Jede 3-Mannigfaltigkeit berandet

Nicolas Ginoux

Seminar über Knoten und 3-Mannigfaltigkeiten - Universität Regensburg

8. Februar 2011

Zusammenfassung: Wir zeigen folgenden Satz von V.A. Rokhlin [3]: jede geschlossene orientierbare 3-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist der Rand einer kompakten 4-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit. Der Vortrag basiert auf [2, Sec. V.12].

Vorausgesetzt werden folgende Begriffe und Ergebnisse: Mannigfaltigkeiten mit oder ohne Rand, CW-Komplexe, (Ko-)Homologie, Heegaard-Zerlegungen von 3-Mannigfaltigkeiten, Dehn-Twists, Satz von Dehn-Lickorish und Anwendung zur Darstellung von orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten mittels Chirurgien entlang Tori im $\mathbb{S}^3$, siehe z.B. [2, Ch. IV & V].

1 Motivation

Wann ist eine gegebene Mannigfaltigkeit M (ohne Rand) der Rand einer Mannifaltigkeit? Trivialerweise gilt $M = \partial(M \times [0, \infty[)$, so dass eine sinnvolle Frage eher "Wann berandet eine gegebene *geschlossene*[1] Mannigfaltigkeit eine *kompakte* Mannigfaltigkeit?" lauten sollte. Kurz sagen wir:

Definition 1.1 *Eine n-dimensionale geschlossene topologische Mannigfaltigkeit M^n* berandet *genau dann, wenn es eine $n+1$-dimensionale kompakte topologische Mannigfaltigkeit W gibt mit $\partial W = M^n$.*

Für $n = 1$ ist $M = \mathbb{S}^1$ (der Einheitskreis) die einzige zusammenhängende geschlossene topologische Mannigfaltigkeit und sie berandet (wähle $W := D^2$,

[1] geschlossen = kompakt und ohne Rand

die 2-dimensionale geschlossene Kreisscheibe). Für $n = 2$ berandet jede *orientierbare* geschlossene topologische Fläche ("die" Fläche vom Geschlecht $g \in \mathbb{N}$ berandet... einen Henkelkörper vom selben Geschlecht!), nicht aber z.B. die 2-dimensionale reellprojektive Ebene $\mathbb{R}P^2$. Dazu führen wir eine topologische Invariante ein, die als Hindernis zur Eigenschaft, ein Rand zu sein, genutzt werden kann.

Definition 1.2 *Die* Euler-Charakteristik *einer n-dimensionalen kompakten topologischen Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand) ist definiert als*

$$\chi(M^n) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i b_i,$$

wobei b_i der Rang der ganzzahligen Homologiegruppe $H_i(M^n, \mathbb{Z})$ bezeichnet.

Alternativ (aber nicht so einfach zu sehen) kann $\chi(M^n)$ folgendermaßen definiert werden: schreibe M^n als endlichen CW-Komplex hin (immer möglich, nicht aber eindeutig), setze $a_i := |\{i-\text{Zellen des CW-Komplexes}\}|$ für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, dann ist $\chi(M^n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i$. Diese Definition hat Sinn, sobald M^n ein endlicher CW-Komplex ist.

Lemma 1.3 *Sei M^n eine n-dimensionale geschlossene topologische Mannigfaltigkeit.*

i) Ist M^n ungeradedimensional, so verschwindet ihre Euler-Charakteristik.

ii) Ist M^n der Rand einer $n+1$-dimensionalen kompakten topologischen Mannigfaltigkeit, so ist $\chi(M^n)$ gerade.

Beweisskizze: Beide Aussagen beruhen auf Ergebnisse aus den (singulären) Homologie- und Kohomologietheorien.
Ad *i*): Für eine geschlossene orienterbare[2] topologische Mannigfaltigkeit M^n folgt aus der *Poincaré-Dualität* (siehe z.B. [1, Thm. 3.30]) die Identität $b_i = b_{n-i}$. Für n ungerade folgt unmittelbar $\chi(M^n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i b_i = 0$. Ist M^n nicht orientierbar, so betrachte man die sogenannte Orientierungsüberlagerung $\widetilde{M}^n \xrightarrow{p} M^n$ von M^n; insbesondere ist $\widetilde{M}^n$ eine n-dimensionale orientierbare topologische Mannigfaltigkeit und p eine zweifache Überlagerung (für jedes $x \in M^n$ besteht $p^{-1}(\{x\})$ aus genau zwei Elementen). Außerdem ist wegen M^n geschlossen auch $\widetilde{M}^n$ geschlossen. Nun erfüllt die Euler-Charakteristik $\chi(\widetilde{X}) = k\chi(X)$ für eine beliebige k-fache Überlagerung $\widetilde{X} \rightarrow$

[2]Eine kompakte *topologische* Mannigfaltigkeit M^n heißt "orientierbar", falls die relative Homologiegruppe $H_n(M, \partial M; \mathbb{Z})$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.

