(x) &= A^{-1} \cdot x - A^{-1} \cdot p \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} p_2 \\ -p_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Axiome der ebenen euklidischen Geometrie

Inzidenzaxiome:

- I₁ Durch je zwei Punkte geht eine Gerade.
- I₂ Durch je zwei verschiedene Punkte geht höchstens eine Gerade.
- I₃ Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte.
- I₄ Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Anordnungsaxiome:

- A₁ Liegt ein Punkt q zwischen zwei Punkten p und r , so sind p, q, r paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden.
- A₂ Liegt ein Punkt q zwischen zwei Punkten p und r , so liegt q zwischen r und p .
- A₃ Zu je zwei verschiedenen Punkten p und q gibt es einen Punkt r so, dass q zwischen p und r liegt.
- A₄ Unter je drei Punkten liegt höchstens einer zwischen den beiden anderen.
- A₅ Seien p, q, r Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Sei L eine Gerade, die keinen dieser drei Punkte enthält. Schneidet L die Strecke \overline{pq} , so schneidet L genau eine der beiden anderen Strecken \overline{qr} oder \overline{pr} .

Kongruenzaxiome:

- K₁ Seien $p \neq q, p_1 \neq r_1$ vier Punkte. Dann existiert ein Punkt q_1 auf $L(p_1, r_1)$, auf derselben Seite von p_1 wie r_1 so, dass $\overline{pq} \equiv \overline{p_1q_1}$.
- K₂ Seien $p \neq q, p_1 \neq q_1$ und $p_2 \neq q_2$ sechs Punkte. Gelten $\overline{p_1q_1} \equiv \overline{pq}$ und $\overline{p_2q_2} \equiv \overline{pq}$, so gilt $\overline{p_1q_1} \equiv \overline{p_2q_2}$.
- K₃ Seien (p, q, r) und (p_1, q_1, s_1) zwei Tripel von Punkten, die jeweils paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden sind mit $\overline{pq} \cap \overline{qr} = \emptyset$ und $\overline{p_1q_1} \cap \overline{q_1r_1} = \emptyset$. Gelten $\overline{pq} \equiv \overline{p_1q_1}$ und $\overline{qr} \equiv \overline{q_1r_1}$, so gilt $\overline{pr} \equiv \overline{p_1r_1}$.
- K₄ Die Kongruenzrelation zwischen Winkeln bildet eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Winkel.
- K₅ Seien (p, q, r) und (p_1, q_1, s_1) zwei Tripel von Punkten, die jeweils nicht auf einer Geraden liegen. Dann gibt es einen Punkt r_1 , auf derselben Seite von $L(q_1, p_1)$ wie s_1 so, dass $\angle(p, q, r) \equiv \angle(p_1, q_1, r_1)$. Ist ferner r_2 ein Punkt auf derselben Seite von $L(q_1, p_1)$ wie s_1 mit $\angle(p, q, r) \equiv \angle(p_1, q_1, r_2)$, so gilt $\angle(p_1, q_1, r_1) = \angle(p_1, q_1, r_2)$.

K_6 Seien (p, q, r) und (p_1, q_1, r_1) zwei Tripel von Punkten, die jeweils nicht auf einer Geraden liegen. Gelten $\overline{qp} \equiv \overline{q_1p_1}$, $\overline{qr} \equiv \overline{q_1r_1}$ und $\angle(p, q, r) \equiv \angle(p_1, q_1, r_1)$, so gilt $\angle(q, p, r) \equiv \angle(q_1, p_1, r_1)$.

Parallelenaxiom:

P Sei L eine Gerade und p ein Punkt nicht auf L . Dann gibt es höchstens eine Parallele zu L durch p .

Vollständigkeitsaxiome:

V_1 Seien \overline{pq} und \overline{rs} zwei Strecken. Dann existiert eine natürliche Zahl n so, dass die Strecke $\overline{r_1s_n}$, die durch n -maliges Abtragen der Strecke \overline{rs} auf der Geraden $L(p, q)$ entsteht, ausgehend von p in Richtung q , die Strecke \overline{pq} enthält.

V_2 Das vorläufige Modell der ebenen euklidischen Geometrie sei maximal.

