Universität Regensburg, Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux

Sommersemester 2014
20.5.2014

Zentralübung Analysis II
20.5.2014

Topologie

Aufgabe 1.
Für drei topologische Räume X, Y und Z seien die Produkträume $X \times Y$ und $Y \times Z$ mit der Produkttopologie versehen (vgl. 6. Übungsblatt). Zeigen Sie: versehen wir $(X \times Y) \times Z$ und $X \times (Y \times Z)$ ebenfalls mit den Produkttopologien, so ist die Identitäts-Abbildung $(X \times Y) \times Z \to X \times (Y \times Z)$ ein Homöomorphismus.

Aufgabe 2.
Für zwei topologische Räume X und Y sei der Produktraum $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen (vgl. 6. Übungsblatt).

(a) Sei $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$. Zeigen Sie, dass $\iota^X_{y_0} : X \to X \times Y$, $x \mapsto (x, y_0)$ und $\iota^Y_{x_0} : Y \to X \times Y$, $y \mapsto (x_0, y)$ stetig sind.

(b) Sei $f : X \times Y \to Z$, wobei Z ein weiterer topologischer Raum ist. Zeigen Sie nun: ist f stetig, so sind die Abbildungen $Y \to Z$, $y \mapsto f(x_0, y)$ sowie $X \to Z$, $x \mapsto f(x, y_0)$, stetig.

(c) In diesem Aufgabenteil seien $X = Y = \mathbb{R}$ und $f : X \times Y \to \mathbb{R}$,

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für jedes $(x_0, y_0) \in X \times Y$ die Abbildungen $Y \to Z$, $y \mapsto f(x_0, y)$ sowie $X \to Z$, $x \mapsto f(x, y_0)$, stetig sind, dass aber f selbst nicht stetig ist.

(d) Sei nun $g : Z \to X \times Y$ eine Abbildung, wobei X, Y, Z wieder beliebige topologische Räume sind. Zeigen Sie: g ist genau dann stetig, wenn die Abbildungen $\mathrm{pr}_X \circ g : Z \to X$ und $\mathrm{pr}_Y \circ g : Z \to Y$ stetig sind.

Aufgabe 3.
Für zwei topologische Räume X und Y sei der Produktraum $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen (vgl. 6. Übungsblatt). Zeigen Sie:
$X \times Y$ ist genau dann kompakt, wenn X und Y kompakt sind.

Differenzierbarkeit

Aufgabe 4.
Wir studieren nochmals die in 2(c) betrachtete Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f ist partiell differenzierbar ist.

(b) Für welche $p \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existiert die Richtungs-Ableitung $\partial_{p,v} f$?

(c) Bestimmen Sie alle p in denen f differenzierbar ist.

Aufgabe 5.
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass f zweimal partiell differenzierbar ist und bestimmen Sie

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)$$

Aufgabe 6.
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} x^2 y \sin(1/x) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f ist differenzierbar.

(b) Ist f stetig differenzierbar?

Aufgabe 7.
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei in $(0,0)^T$ in alle Richtungen differenzierbar. Folgt hieraus, dass f stetig in $(0,0)$ ist? Beweisen Sie die Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Sonstige

Aufgabe 8.
Wir versehen $\mathbb{R}^n$ mit der Standard-Metrik d (der euklidischen Metrik). Bestimmen Sie alle nichtleeren Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$, so dass die folgende „Dreiecks-Ungleichung“ gilt:

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^n : \; d(x,y) \leq d(x,A) + d(y,A)$$