X, also hier $\chi(\widetilde{M^n}) = 2\chi(M^n)$. Die erste Überlegung angewendet auf $\widetilde{M^n}$ liefert $\chi(\widetilde{M^n}) = 0$; daraus folgt auch $\chi(M^n) = 0$.
Ad *ii)*: Ist n ungerade, so ist $\chi(M^n) = 0$ nach *i)*. Sei also n gerade und sei W eine $n+1$-dimensionale kompakte topologische Mannigfaltigkeit mit $\partial W = M$. Konstruiere die "Verdopplung" $W' := W \cup_M W$ von W (zwei disjunkte Kopien von W werden an ihrem Rand M entlang zusammengeklebt), dann ist W' eine *geschlossene* $n+1$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit $\chi(W') = 0$ nach *i)*. Da für alle topologischen Räume M_1 und M_2 die Identität $H_k(M_1 \amalg M_2, \mathbb{Z}) = H_k(M_1, \mathbb{Z}) \oplus H_k(M_2, \mathbb{Z})$ erfüllt ist (für alle $k \in \mathbb{Z}$), gilt auch $\chi(M_1 \amalg M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2)$ und somit

$$0 = \chi(W') = \chi(W \setminus M) + \chi(M) + \chi(W \setminus M),$$

woraus die Behauptung folgt. □

Lemma 1.3 impliziert u.a., dass alle geradedimensionalen reellprojektiven Räume nicht beranden: schreibe $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n} = \mathbb{R}\mathrm{P}^{2n-1} \bigcup_f D^{2n}$ (mittels einer Verkelbeabbildung $f : \partial D^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^{2n-1}$), dann gilt nach der alternativen Definition der Euler-Charakteristik und Lemma 1.3.*i)*

$$\chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n}) = \chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n-1}) + 1 = 1$$

(eine $2n$-Zelle wurde an $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n-1}$ verklebt), insbesondere ist $\chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n})$ ungerade. Man kann $\chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n})$ auch durch die Formel $\chi(\mathbb{S}^n) = 2\chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ und die Identität $\mathbb{S}^n = D^n/\partial D^n$ berechnen ($\mathbb{S}^n$ besteht aus genau einer 0-Zelle und einer n-Zelle; beachte das Vorzeichen $(-1)^n$ in der Summe).

Nun interessieren wir uns für die Dimension $n = 3$. Ist M^3 geschlossen und orientierbar, so stellt ihre Euler-Charakteristik kein Hindernis dagegen dar, dass M^3 berandet (sie verschwindet). Tatsächlich berandet M^3 *immer*:

Satz 1.4 (V.A. Rokhlin [3]) *Jede orientierbare geschlossene 3-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit berandet*[3].

2 Beweis des Satzes

Aus den vorigen Vorträgen[4] wissen wir, dass jede orientierbare geschlossene 3-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit aus der 3-dimensionalen Sphäre

[3]Es kann sogar bewiesen werden, dass sie der Rand einer *orientierbaren* kompakten topologischen 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist.

[4]also nach der Existenz einer Heegaard-Zerlegung [2, Thm. 8.3] und einem Korollar [2, Cor. 12.4] des Satzes von Dehn-Lickorish [2, Thm. 12.3]

$\mathbb{S}^3$ durch endlich viele Chirurgien entlang eingebetteten Tori erhalten werden kann. Trivialerweise berandet $\mathbb{S}^3$. Die Strategie des Beweises ist daher folgende: zeige, dass die entlang den Tori durchgeführten Chirurgien die Eigenschaft erhalten, ein Rand zu sein.

Als Erstes definieren wir einen *a priori* anderen Begriff von Chirurgie als bisher verwendet. Von hier aus bezeichnen wie üblich D^p bzw. $\mathbb{S}^q$ den p-dimensionalen abgeschlossenen Einheitsball bzw. die q-dimensionale Einheitssphäre.