Literaturverzeichnis

- [1] C. Bär, *Elementare Differentialgeometrie*, de Gruyter Lehrbuch (2001).
- [2] H. Cartan, *Differential calculus*, Hermann (1971).
- [3] M.P. do Carmo, *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, Vieweg-Verlag Braunschweig (1992).
- [4] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Universitext, Springer-Verlag Berlin (1993).
- [5] N. Ginoux, *Hilfsmittel zur mengentheoretischen Topologie*, erhältlich unter <http://www.mathematik.uni-regensburg.de/ginoux> (2008).
- [6] K. Jänich, *Analysis für Physiker und Ingenieure*, Springer-Verlag Berlin (1990).
- [7] J. Jost, *Differentialgeometrie und Minimalflächen*, Springer-Lehrbuch (1994).
- [8] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, Publish or Perish (1979).

Index

- C^k -Abbildungen auf Flächen, 103
- Binormalenfeld, 44
- Bogenlänge (Parametrisierung nach), 13
- Diffeomorphismus, 8, 85, 107
- differenzierbare Abbildungen, 103, 105
- Divergenzsatz von Gauss, 38
- Drehfläche, 139
- Drehtorus, 140
- Ebene (affine), 87, 100, 109, 114, 134
- Ebene (hyperbolische), 100
- Einheitsnormalenfeld, 117
- elliptisch, 131
- Fläche (reguläre), 86
- Flachpunkt, 131
- Frenet-Dreibein (einer Raumkurve), 44
- Fundamentalform
 - erste, 113
 - zweite, 123
- Graph (einer Funktion), 87, 109, 115, 136
- Hauptkrümmung(en), 123
- Hauptkrümmungsrichtung, 127
- Hauptsatz
 - der Theorie der ebenen Kurven, 25
 - der Theorie der Raumkurven, 50
- Helikoid, 135
- hyperbolisch, 131
- Hyperboloid
 - einschaliges, 138
- Immersion, 91
- implizite Funktionen
 - Satz über, 85
- Isoperimetrische Ungleichung, 39
- Karte (lokale), 94
- Katenoid, 134, 140
- Kegel(Doppel-), 101
- Kegel, verallgemeinerter, 138
- Kettenfläche, 134, 140
- Krümmung
 - einer Raumkurve, 41
 - Gauss-, 127
 - mittlere, 127
- Krümmungsfeld, mittlere, 127
- Krümmungslinie, 127
- kritischer
 - Punkt, 99
 - Wert, 99
- Kurve
 - einfach geschlossene, 17
 - ebene, 17
 - geschlossene, 16
 - im \mathbb{R}^n , 9
 - Raum-, 41
- Länge, 12
- Möbiusband, 118, 138
- Mannigfaltigkeit, 95
- Minimalfläche, 134
- Nabelpunkt, 125
- Niveaufläche, 99
- Niveaumenge, 99
- Norm (euklidische), 12
- Normalenfeld
 - auf eine Fläche, 117
 - zu einer ebenen Kurve, 17
 - zu einer Raumkurve, 43
- orientierbare Fläche, 118
- orientierte
 - Fläche, 118
 - Kurve, 11
- orientierungserhaltend, 11
- orientierungsumkehrend, 11
- parabolisch, 131
- Paraboloid, 132
 - hyperbolisches, 138
- Parametrisierung (einer Fläche), 87

Projektion(en), stereographische, 91
Punkt
 elliptischer, 131
 hyperbolischer, 131
 parabolischer, 131

Regelfläche, 138
regulär parametrisiert, 7
regulärer
 Punkt, 99
 Wert, 99
Rotationshyperboloid, 138, 140

Sattel, 132
Sattelfläche, 138
Schmiegebene, 48
Schraubenlinie, 43
singulärer
 Punkt, 99
 Wert, 99
Skalarprodukt (euklidisches), 12
Sphäre (die euklidische), 88, 100, 110, 114
Spur (einer Kurve), 9
Submersion, 96

Tangentialabbildung, 111
Tangentialebene, 107
Torsion (siehe Windung), 47
Torus, 140
Totalkrümmung
 einer ebenen Kurve, 36, 37

Umkehrsatz, 85
Umlaufsatz, 33
Umlaufzahl, 31, 33
Umparametrisierung (einer Kurve), 8

Weingarten-Abbildung, 121
Wendelfläche, 135
Windung, 47

Zylinder, 126
Zylinder, verallgemeinerter, 138