Universität Regensburg, Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux

Sommersemester 2014
15.4.2014

Zentralübung Analysis II

15.4.2014

Aufgabe 1.
Zeigen Sie, indem Sie die Potenzreihe gliedweise differenzieren: $\sin'(x_0) = \cos(x_0)$, $\cos'(x_0) = -\sin(x_0)$, $\cosh'(x) = \sinh(x)$, $\sinh'(x) = \cosh(x)$.
Wieso darf man Potenzreihen gliedweise differenzieren?

Aufgabe 2.
Wieso kann man den Satz über die Ableitung von Grenzwerten von Folgen von Funktionen (Kapitel 5, Theorem 5.4) nicht auf die folgenden Folgen und Reihen von Funktionen anwenden?

$$f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

Aufgabe 3.
Berechnen Sie die folgenden Integrale, falls sie (im Riemannschen Sinn) existieren. Gebenenfalls machen Sie eine Fallunterscheidung für verschiedene $a, b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_{>0}$.

$$(a) \quad \int_a^b (c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0 x^0)\, dx,$$

$$(b) \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx, \qquad (c) \quad \int_a^b \frac{1}{x}\, dx,$$

$$(d) \quad \int_a^b c^x\, dx, \qquad (e) \quad \int_a^b \frac{1}{\cos^2 x}\, dx,$$

Aufgabe 4.
Eine Stammfunktion von $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ ist eine stetige Funktion $F : [a; b] \to \mathbb{R}$, die auf $(a; b)$ differenzierbar ist, und so dass für alle $x \in (a; b)$ gilt: $F'(x) = f(x)$. Finden Sie eine Funktion f, die Riemann-integrierbar ist, aber keine Stammfunktion besitzt. Finden Sie eine Funktion f, die nicht Riemann-integrierbar ist, aber eine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 5.
Wir definieren

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x},$$

wobei f auf allen $x \in \mathbb{R}$ definiert ist mit $x^3 - x \neq 0$.
Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen F mit demselben Definitionsbereich und mit $F' = f$.
Hinweis: Schreiben Sie dazu zunächst f in der Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{a_0}{x - x_0} + \frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{x - x_2},$$

wobei x_0, x_1, x_2 die Nullstellen des Polynoms $x^3 - x$ sind.

Aufgabe 6.
Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

für $s > 1$ konvergiert.
Hinweis: Vergleichen Sie dazu die Reihe mit den Funktionen

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \lfloor x + 1 \rfloor^{-s}$$

$$g : [1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^{-s}$$

und berechnen Sie geeignete Integrale über Intervalle $[a; b]$, $a, b \in \mathbb{N}$.