Universität Regensburg, Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux

Sommersemester 2014
3.6.2014

Zentralübung Analysis II

3.6.2014

Aufgabe 1.
Gibt es eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass folgendes gilt?

(a) $f'(x, y) = (x, y)$

(b) $f'(x, y) = (-x, y)$

(c) $f'(x, y) = (y, x)$

(d) $f'(x, y) = (-y, x)$

Aufgabe 2.
Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = -2y^2 + 7y - x^2 y + 2xy.$$

Bestimmen Sie die stationären Punkte und geben Sie jeweil an, ob es sich um ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder kein lokales Extremum handelt. Besitzt die Funktion ein globales Maximum oder Minimum?

Aufgabe 3. *(Doppelpendel)*
Wir betrachten ein ebenes physikalisches Doppelpendel. Dann ist die kinetische Energie

$$V : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad V(\phi, \psi) = -m_1 \cos\phi - m_2(\cos\phi + \cos\psi)$$

Bestimmen Sie die stationären Punkte, bestimmen Sie, ob lokale Minima, lokale Maxima oder kein lokales Extremum vorliegen. Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 der Hesse-Matrix an allen lokalen Minima. Geben Sie an den lokalen Minima das Taylorpolynom 2. Grades an.

(Bemerkung: physikalische Interpretation: Lokale Minima mit positive definiter Hesse-Matrix sind stabil, das heißt: nimmt V ein lokales Minimum in p an und ist die Gesamtnergie nahe an $V(p)$, dann bleibt die Bahn des System in einer Umgebung von p. Oft nähert man das Potential durch das Taylor-Polynom 2. Grades an. In dieser Näherung kann man die Bewegungsgleichung exakt lösen: jede Bahn ist eine Linearkombination von zwei exakt berechenbaren Schwingungen um p herum. Erstaunlich ist nun: wenn man die Näherung nicht macht, sondern exakt argumentiert, so kann man zeigen, dass das quantitative Verhalten immer noch ähnlich zu der Näherungslösung ist.)

Aufgabe 4. *(Ableitungen in Polarkoordinaten)*
Wir den Laplace-Operator $\Delta : C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ durch

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Wir wollen den Laplace-Operator in Polar-Koordinaten ausdrücken, genauer: Sei $g : (0; \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)^T$. Es gilt Funktionen $a_{rr}, a_{r\phi}, a_{\phi\phi} : (0; \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu bestimmen, so dass

$$(\Delta f) \circ g(r, \phi) = a_{rr}(r, \phi)\frac{\partial^2 (f \circ g)}{\partial r^2} + 2a_{r\phi}(r, \phi)\frac{\partial^2 (f \circ g)}{\partial r \partial \phi} + a_{\phi\phi}(r, \phi)\frac{\partial^2 (f \circ g)}{\partial \phi^2}.$$

Aufgabe 5.
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \mapsto A^2$. Zeigen Sie, dass f beliebig oft differenzierbar ist. Bestimmen Sie die Ableitung $f'(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R}^{n\times n})$. Zeigen Sie: es gibt eine offene Umgebungen V und W der Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$, so dass $f|_V : V \to W$ bijektiv ist und so dass die Umkehrfunktion differenzierbar ist.