Definition 2.1 *Seien M_1^n, M_2^n zwei n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten und $q \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Wir sagen, dass M_2^n* aus M_1^n durch q-dimensionale Chirurgie entsteht*, wenn eine Einbettung $F : D^{p+1} \times \mathbb{S}^q \longrightarrow M_1^n$ so existiert, dass $M_2^n = (M_1^n \setminus F(\overset{\circ}{D}{}^{p+1} \times \mathbb{S}^q)) \cup_f (\mathbb{S}^p \times D^{q+1})$. Hierbei bezeichnen $p := n - 1 - q$ und $f := F_{|\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q}$.*

Einfach formuliert: ein eingebettetes $D^{p+1} \times \mathbb{S}^q$ wird aus M_1^n herausgeklebt und am Rand $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$ entlang wird ein $\mathbb{S}^p \times D^{q+1}$ wieder hereingeklebt. Dabei geht $\partial(D^{p+1} \times \mathbb{S}^q) = \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q = \partial(\mathbb{S}^p \times D^{q+1})$ ein.

Beispiele 2.2

1. Eine 0-dimensionale Chirurgie fügt einen Henkel zu: zwei disjunkte eingebettete offene Bälle werden von M_1^n herausgeklebt und ein Zylinder $\mathbb{S}^{n-1} \times [-1, 1]$ wird an den beiden Randsphären entlang hereingeklebt [Bild]. Ein Spezialfall davon ist die sogenannte *zusammenhängende Summe* zweier n-dimensionaler topologischer Mannigfaltigkeiten M^n und N^n (der eine Ball liegt in M^n und der andere in N^n) [Bild].

2. Wie im letzten Vortrag schon gesehen kann $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ aus $\mathbb{S}^3$ dadurch erhalten werden, dass ein eingebetteter Volltorus[5] $\mathbb{T}_1$ aus $\mathbb{S}^3$ herausgeklebt und ein anderer Volltorus $\mathbb{T}_2$ wieder hereingeklebt wird so, dass Parallele von $\partial\mathbb{T}_1$ auf Meridiane von $\partial\mathbb{T}_2$ (und umgekehrt) abgebildet werden. Dies ist genau äquivalent dazu, dass $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ aus $\mathbb{S}^3$ durch 1-dimensionale Chirurgie entsteht.

Entsteht eine Mannigfaltigkeit aus einer anderen durch Chirurgie, so berandet ihre disjunkte Vereinigung:

[5] genauer: eine Tubenumgebung eines *trivialen* Knoten im $\mathbb{S}^3$

Lemma 2.3 *Seien M_1^n, M_2^n zwei n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten und $q \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Entsteht M_2^n aus M_1^n durch q-dimensionale Chirurgie, so existiert eine $n+1$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit W mit $\partial W = M_1^n \amalg M_2^n$.*

Beweis: Sei $F : D^{p+1} \times \mathbb{S}^q \longrightarrow M_1^n$ eine Einbettung (mit $p := n - 1 - q$). Definiere

$$W := \left(D^{p+1} \times D^{q+1}\right) \cup_g (M_1^n \times [0,1]),$$

wobei $g : F(D^{p+1} \times \mathbb{S}^q) \times \{1\} \longrightarrow D^{p+1} \times D^{q+1}$, $(x, 1) \mapsto F^{-1}(x)$. Anders ausgedrückt: man betrachtet das Produkt $M_1^n \times [0,1]$ und bei $M_1^n \times \{1\}$ klebt man ein $D^{p+1} \times D^{q+1}$ an dem eingebetteten $D^{p+1} \times \mathbb{S}^q$ entlang herein [Bild]. Dabei ist zu beachten, dass $\partial(D^{p+1} \times D^{q+1}) = (\mathbb{S}^p \times D^{q+1}) \cup (D^{p+1} \times \mathbb{S}^q)$ gilt mit $(\mathbb{S}^p \times D^{q+1}) \cap (D^{p+1} \times \mathbb{S}^q) = \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$. Damit ist W eine $n+1$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit Rand

$$(M_1^n \times \{0\}) \amalg ((\mathbb{S}^p \times D^{q+1}) \cup_{g_{|F(\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q)}} (M_1^n \setminus F(\overset{\circ}{D^{p+1}} \times \mathbb{S}^q)) \times \{1\}).$$

Wegen $(\mathbb{S}^p \times D^{q+1}) \cup_{g_{|F(\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q)}} (M_1^n \setminus F(\overset{\circ}{D^{p+1}} \times \mathbb{S}^q)) \times \{1\}) \cong M_2^n$ (nach Definition) folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 2.3 impliziert, dass die in Definition 2.1 eingeführten Chirurgien die Eigenschaft erhalten, ein Rand zu sein: ist $M_1^n = \partial N$, so ist $W' := W \cup_{M_1^n} N$ (die Mannigfaltigkeiten N und W werden an M_1^n entlang zusammengeklebt) eine Mannigfaltigkeit mit Rand M_2^n.

Für den Beweis von Satz 1.4 bleibt es daher lediglich, zu zeigen, dass alle beim Heraus- und Hereinkleben von Tori im $\mathbb{S}^3$ verwendeten "Chirurgien" Chirurgien - oder Verknüpfungen davon - im Sinne von Definition 2.1 sind. Hier soll man genau hinschauen, was für "Chirurgien" bisher aufgetreten sind. Das Verfahren was immer: klebe einen eingebetteten Volltorus - also eine offene Tubenumgebung eines Knoten - aus einer 3-Mannigfaltigkeit M^3 heraus und klebe ihn an seinem Rand entlang mittels eines Homöomorphismus des Randes wieder herein. Mathematisch geschrieben: sei $F : \mathcal{T}^3 \longrightarrow M^3$ eine Einbettung des Volltorus $\mathcal{T}^3$, sei $h : \partial\mathcal{T}^3 \longrightarrow \partial\mathcal{T}^3$ ein Homöomorphismus des Randes, dann liefert das Verfahren $(M^3 \setminus F(\overset{\circ}{\mathcal{T}^3})) \cup_{F \circ h} \mathcal{T}^3$. Im letzten Vortrag haben wir außerdem gesehen, dass der Verklebehomöomorphismus h folgender Gestalt angenommen werden kann [2, Thm. 16.2]: entweder vertauscht er Meridiane und Parallele, oder er bildet den Standardmeridian α auf $p\alpha + \beta$ ab für ein $p \in \mathbb{N}$. Hierbei seien, in der Darstellung

$$\mathcal{T}^3 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1)^2 + x_3^2 \leq \frac{1}{2}\right\}$$

des Volltorus, $\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \partial\mathcal{T}^3$, $t \longmapsto (1 + \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}})$ der Standardmeridian und $\beta : [0, 2\pi] \longrightarrow \partial\mathcal{T}^3$, $t \longmapsto (\cos(t), \sin(t), t)$ die Standardparallele [Bild]. Im ersten Fall ist die Chirurgie bereits von der Gestalt in Definition 2.1. Im zweiten Fall besteht der Trick darin, durch Anwendung eines Homöomorphismus des Volltorus $\mathcal{T}^3$ einen Verklebehomömorphismus wie im ersten Fall zu bekommen. Dazu zeigt man die Existenz eines Homöomorphismus $H_p : \mathcal{T}^3 \longrightarrow \mathcal{T}^3$, dessen auf dem Rand induzierte Abbildung die Parallele β auf $p\alpha + \beta$ schickt.[6] Gelingt dies, so betrachte man $H_p^{-1} \circ h$ statt h und $F \circ H_p$ statt F; da $H_p^{-1} \circ h$ den Meridian α auf die Parallele β abbildet, entsteht $(M^3 \setminus F(\overset{\circ}{\mathcal{T}^3})) \cup_{F \circ h} \mathcal{T}^3 = (M^3 \setminus F \circ H_p(\overset{\circ}{\mathcal{T}^3})) \cup_{F \circ H_p \circ H_p^{-1} \circ h} \mathcal{T}^3$ wohl aus M^3 durch 1-dimensionale Chirurgie wie in Definition 2.1.
Nun kann H_p "anschaulich" beschrieben werden wie folgt: schneide $\mathcal{T}^3$ an p von Meridianen berandeten Kreisscheiben entlang auf und klebe jede Kreisscheibe mit der "nächsten" mittels eines Dehn-Twists wieder herein; in jedem zylindrischen Teil wird "um die Achse einmal gedreht" [Bild]. Mittels "Polarkoordinaten" kann H_p explizit geschrieben werden: betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : [0, \frac{1}{\sqrt{2}}] \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 &\longrightarrow \mathcal{T}^3 \\ (a, s, t) &\longmapsto \begin{pmatrix} (1 + a\cos(s))\cos(t) \\ (1 + a\cos(s))\sin(t) \\ a\sin(s) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

die einen Homöomorphismus $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}] \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 / \{0\} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \{0\} \longrightarrow \mathcal{T}^3$ induziert; der Homöomorphismus H_p ist dann gegeben durch $\phi(a, s, t) \longmapsto \phi(a, s + pt, t)$[7].

Literatur

[1] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002.

[2] V.V. Prasolov, A.B. Sossinsky, *Knots, links, braids and 3-manifolds. An introduction to the new invariants in low-dimensional topology*, Translations of Mathematical Monographs **154**, American Mathematical Society, 1997.

[3] V.A. Rokhlin, *A three-dimensional manifold is the boundary of a four-dimensional one*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **81** (1951), 355–357.

[6] Danke an Bernd Ammann für die Korrektur.

[7] Übungsaufgabe: zeige, dass dies wohl einen Homöomorphismus von $\mathcal{T}^3$ definiert.